

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burkay SİVRİ

**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEYE
SAHİP KOLONLARIN BURKULMA ANALİZİ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ADANA-2023

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEYE SAHİP
KOLONLARIN BURKULMA ANALİZİ**

Burkay SİVRİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Bu Tez 03/01/2023 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Beytullah TEMEL
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Naki TÜTÜNCÜ
ÜYE

.....
Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve
fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat
Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEYE SAHİP
KOLONLARIN BURKULMA ANALİZİ**

Burkay SİVRİ

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

Danışman: Prof. Dr. Beytullah TEMEL
Yıl 2023, Sayfa: 71

Jüri : Prof. Dr. Beytullah TEMEL
: Prof. Dr. Naki TÜTÜNCÜ
: Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

Bu çalışmada, eksenel yönde fonksiyonel derecelendirilmiş kolonların burkulma davranışı araştırılmıştır. Kolonlar, kayma deformasyonunun burkulma yükü üzerindeki etkisini görmek için Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine dayalı olarak modellenmiştir. Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemler, denge denklemleri yardımıyla iki farklı formatta elde edilmiştir. Davranışı yöneten diferansiyel denklemler, Python dilinde hazırlanmış Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine dayalı bir program yardımıyla çözülmüştür. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi yardımıyla elde edilen burkulma yükleri, literatürde bulunan sonuçlar ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Malzeme değişim fonksiyonlarının, sınır koşullarının ve kesit özelliklerinin burkulma yüküne etkisi araştırılmıştır. Eksenel yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli kolonların burkulma yükünün hesaplanmasında uygulanan sayısal yöntemin etkinliği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Burkulma analizi, Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi, Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi, Timoshenko Kiriş Teorisi

ABSTRACT

MSc THESIS

BUCKLING ANALYSIS OF COLUMNS WITH FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS

Burkay SİVRİ

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING**

Supervisor: Prof. Dr. Beytullah TEMEL
Year 2023, Pages: 71

Jury : Prof. Dr. Beytullah TEMEL
: Prof. Dr. Naki TÖTÜNCÜ
: Prof. Dr. Faruk Fırat ÇALIM

In this study, the buckling behavior of axially functionally graded columns has been investigated. Columns are modeled based on Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories in order to see the effect of shear deformation on the buckling load. Differential equations governing the buckling behavior are obtained in two different forms with the help of equilibrium equations. A program based on the Complementary Functions Method which was prepared with the Python language has been used in the solution of differential equations. The buckling loads obtained by the Complementary Functions Method have been compared with the results found in the literature and those of the Abaqus finite element software. The effects of material functions, boundary conditions, and section properties on the buckling load have been investigated. The efficiency of the numerical method applied in the calculation of the buckling load of columns with functionally graded materials in the axial direction is shown.

Keywords: Buckling analysis, Functionally graded material, Complementary Functions Method, Euler-Bernoulli Beam Theory, Timoshenko Beam Theory

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Mühendislik uygulamalarının temeli, yük altında bulunan cisimlerin uğradığı deformasyonu araştırmaya ve sınırlandırmaya dayanmaktadır. Bu deformasyonlar kuvvetin türü ve şiddetine bağlı olarak değiştiği gibi cismin meydana geldiği malzemenin mekanik özelliklerine göre de değişir.

Günümüzde gelişen mühendislik uygulamaları, tasarımları oluşturacak malzemelerin üstün özelliklerini talep etmektedir. İstenilen bu mekanik özellikler homojen-izotrop malzemelerden karşılanamayabilir. Malzeme üretim tekniklerinin gelişmesiyle birlikte, mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya sürekli olarak değişen fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) malzemeler üretilmeye başlanmıştır. Üretilen bu malzemelerin kullanılabilirliğinin araştırılması amacıyla; serbest titreşim, zorlanmış titreşim, aşınma, yorulma ve burkulma davranışlarının belirlenmesi günümüzde önem kazanmıştır.

Bu çalışma kapsamında eksenel yönde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeye sahip kolonların burkulma davranışı araştırılmıştır. Kayma deformasyonunun burkulma davranışı üzerindeki etkisini görebilmek amacıyla kolonlar Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi (EKT) ve Timoshenko Kiriş Teorisine (TKT) dayalı modellenmiştir. Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemler, denge denklemleri ve iç kuvvet değişimleri yardımıyla bulunmuştur. İki farklı formatta elde edilen yönetici diferansiyel denklem takımları Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine (TFY) dayalı Python dilinde hazırlanan bir programla çözülmüştür. Sınır değer problemini başlangıç değer problemine dönüştürme ilkesine dayanan TFY, 4. ve 5. mertebeden Runge-Kutta (RK4 ve RK5) algoritmaları kullanılmıştır.

Elde edilen yönetici denklem takımları, homojen-izotrop malzemeye sahip kolonların üzerinde test edilmiştir. Ankastre-Ankastre (A-A), Mafsalsal-Mafsalsal (M-M), Ankastre-Mafsalsal(A-M) ve Ankastre-Serbest (A-Se) sınır koşulları için elde edilen

kolonların burkulma yükleri literatürde bulunan analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Eksenel yönde FD kolonların burkulma davranışının incelenmesi amacıyla üç farklı malzeme değişim fonksiyonu ele alınmıştır. Ele alınan malzeme değişim fonksiyonları için EKT ve TKT'ye dayalı modellenen kolonların burkulma yükleri araştırılmıştır. Farklı sınır koşulları için kolonların TFY yardımıyla elde edilen burkulma yükleri literatürde bulunan sonuçlar ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

EKT'ye dayalı modellenen eksenel yönde FD malzemeli kolonların TFY ile heaplanan burkulma yüklerinin Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen burkulma yükleriyle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Abaqus ile yapılan analizlerde, kullanılan homojen-izotrop eleman sayısı arttıkça burkulma yükleri daha hassas bir şekilde elde edilmektedir.

EKT'ye dayalı modellenen FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri L/h oranından etkilenmezken, TKT'ye dayalı modellenen kolonların boyutsuz burkulma yükleri L/h oranı arttıkça artmaktadır. L/h oranı arttıkça TKT'ye dayalı kolonlardan elde edilen sonuçların EKT'ye dayalı kolonlardan elde edilen sonuçlara yaklaştığı; bu oran azaldıkça kayma deformasyonunun kritik burkulma yüküne etkisinin arttığı gözlemlenmiştir.

FD malzemeli kolonlarda en büyük burkulma yükleri Model 3 malzeme değişim fonksiyonu için elde edilmiştir. Aynı malzeme değişim fonksiyonu ve L/h oranına sahip kolonlarda en büyük burkulma yükleri A-A sınır koşulunda elde edilirken, en küçük burkulma yükleri A-Se sınır koşulunda elde edilmiştir.

Malzeme değişim fonksiyonlarının, kesit özelliklerinin, sınır koşullarının, kırış teorilerinin ve başlangıç değer probleminin çözümü için seçilen algoritmaların kritik burkulma yükü üzerindeki etkileri araştırılmış, çizelgeler ve şekiller halinde bu çalışmada sunulmuştur.

Bu çalışmada elde edilen yönetici diferansiyel denklemlerin çözümlerinde, uygulanan sayısal yöntemin aksenel yönde FD malzemeli kolonların kritik burkulma yüklerinin bulunmasında etkin olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.





TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimde yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini paylaşan, yüksek lisans eğitimim süresince yaptığım çalışmalarda beni cesaretlendiren danışmanım Sayın Prof. Dr. Beytullah TEMEL'e sonsuz şükranlarımı sunarım.

Bu çalışmada, Abaqus sonlu elemanlar yazılımının kullanılmasında desteklerini esirgemeyen Konya Teknik Üniversitesi'nde görev yapan Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tolga YILMAZ'a çok teşekkür ederim.

Değerli katkılarından dolayı Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ahmad Reshad NOORI'ye ve Sayın Arş. Gör. Timuçin Alp ASLAN'a teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan en büyük şansım, sevgili eşim Sevim Selen SİVRİ'ye tüm kalbimle teşekkür ederim.

Son olarak, tüm hayatım boyunca yanımda olan ve benden desteklerini esirgemeyen sevgili annem Gülten SİVRİ'ye, babam Emin SİVRİ'ye ve ablam Melek ÇALIŞKAN'a sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ÇİZELGELER DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ	XII
SİMGELER VE KISALTMALAR	XIV
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL VE METOT	9
3.1. Giriş	9
3.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme	9
3.3. Kiriş Teorileri	10
3.3.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi	11
3.3.1.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi Uygunluk Koşulları	11
3.3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi	12
3.3.2.1. Timoshenko Kiriş Teorisi Uygunluk Koşulları	12
3.4. Stabilitate	12
3.4.1. İki Ucu Mafsallı Kolonun Burkulması	14
3.4.2. Doğru Eksenli Elastik Kolonların Genel Teorisi	16
3.4.3. Eksenel Yönde FD Malzemeli Kolonların Burkulma Davranışı	18
3.4.3.1 Eksenel Yönde FD Malzemeli Kolonların Denge Denklemleri Yardımla Burkulma Davranışının Elde Edilmesi	22
3.5. Çözüm Yöntemi	25
3.5.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi	25

3.5.2. Runge-Kutta Metotları.....	27
3.5.2.1. Dördüncü Mertebe Runge-Kutta Algoritması	28
3.5.2.2. Beşinci Mertebe Runge-Kutta Algoritması	29
3.5.3. Secant Yöntemi.....	30
4. SAYISAL UYGULAMALAR	33
4.1. Giriş	33
4.2. Homojen-İzotrop Kolonların Burkulma Analizi.....	33
4.2.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Homojen İzotrop Kolonların Burkulma Analizi	33
4.2.2. Timoshenko Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Homojen İzotrop Kolonların Burkulma Analizi	38
4.3. Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Burkulma Analizi	45
4.3.1. Malzeme Değişim Fonksiyonları ve Kesit Özellikleri.....	45
4.3.2. Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Abaqus Yazılımı Yardımıyla Burkulma Analizi	46
4.3.3. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Burkulma Analizi	50
4.3.4. Timoshenko Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Burkulma Analizi	54
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	63
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	71

ÇİZELGELER DİZİNİ

SAYFA

Çizelge 3.1.	TFY'nin başlangıç koşulları	27
Çizelge 4.1.	Eşitlik 3.28'de verilen denklem takımından elde edilen boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK4)	35
Çizelge 4.2.	Eşitlik 3.28'de verilen denklem takımından elde edilen boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK5)	35
Çizelge 4.3.	Eşitlik 3.34'de verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK4).....	36
Çizelge 4.4.	Eşitlik 3.34'de verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK5).....	37
Çizelge 4.5.	Eşitlik 3.26'da verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (TKT)	38
Çizelge 4.6.	Eşitlik 3.33'de verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (TKT)	40
Çizelge 4.7.	TKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop A-Se kolonun en küçük dört boyutsuz burkulma yükü.....	40
Çizelge 4.8.	TKT'ye dayalı modellenen farklı L/h oranlarındaki kolonların boyutsuz burkulma yükleri (N=40).....	42
Çizelge 4.9.	Eksenel yönde malzeme değişim fonksiyonları.....	45
Çizelge 4.10.	Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (EKT, Model 1)	51
Çizelge 4.11.	Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (EKT, Model 2)	52
Çizelge 4.12.	Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (EKT, Model 3)	53
Çizelge 4.13.	Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 1, L/h=5, N=25)	54

Çizelge 4.14. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 2, $L/h=5$, $N=25$)	55
Çizelge 4.15. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 3, $L/h=5$, $N=25$)	56
Çizelge 4.16. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların farklı L/h oranlarındaki boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 1, $N=25$).....	57
Çizelge 4.17. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların farklı L/h oranlarındaki boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 2, $N=25$).....	57
Çizelge 4.18. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların farklı L/h oranlarındaki boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 3, $N=25$).....	58

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 3.1. Denge konumları.....	13
Şekil 3.2. İki ucu mafsallı kolonun burkulması	14
Şekil 3.3. İki ucu mafsallı kolonun burkulma mod şekilleri	16
Şekil 3.4. Eksenel yük altındaki kolonun serbest cisim diyagramı	17
Şekil 3.5. Eksenel yönde FD malzemeli dikdörtgen kesitli kolon	23
Şekil 4.1. RK4 ve RK5 algoritmalarının etkinliğinin karşılaştırılması	39
Şekil 4.2. TKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop A-Se kolonun P yüküne bağlı katsayılar matrisi determinantının değişimi	41
Şekil 4.3. A-Se kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri.....	43
Şekil 4.4. M-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri.....	43
Şekil 4.5. A-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri	44
Şekil 4.6. A-A kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri.....	44
Şekil 4.7. Malzeme değişim fonksiyonlarının kolon boyunca değişimi	46
Şekil 4.8. Eksenel yönde FD malzemeli kolonun Abaqus yazılımı ara yüzündeki görüntüsü.....	48
Şekil 4.9. Bağlayıcı kesitlerin tanımlanması	48
Şekil 4.10. Abaqus yazılımında sınır koşullarının tanımlanması.....	49
Şekil 4.11. A-Se kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)	59
Şekil 4.12. M-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)	60
Şekil 4.13. A-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)	60
Şekil 4.14. A-A kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)	61



SİMGELER VE KISALTMALAR

ε_x	: Eksenel birim uzama
γ_{xz}	: Kayma açısı
κ	: Eğrilik
u	: Kolon eksenine doğrultusunda yer değiştirme
w	: Kolon eksenine dik doğrultuda çökme
θ	: Kolon kesitinin dönmesi
P	: Eksenel basınç yükü
M	: Eğilme momenti
Q	: Kesme kuvveti
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
A	: Kesit alanı
k_s	: Kayma düzeltme katsayısı
ν	: Poisson oranı
I	: Atalet momenti
L	: Çubuk elemanın uzunluğu
$\bar{K}(x)$	: Eğilme rijitliği
$\bar{G}(x)$	: Kayma rijitliği
$\% \Delta$	: Yüzde bağıl fark
FD	: Fonksiyonel derecelendirilmiş
TFY	: Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi
RK4	: 4. Mertebeden Runge-Kutta
RK5	: 5. Mertebeden Runge-Kutta
EKT	: Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi
TKT	: Timoshenko Kiriş Teorisi

N : Adım aralığı

P_{nkr} : n. burkulma yükü

$\bar{P}_{nkr}$: n. boyutsuz burkulma yükü

SK : Sınır Koşulu

A - Se : Ankastre uç - Serbest uç

M - M : Mafsallı uç - Mafsallı uç

A - M : Ankastre uç - Mafsallı uç

A - A : Ankastre uç - Ankastre uç

1. GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında kullanılan malzemeler genellikle homojen-izotrop özelliklere sahiptir. Bu malzemeler kullanım amaçları doğrultusunda gösterdikleri güçlü özelliklerinden dolayı tercih edilmektedirler. Ancak bazı durumlarda homojen-izotrop malzemeli elemanlardan istenilen mekanik özellikler elde edilemeyebilir.

Teknolojinin ve malzeme üretim tekniklerinin günümüzde gelişimiyle istenilen talepleri karşılayacak çözümler hızla hayatımıza girmektedir. Kompozit malzemeler farklı malzemelerin üstün özelliklerini bir araya getirmektedir. Kompozit malzemelerin temel amacı, kullanıldığı elemanın dayanımını, ağırlığını, iletkenliğini, aşınmasını, yorulma dayanımını, dayanıklılığını istenilen doğrultuda artırıp azaltmaktır.

Malzeme özelliklerinin bir noktadan diğer bir noktaya sürekli olarak değiştiği malzemelere, FD malzemeler denilmektedir. Malzeme özelliklerinin değişimi doğrultusuna bağlı olarak eksenel yönde ve kalınlık yönünde FD malzemeler uygulamalarda yaygın bir biçimde kullanılmaktadır. FD malzemeler, kompozit malzemelerin bir alt dalı olarak sınıflandırılabilir.

FD malzemeli elemanların uygulamalarda kullanılmaya başlanmasıyla birlikte mekanik özellikleri birçok çalışmada araştırılmaya devam etmektedir.

Basınç, eğilme ve kayma şekil değiştirmelerinin kiriş, kolon, kablo ve çerçeve sistemlerine etkisini araştırırken, bu elemanların tasarımında kullanılan FD malzemeli elemanların emniyet şartlarını sağlaması gereklidir.

Dış yükler, mesnet çökmeleri ve sıcaklık değişimleri gibi etkiler, yapılar üzerinde deformasyonlar ve gerilmelere sebep olmaktadır. İlgili yönetmeliklerle bu etkilerin kontrolü temelde iki prensibe dayanmaktadır. Bu prensiplerden biri kesitte oluşacak en büyük gerilmenin kontrol edilmesiyle diğer elemanın denge halinin kararlı olup olmadığının tahkididir.

Eksenel basınç kuvveti etkisi altında bulunan çubuk elemanların analizi mühendislik problemlerindeki temel araştırmalardandır. Bu tür elemanların statik, dinamik ve stabilite analizi günümüzde birçok araştırmaya konu olmuştur.

Bu çalışmada eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem, denge denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Bulunan diferansiyel denklem, birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı formatına dönüştürülmüştür. Denklem takımının sayısal çözümünde TFY kullanılmıştır.

Bu tez çalışması aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır.

2. bölümde, eksenel yönde FD kolonların mekanik özelliklerini inceleyen çalışmalar toparlanmıştır. Burada basınç kuvveti altında bulunan çubuk elemanların burkulma davranışını farklı sayısal yöntemler ve yazılımlar kullanılarak inceleyen çalışmalara ağırlık verilmiştir.

3. bölümde, FD malzemelerin uygulamalardaki kullanım alanlarından, mekanik özelliklerinden ve üretim tekniklerinden bahsedilmiştir. Stabilite konusu hakkında genel bilgilerden bahsedilmiş olup doğru eksenli kolonların burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemler sunulmuştur. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemler elde edilmiş ve bu denklemlerin çözümünde kullanılacak TFY tanıtılmıştır.

4. bölümde, elde edilen yönetici diferansiyel denklemler üzerinden homojen-izotrop malzemeli kolonların farklı sınır koşullarındaki burkulma yükleri bulunmuştur. TFY kullanılarak elde edilen boyutsuz burkulma yükleri literatürde bulunan kesin sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çalışma kapsamında ele alınan eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma yükleri EKT ve TKT'ye dayalı modeller üzerinden elde edilmiştir. Kayma deformasyonunun, kesit geometrisinin, malzeme değişim fonksiyonlarının ve sınır koşullarının burkulma davranışına etkisi araştırılmıştır.

5. bölümde, çalışmadan elde edilen sonuçlara ve önerilere yer verilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Gören ve Erim (2000), değişken kesitli TKT'ye dayalı konsol kirişlerin stabilitesini incelemişlerdir. On farklı kademeli ve kademesiz kirişin kritik burkulma yükleri Sonlu Eleman ve Sonlu Eleman-Taşıma Matris Metotları ile bulunmuştur. Böylelikle iki yöntemin etkinlikleri karşılaştırmışlardır. Hesaplamalarda MATLAB 5.1 programlama dilini kullanıp çözümlerin doğruluğunu üniform kirişleri göz önüne alarak kontrol etmişlerdir.

Elishakoff (2001), homojen-izotrop olmayan kolonların burkulma yükünü, polinom tipi malzeme fonksiyonları için bulmuştur.

Coşkun ve Atay (2009), sabit ve değişken kesitli Euler kolonlarının burkulma yüklerini araştırmışlardır. Doğrusal olmayan adi kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Varyasyonel İterasyon Yöntemi'nin burkulma yüklerinin elde edilmesinde etkinliğini araştırmışlardır. Uygulanan yöntemin farklı sınır şartlarında, sabit ve değişken kesitli kolonlarda etkin sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

Singh ve Li (2009), eksenel yönde FD malzemeye sahip değişken kesitli kolonların burkulma yükünü hesaplayabilmek için matematiksel model sunmuşlardır.

Huang ve Li (2010), FD daire kesitli kiriş-kolonların burkulma davranışını kayma deformasyonunu dikkate alarak incelemişlerdir. Bulunan sonuçları, TKT ve EKT'ye dayalı bulunan burkulma yükleriyle karşılaştırmışlardır. Önerilen yaklaşımın avantajlarını, kayma deformasyonlarını hesaba katması ve herhangi bir düzeltme katsayısına ihtiyaç duyulmaması olarak sunmuşlardır.

Shahba ve ark. (2011), EKT'ye dayalı modellenen eksenel yönde FD kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizini sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla gerçekleştirmişlerdir. Farklı koniklik oranlarının ve malzeme değişim fonksiyonlarının çeşitli sınır koşullarındaki kolonların burkulma ve serbest titreşim davranışı üzerindeki etkilerini araştırmışlardır.

Shahba ve ark. (2011), TKT'ye dayalı modellenen değişken kesitli eksenel yönde FD kirişlerin serbest titreşim ve stabilitesini araştırmışlardır. Sonuçları sonlu elemanlar yöntemi kullanarak elde etmişlerdir. Klasik ve yarı rijit sınır koşulları altında, farklı koniklik oranlarının ve malzeme değişim fonksiyonlarının kirişlerin mekanik özellikleri üzerindeki etkilerini çalışmalarında sunmuşlardır.

Huang ve Li (2011), üniform olmayan ve kolon ekseni boyunca eğilme rijitliği değişen Euler-Bernoulli kolonlarının burkulma davranışlarının incelenmesi için analitik yaklaşım sunmuşlardır. Mafsalsız uçlu, ankastre uçlu ve konsol kolonların burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklemi, Fredholm integral denklemine indirgenmişlerdir. Uyguladıkları yöntemin etkinliğini literatürdeki mevcut sayısal yöntemlerle karşılaştırmışlardır. Eğilme rijitliği eleman ekseni boyunca polinom, trigonometrik ve üstel fonksiyon şeklinde değişen kolonların burkulma davranışını incelemişlerdir. Ayrıca yöntemin serbest titreşim probleminde uygulanabilirliğini göstermişlerdir.

Elishakoff (2012), FD kolonların burkulma davranışını incelemiştir. Malzeme özelliklerinin kolon ekseni boyunca değiştiği varsayımını yapmıştır. Çalışmada, konsol kolonun burkulma modları, dördüncü ve beşinci dereceden iki alternatif polinom varyasyonu dikkate alınarak bulunmuştur. Kolondan istenilen taşıma kapasitesine göre eksenel yönde fonksiyonel derecelendirmeyi belirlemiştir.

Rajasekaran (2012), üniform olmayan eksenel yönde FD kirişlerin farklı sınır koşullarında, burkulma ve serbest titreşim davranışını dinamik rijitlik yaklaşımına dayalı diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak incelemiştir. Uyguladığı yöntem sayesinde kiriş ekseni boyunca kesit alanı, kesit atalet momenti ve malzeme özelliklerindeki değişimi modelleyebilmiştir.

Yılmaz ve ark. (2013), elastik zemine oturan üniform olmayan eksenel yönde FD kolonların burkulmasını Lokalize Diferansiyel Kuadratür Yöntemi yardımıyla araştırmışlardır. Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemleri EKT'ye uygun olarak elde etmişlerdir. Kolon ekseni boyunca farklı kesit ve malzeme özelliklerinin burkulma yüküne etkisini araştırmışlardır. Uyguladıkları

yöntemden elde ettikleri sonuçları literatürde bulunan diğer analitik ve sayısal çalışmalardan elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Şimşek ve Yurtcu (2013), yerel olmayan TKT ve EKT'ye dayalı modellenen nano kirişlerin eğilme ve burkulma analizini araştırmışlardır. Kirişlerdeki fonksiyonel derecelenmeyi kalınlık yönünde ele almışlardır. Yönetici denklemleri minimum potansiyel enerji prensibiyle elde etmişlerdir.

Chen ve ark. (2015), TKT'ye dayalı FD boşluklu kirişlerin elastik burkulma ve eğilme analizini incelemişlerdir. Kirişler iki farklı modelde kalınlık yönünde derecelendirilmiştir. Kirişlerin mekanik davranışını idare eden diferansiyel denklem sistemini Hamilton prensibiyle elde etmişlerdir. Diferansiyel denklemin çözümünde Ritz Metodunu kullanmışlardır.

Filiz ve Aydoğdu (2015), çeşitli sınır koşullarındaki eksenel yönde FD Euler-Bernoulli kirişlerinin titreşim ve burkulma davranışını Ritz Metodu yardımıyla incelemişlerdir.

Uluköy (2016), eksenel basınç kuvveti altında malzeme özelliğinin eleman kalınlığı boyunca sürekli değiştiği FD kirişin burkulma analizini ANSYS sonlu elemanlar programı kullanarak yapmıştır. Analizler sonucunda derecelendirme yönüne paralel yüklenen FD malzemeler, homojen-izotrop malzemelerle benzer özellikler gösterirken; derecelendirme doğrultusuna dik yüklemeler ise malzeme üsteline bağlı sonuçlar gösterdiğini ortaya koymuştur.

Huang ve ark. (2016), FD üniform olmayan kirişlerin burkulma davranışını incelemişlerdir. Malzeme değişimini kiriş eksenine boyunca ele almışlardır. Kirişler, kayma deformasyonlarını dikkate alan TKT'ye dayalı modellenmiştir. Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemi, yardımcı fonksiyonlar ve güç serilerine dayalı olarak çözmüş ve kullandıkları yöntemin etkinliğini göstermişlerdir.

Şimşek (2016), TKT'ye dayalı modellenen malzeme özelliklerinin eksenel yönde ve kalık boyunca değiştiği varsayılan kirişlerin burkulmasını araştırmıştır. Farklı sınır koşullarındaki FD kolonların kritik burkulma yüklerini Ritz yöntemi kullanarak elde etmiştir. Ayrıca karşılaştırma amacıyla EKT'ye dayalı modellenen

kirişlerinde burkulma yüklerini elde etmiştir. Malzeme derecelenmesi ve kayma deformasyonunun burkulma davranışı üzerindeki etkilerini çalışmasında sunmuştur.

Kahya ve Turan (2017), FD kirişlerin burkulma ve serbest titreşim analizi için birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı sonlu eleman modeli sunmuşlardır. Sunulan sonlu eleman modeli, beş düğüm noktası ve on serbestlik derecesine sahiptir. Malzeme özelliğinin kalınlık boyunca değiştiği varsayılan kirişlerin, burkulma ve titreşim davranışı idare eden denklemleri Lagrange Denklemleri yardımlarıyla elde etmişlerdir. Ayrıca bu sonlu eleman modelinin bazı modifikasyonlarla tabakalı ve sandviç kirişlerin analizinde de uygulanabilir olduğunu göstermişlerdir.

Tang ve ark. (2018), iki yönlü FD boşluklu kirişin burkulma analizini araştırmışlardır. EKT ve minimum toplam potansiyel enerji prensibi yardımıyla burkulma davranışını idare eden denklemleri elde etmişlerdir. Farklı boşluk dağılımlarına sahip kirişlerin burkulma yüklerini Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuadratur Yöntemi kullanarak bulmuşlardır.

Karamanlı (2018), iki yönlü FD kirişlerin burkulmasını araştırmıştır. Malzeme özelliklerinin hem kiriş eksenine hem de kalınlık yönünde değiştiği varsayılan üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı modellenen kirişler için Ritz tipi analitik çözüm sunmuştur. Farklı sınır koşullarındaki kirişlerden elde ettiği burkulma yüklerini daha önceki çalışmalarda sunulan sonuçlarla karşılaştırmıştır. Yaptığı çalışmayla kalın kirişler için kayma deformasyonunun etkisinin önemini ve daha yüksek mertebe kayma deformasyon kiriş teorilerinin gerekliliğini göstermiştir.

Lee ve Lee (2019), kesit ve malzeme özellikleri kolon eksenine boyunca doğrusal değişen Euler-Bernoulli kolonlarının serbest titreşim ve burkulma davranışını birleşik bir modelde sunmuşlardır. Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemi elde edilip, determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemiyle çözmüşlerdir. Sınır koşullarının, kesit geometrisinin, malzeme ve kesit fonksiyonlarının burkulma davranışına etkisini

araştırmışlardır. Buldukları sonuçları literatürde bulunan mevcut sonuçlar ve ADINA sonlu eleman yazılımından elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Sabit bir kolon hacmi için, kare kesitli kolona ait frekans ve burkulma yükü değerlerinin, dairesel kesitli kolondan elde edilen değerlere kıyasla daha yüksek olduğunu göstermişlerdir.

Jamil ve Tütüncü (2019), lineer elastik Euler kolonunun stabilitesini araştırmışlardır. Analizlerinde iki farklı sayısal yöntem kullanmışlardır. TFY ve Atış Metodunun stabilize analizindeki etkinliklerini karşılaştırmışlardır.

Xiao ve Li (2019), bir ucunda dönme yayı bulunan homojen olmayan konsol kolonların Euler burkulmasını incelemişlerdir. Çalışmalarında, eksenel yönde homojen olmayan üstel derecelendirilmiş kolonların burkulma yükünün kesin değerinin bulunması için karakteristik bir denklem bulmayı amaçlamışlardır. Burkulma yüklerini analitik olarak bulabilmek için problemi Bessel denklemine dönüştürmüşlerdir. Araştırılan sınır koşulunda, analitik burkulma yükünü veren karakteristik denklemi elde edip integral denkleme indirgemişlerdir. Burkulma yükünü veren yaklaşık ifade için Moment Metodu kullanılmıştır. Yaklaşık olarak buldukları burkulma yükü değerlerini, kesin olarak elde ettikleri burkulma yükü değerleriyle karşılaştırmışlardır.

Akgöz (2019), kesit alanı eleman boyunca sürekli değişen eksenel basınç kuvveti altındaki narin kolonların burkulma davranışını incelemiştir. EKT'ye dayalı modellenen kolonların burkulma yüklerini Ritz Metoduyla bulmuştur. Sınır koşullarının ve çeşitli koniklik oranlarının burkulma yüküne etkisini araştırmış olup; koniklik oranındaki artışın, kritik burkulma yükünde önemli bir azalmaya sebep olduğunu göstermiştir.

Soltani (2020), Winkler zeminine oturan eksenel yönde FD malzemeli değişken kesitli kolonların burkulma yükünü sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bulmuştur. Farklı malzeme değişim gradyanlarının ve koniklik oranlarının, TKT'ye dayalı olarak modellenen kolonların burkulma yükleri üzerindeki etkisini araştırmıştır.

Lee ve Lee (2022), burkulma kapasitesini en üst düzeye çıkarmak için eksenel yönde FD malzemeli değişken kesitli kolonların optimizasyonunu incelemişlerdir. Kolonların optimizasyonu farklı çokgen kesitler ve değişik malzeme varyasyonlarında irdelenmiştir. Davranışı idare eden yönetici diferansiyel denklemler EKT'ye dayalı kolonlar için elde edilmiştir. Yönetici diferansiyel denklemi, determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemiyle çözmüşlerdir. Önerdikleri yöntemden elde ettikleri sonuçları literatürde verilen ve sonlu eleman çözümleriyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Sivri ve Temel (2022a), TKT'ye dayalı modellenen değişken kesitli kolonların burkulmasını TFY kullanarak araştırmışlardır. Farklı koniklik oranlarına sahip kolonların, farklı sınır koşullarında burkulma davranışını incelemişlerdir.

Yukarıda verilen çalışmalar incelendiğinde, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışını araştıran birçok çalışmanın olduğu görülmektedir. Bu çalışmalarda çeşitli sayısal yöntemler ve paket programlar kullanılmıştır. Ancak eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma yüklerini TFY yardımıyla elde eden bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışma kapsamında, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma analizi TFY kullanılarak araştırılmıştır (Sivri ve Temel, 2022b).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Giriş

Bu bölümde; çalışma kapsamında ele alınan FD malzemeler, burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemler, TFY ve kullanılan diğer sayısal yöntemler hakkında genel bilgiler verilmiştir.

3.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme

Tarihte ilk mühendislik yaklaşımlarının başladığı zamanlardan günümüze kadar insanlar doğadaki olanakları kullanarak çeşitli araç, gereç ve yapılar inşa etmişlerdir. Bu araçların yapımında genellikle homojen-izotrop malzemeler kullanılmaktadır. İnşaat, havacılık, tıp, uzay ve makine mühendisliği gibi alanlarda günümüz tasarımlarından beklenen mekanik özellikler, üniform kesitler ve homojen-izotrop malzemeler ile karşılanamayabilir. Talep edilen mekanik özellikler değişken kesitli elemanlarla, kompozit malzemelerle veya FD malzemeli elemanlarla çalışmayı gerektirebilmektedir. Mimari nedenler ile zamanı ve maliyeti en iyi biçimde yönetmeyi amaçlayan optimum mühendislik tasarımı ilkeleri yapı elemanı boyunca değişken kesit ve malzeme özelliklerinin kullanımını avantajlı hale getirebilir.

Yapılarda kullanılan elemanlar, kullanım amaçlarına uygun olarak seçilmektedir. Bir elemanın mekanik davranışı üretildiği malzemeye doğrudan bağlıdır. Sıcaklık, korozyon, aşınma, donma-çözünme, asitlenme gibi farklı etkilere maruz kalabilecek elemanların imalatında malzeme seçimi daha da önem kazanmaktadır. Bu şartlarda homojen-izotrop malzemeye sahip elemanların kullanımı her etki ve yükleme türü için uygun olmayabilir.

Gelişen eleman üretim teknikleri ve prosedürleriyle birlikte kullanılan malzemeden kaynaklanan dezavantajlı özellikler ortadan kaldırılmaya çalışılmaktadır. Mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya sürekli olarak değişen FD malzemeli elemanlar, çeşitli malzemelerin üstün özelliklerini bir araya

getirmeyi amaçlamaktadır. 1984 yılında Japon araştırmacılar tarafından termal bariyer olarak kullanılmak üzere geliştirilen kompozit malzeme türü olan FD malzemeler bugüne kadar birçok sektörde aktif olarak yer almaktadır.

Tabakalı kompozit malzemelerde keskin olarak değişen fiziksel, kimyasal ve elastisite modülü, poisson oranı, termal genleşme katsayısı, yoğunluk, kayma modülü gibi mekanik özellikler FD malzemeli elemanlarda yumuşak ve sürekli olarak değişmektedir. Bu sürekli ve düzenli değişim sayesinde gerilme yığılmalarının ve çatlak oluşumunun eleman üzerindeki etkisi azalmaktadır.

Fonksiyonel derecelenme plak, kolon, kiriş gibi yapılarda görülebilmektedir. Kolon-kiriş elemanlarda fonksiyonel derecelenme kalınlık yönünde olabileceği gibi eksen boyuna da olabilmektedir. Bu tür elemanların üretiminde farklı malzeme değişim fonksiyonları ve katsayıları kullanılabilir.

Buhar biriktirme yöntemi (Groves ve Wadley, 1997), toz metalürjisi (Nemat-Alla ve ark, 2011), savurma döküm (Watanabe ve ark, 1998), ve katı serbest form imalat yöntemiyle (Lin ve Yue, 2005) FD malzemeler elde edilebilmektedir.

3.3. Kiriş Teorileri

Eleman türleri kesite, boyuta, kullanılan malzemeye ve yapım aşamalarına göre isimlendirilebileceği gibi elemanın hangi kuvvet etkileri altında olduğuna bağlı da kategorize edilebilir. Çerçeve sistemlerde eksenel yük etkisinde olan elemanlara kolon, eğilme momenti etkisinde olan elemanlara kiriş, her iki kuvvet etkisinde olan elemanlara ise kiriş-kolon eleman denilmektedir. Yük etkisi altında bulunan bu yapıların davranışının belirlenebilmesi için çubuk elemanların yükleme altında nasıl deformasyonlar yapacağını bilmesi önemlidir.

Yapı sistemlerindeki bu elemanların davranışlarının belirlenmesi için araştırmacılar birçok kiriş teorisi geliştirmişlerdir. Ortaya konulan kiriş teorileri hassasiyetleri ve çeşitli etkileri göz önüne alabilmeleri sebebiyle farklı kriterler göz önüne alınarak kullanılmaktadır. Bu çalışma kapsamında EKT ve TKT'ye uygun olarak modellenen kolonların burkulma davranışı araştırılmaktadır.

3.3.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

EKT, eksenel kuvvet ve eğilme momenti altındaki kirişlerin davranışını açıklayan en temel kiriş modellerinden birisidir. Bu teorinin iki temel varsayımı vardır. Bunlardan birisi eğilme etkisinde çubuk eksenine dik düzlem kesitlerin düzlem kalmaya devam etmesiyle diğeri kiriş eğiminin küçük değerlerde olduğudur. Çubuk eksenine dik olan kesitler, yükleme sonrası şekil değiştirmiş eksene dik kalırlar.

Bu varsayım gereği çubukta kesme kuvvetinden kaynaklanan deformasyonlar dikkate alınmadığından kayma açısı sıfır olur. Narin elemanlarda iyi sonuçlar veren bu teori uygulamada sıklıkla kullanılmaktadır.

3.3.1.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi Uygunluk Koşulları

Elemanın şekil değiştirmelerini ifade eden ötelenme $u(x)$ ve dönme $\theta(x)$ vektörleri birbirlerine uygunluk koşulları denilen diferansiyel denklemlerle bağlıdır.

Eksenel yer değiştirme u , çökme w ve kesit dönmesi θ olmak üzere EKT’de kullanılan bağıntılar Eşitlik 3.1-3.4’de verilmiştir.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (3.1)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (3.2)$$

$$\theta = -\frac{dw}{dx} \quad (3.3)$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.4)$$

Burada ε_x eksenel uzama oranı, γ_{xz} kayma açısı, κ ise eğriliği ifade etmektedir.

3.3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi

EKT’de kayma açısı ihmal edilirken, TKT’de kayma açısı sabit bir değer varsayılır (Omurtag, 2010). Her iki kiriş teorisi de kirişin enine kesitinin kendi düzleminde rijit bir levha gibi olduğunu kabul eder. Bu sebeple çubuk elemanın davranışı ötelenme ve dönme olarak iki vektörle ifade edilir. Narin kirişler için EKT ile benzer sonuçlar sunan TKT, kayma deformasyonlarının etkisinin arttığı yüksek kirişlerde diğer teoriye kıyasla gerçeğe daha yakın sonuçlar vermektedir.

3.3.2.1. Timoshenko Kiriş Teorisi Uygunluk Koşulları

EKT’den farklı olarak γ_{xz} değeri TKT’de sabit varsayılmaktadır. Buna bağlı olarak TKT’de kullanılan bağıntılar Eşitlik 3.5-3.7’de verilmiştir.

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \theta \quad (3.6)$$

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} \quad (3.7)$$

3.4. Stabilité

Mühendislik tasarımında yapıların emniyeti sağlanmalıdır. Dış yükler altında bulunan bir sistemde iki farklı kontrol yapılmalıdır. İlki, yük etkisi altındaki elemanların kesitlerinde meydana gelen gerilmelerin emniyet gerilmelerine ne kadar yakın olduğudur. Eğer oluşan en büyük gerilme o eleman için belirlenen emniyet gerilmesini aşmış ise sistem artık güvensizdir. Diğer bir kontrol ise, elemanın denge konumunun kararlı olup olmamasıyla ilgilidir. Bir sistem kararlı değilse en ufak bir etkiyle denge konumundan sapacaktır ve eleman kesitinde oluşan gerilmeler emniyet gerilmesi değerlerine ulaşmasa bile sistem tamamen çökecektir. Bu gibi denge problemlerin araştırıldığı konulara kısaca stabilite problemleri denilmektedir.

Her iki problemde yapının emniyetini ilgilendirmektedir. Ancak gerilme ve stabilite probleminde rol oynayan faktörler birbirinden farklıdır. Gerilme probleminde önemli olan kesitteki gerilmelerin şiddetiyken, stabilite probleminde denge konumunun kararlılığı önemlidir (İnan, 2001).

Stabilite problemlerinin incelenmesi, malzeme teknolojisinin gelişmesiyle beraber yüksek mukavemetli elemanların yapılarda kullanılması sonucunda daha çok önem kazanmıştır.

Bazı sistemler denge konumundan biraz ayrıldığında sistemi denge konumuna geri getirmeye çalışan bir mekanizma oluşmaktadır. Bu mekanizmaya geri çağırıcı kuvvet denilmektedir (Bakioğlu, 2001). Geri çağırıcı kuvvet ile birlikte sistem salınım hareketi gerçekleştirerek sönüm yapar ve tekrar denge konumuna gelir. Bu tip denge konumuna kararlı denge denilmektedir. Geri çağırıcı kuvvetin olmadığı, denge halinden ufak bir ayrılmayla tekrar denge konumuna dönemeyen ve hızla denge konumundan daha da uzaklaşan hallere kararsız denge denilmektedir. Sistem dengedeyken, denge şartının bozulduğu anda sistemin yeni bir denge konumuna geçmesine ise farksız denge denilmektedir. Bu üç halin şematik gösterimi Şekil 3.1’de verilmiştir.



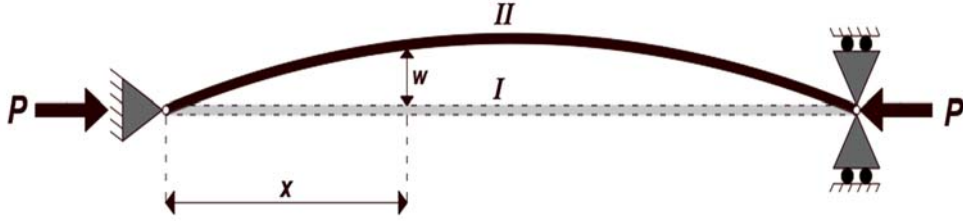
Şekil 3.1. Denge konumları

Stabilite plak, kemer, kabuk, çerçeve ve kolon-kiriş gibi yapı elemanlarında analizi yapılması gereken bir tasarım problemidir. Ağırlıklı olarak eksenel basınç kuvveti altındaki kolon elemanların burkulma davranışının bilinmesi çerçeve sistemlerde önem kazanmaktadır.

3.4.1. İki Ucu Mafsallı Kolonun Burkulması

Kolon, taşıyıcı sistemlerde eksenel basınç kuvveti etkisindeki yapı elemanlarına verilen isimdir. Eksenel yük etkisi altında kesitte oluşan en büyük gerilmelerin emniyet gerilmelerini geçmemesi amaçlanırken aynı zamanda elemanın bu yük altında denge konumunu koruması istenmektedir.

Şekil 3.2’de, burkulma davranışını daha kolay anlaşılabilmesi için eksen boyunca sabit eğilme rijitliğine sahip iki ucu mafsallı kolonun eksenel P yükü altında burkulması gösterilmiştir.



Şekil 3.2. İki ucu mafsallı kolonun burkulması

I doğru halinin kararlılığı denge metodu ile araştırılırsa, I halinin çok yakınlarında, II ile gösterilen başka bir denge konumunun bulunduğu görülecektir. Kolonun doğru halini farksız denge kabul edersek, II hali her P yükü için meydana gelmemektedir. II denge konumu kolonun düşey deplasmanı ile belirlenirse, kolonun seçilen bir kesitindeki eğilme momenti Pw olacağından, II denge konumunun elastik eğri denklemi Eşitlik 3.8’deki gibi elde edilir.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{Pw}{EI} \quad (3.8)$$

$$\frac{P}{EI} = \lambda^2 \text{ dönüşümü yapılırsa Eşitlik 3.8, Eşitlik 3.9 halini alır.}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda^2 w = 0 \quad (3.9)$$

Diferansiyel denklemin çözümünde integrasyon sabitlerinin bulunabilmesi için mafsallı uçlardaki $w(0) = w(L) = 0$ sınır şartları kullanılmalıdır. Denklemden ve sınır şartlarından, problemin homojen sınır koşullarından oluşan homojen bir diferansiyel denklem oluştuğu görülmektedir. Bu denklemin aşikâr (bilinen) olarak isimlendirilen çözümü $w(x) = 0$ yani I nolu denge konumuna karşılık gelir.

Eşitlik 3.10'da diferansiyel denklemin çözümü verilmiştir. Bu diferansiyel denklemin $w(x) = 0$ çözümünden başka bir çözümü daha vardır.

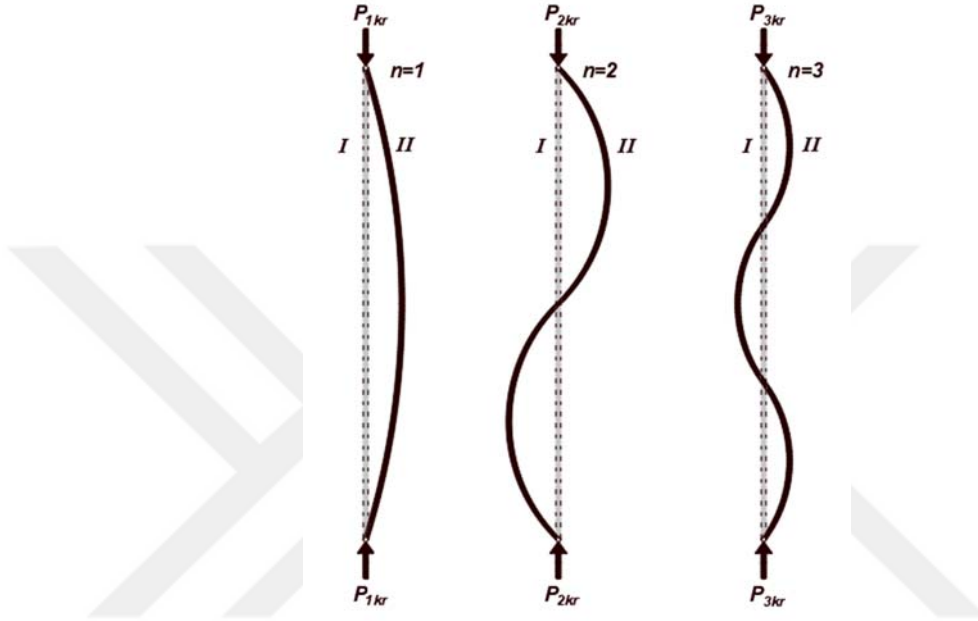
$$w(\lambda x) = S_1 \sin(\lambda x) + S_2 \cos(\lambda x) \quad (3.10)$$

Eşitlik (3.10)'da verilen çözüm için sınır şartları kullanılarak integrasyon sabitleri bulunabilir. İki ucu mafsallı kolonun $w(0) = 0$ şartından $S_2 = 0$ olarak bulunur. $w(L) = 0$ şartından ise $S_1 \sin(\lambda x) = 0$ elde edilir. Burada $S_1 = 0$ hali I nolu duruma karşılık geleceğinden, $\sin(\lambda x) = 0$ koşulu kullanılarak kritik burkulma yükü P_{nkr} , Eşitlik 3.11'de verildiği gibi bulunur.

$$P_{nkr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, \quad n=1,2,\dots \quad (3.11)$$

Eşitlik 3.11'den görülebileceği gibi n değerine bağlı olarak sonsuz sayıda kritik burkulma yükü vardır. Sistemde $n = 1$ için karşılık gelen burkulma yükü P_{1kr} ile gösterilirse, $P_{1kr} > P$ durumunda I nolu denge konumu kararlı denge, $P_{1kr} = P$ durumunda farksız denge, $P_{1kr} < P$ durumunda ise kararsız denge konumundadır.

$n = 1, 2, 3$ değerleri için iki ucu mafsallı kolonun S_1 integrasyon sabitine bağlı kritik burkulma yüklerine ait mod şekilleri, Şekil 3.3’de verilmiştir.



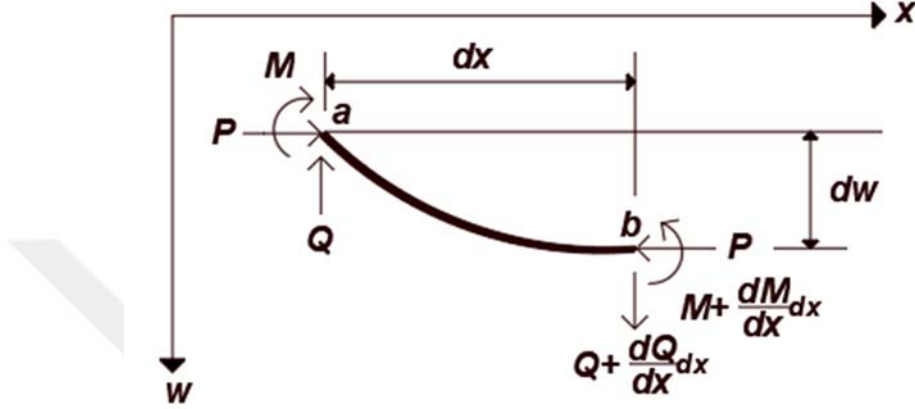
Şekil 3.3. İki ucu mafsallı kolonun burkulma mod şekilleri

3.4.2. Doğru Eksenli Elastik Kolonların Genel Teorisi

Önceki bölümde, iki ucu mafsallı ve kolon eksenli boyunca sabit eğilme rijitliğine sahip kolonun burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem elde edilmiştir. Bu bölümde, kolon boyunca eğilme rijitliğinin ve farklı mesnet şartlarının problem üzerinde genelleştirilmiş hali araştırılacaktır.

Eksenel P basınç kuvveti etkisinde bulunan doğru eksenli ancak değişken eğilme rijitliğine sahip çubuk şeklindeki gibi ele alınsın. Çubuk uçlarındaki mesnetlenme şartlarından bağımsız olarak denge denklemleri yardımıyla burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem elde edilebilir.

Şekilde 3.4’de gösterilen kolonun sonsuz küçük parçasının serbest cisim diyagramı üzerinde P iç kuvvetlerin yatay bileşenini, M eğilme momentini, Q iç kuvvetlerin düşey bileşenini göstermektedir.



Şekil 3.4. Eksenel yük altındaki kolonun serbest cisim diyagramı

a kesitinde P, Q, M ile gösterilen kesit tesirleri, sonsuz küçük mesafe uzaklıktaki b kesitinde eğer sistemde dış yük bulunmazsa P, Q, M+dM şeklinde olur. b kesitinde moment dengesi yazılacak olursa Eşitlik 3.12 elde edilir. Eşitlik 3.12 kullanılarak Eşitlik 3.13 yazılabilir.

$$M + \Delta M - M - P\Delta w - Q\Delta x = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q + P \frac{dw}{dx} \quad (3.13)$$

Eşitlik 3.12 ve Eşitlik 3.13’de moment-eğrilik ifadesi $M = EI \frac{d^2 w}{dx^2}$ yazılırsa, Q Eşitlik 3.14’de verildiği gibi yazılabilir. Eşitliğin tekrar türevi alınırsa Q ifadesi yok olur ve burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem, Eşitlik 3.15’deki gibi elde edilir.

$$Q = -[(EIw'')' + Pw'] \quad (3.14)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.15)$$

Burada $(.)' = \frac{d(.)}{dx}$, $(.)'' = \frac{d^2(.)}{dx^2}$, $(.)''' = \frac{d^3(.)}{dx^3}$ şeklindedir.

3.4.3. Eksenel Yönde FD Malzemeli Kolonların Burkulma Davranışı

TKT'ye dayalı olarak modellenen eksenel yönde FD kolonların burkulma davranışı yöneten girişimli diferansiyel denklemler, Eşitlik 3.16 ve Eşitlik 3.17'de verilmiştir (Huang ve ark, 2016).

$$\frac{d}{dx} \left(E(x)I(x) \frac{d\theta}{dx} \right) + k_s G(x)A(x) \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dx} \left(k_s G(x)A(x) \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \right) - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.17)$$

Burada k_s , kesit geometrisine bağlı kayma düzeltme katsayısını, $E(x), G(x), I(x), A(x)$ ise sırayla elastisite modülünün, kayma modülünün, kesit atalet momentinin ve kesit alanının kolon boyunca değişimini göstermektedir.

Burkulma yüklerinin elde edilmesi için Eşitlik 3.16 ve Eşitlik 3.17'nin istenilen sınır koşullarında çözülmesi gereklidir. Bu tarz karmaşık diferansiyel denklemlerin kapalı çözümünü bulmak zor olmakla birlikte sadece bazı haller için analitik sonuçlar elde edilebilmektedir. TFY'nin uygulanabilmesi için Eşitlik 3.16 ve Eşitlik 3.17 kullanılarak burkulma davranışı yöneten diferansiyel denklemler Eşitlik 3.18 ve Eşitlik 3.19'daki gibi elde edilebilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\bar{K}(x) \frac{d\theta}{dx} \right) + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\bar{G}(x) \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) \right) - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.19)$$

Burada; $\bar{K}(x) = E(x)I(x)$, $\bar{G}(x) = k_s G(x)A(x)$ 'i ifade etmektedir.

Davranışı yöneten diferansiyel denklem takımının tek bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülmesi için Eşitlik 3.20'de verilen $D(x)$ yardımcı fonksiyonu kullanılırsa, Eşitlik 3.19'dan dönme ifadesi θ , Eşitlik 3.21'deki gibi elde edilir.

$$w = D(x) \quad (3.20)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right) \frac{dD(x)}{dx} \quad (3.21)$$

Eşitlik 3.20 ve Eşitlik 3.21, Eşitlik 3.18'de yerine yazılırsa Eksenel yönde FD malzemeli kolonun burkulma davranışını yöneten değişken katsayılı diferansiyel denklem Eşitlik 3.22'de verildiği gibi elde edilebilir.

$$J_4(x) \frac{d^4 D}{dx^4} + J_3(x) \frac{d^3 D}{dx^3} + J_2(x) \frac{d^2 D}{dx^2} + J_1(x) \frac{dD}{dx} = 0 \quad (3.22)$$

Burada;

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \bar{K}(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right)''' + 2\bar{K}'(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right)'' + \bar{K}''(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right)' \\ J_2(x) &= 3\bar{K}(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right)'' + 4\bar{K}'(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right)' + \bar{K}''(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right) + P \\ J_3(x) &= 3\bar{K}(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right)' + 2\bar{K}'(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right) \\ J_4(x) &= \bar{K}(x) \left(1 - \frac{P}{\bar{G}(x)} \right) \end{aligned}$$

Eşitlik 3.22’de FD malzemeli kolonların burkulma davranışını yöneten değişken katsayılı homojen diferansiyel denklem görülmektedir. Yönetici diferansiyel denklem homojen olduğundan, burkulma yüklerinin TFY yardımıyla elde edilmesinde homojen olmayan çözümün yapılması gerekmemektedir.

Eşitlik 3.22’de verilen 4. mertebeden diferansiyel denklemin TFY’nin kullanılabileceği şekilde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımına dönüştürebilmek amacıyla Eşitlik 3.23’de verilen yeni bir tarif oluşturulur.

$$D = t_1 \quad (3.23.a)$$

$$D' = t_2 \quad (3.23.b)$$

$$D'' = t_3 \quad (3.23.c)$$

$$D''' = t_4 \quad (3.23.d)$$

Eşitlik 3.23’de verilen yeni tarifler ve Eşitlik 3.22’de verilen diferansiyel denklem kullanılarak Eşitlik 3.24’de verilen diferansiyel denklem takımı bu çalışmada elde edilmiştir.

$$t_1' = t_2 \quad (3.24.a)$$

$$t_2' = t_3 \quad (3.24.b)$$

$$t_3' = t_4 \quad (3.24.c)$$

$$t_4' = \frac{-(J_3(x)t_4 + J_2(x)t_3 + J_1(x)t_2)}{J_4(x)} \quad (3.24.d)$$

Eşitlik 3.24’de verilen davranışı yöneten diferansiyel denklem takımı farklı sınır koşulları için çözülebilir. Bir çubuk elemanda en sık karşılaşılan mesnetlenme durumlarına ait sınır koşulları, elemanın w ve θ değerine bağlı;

Mafsallı Uç (M) ; $w = 0, \frac{d\theta}{dx} = 0$

Ankastre Uç (A) ; $w = 0, \theta = 0$

Serbest Uç (Se) ; $\frac{d\theta}{dx} = 0, \frac{d}{dx} \left(\bar{K}(x) \frac{d\theta}{dx} \right) + P \frac{dw}{dx} = 0$ olarak ifade edilebilir.

Homojen-izotrop malzemeli bir kolon için, $\bar{K}(x) = EI$ ve $\bar{G}(x) = k_s GA$ olarak sabit alınırsa burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem Eşitlik 3.25'deki gibi yazılabilir.

$$EI \left(1 - \frac{P}{k_s GA} \right) \frac{d^4 D}{dx^4} + P \frac{d^2 D}{dx^2} = 0 \quad (3.25)$$

Eşitlik 3.23'de verilen yeni tarif, Eşitlik 3.25'de verilen 4. mertebeden diferansiyel denklemde de kullanılabilir. Eşitlik 3.26'da TKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop kolonun burkulma davranışını yöneten birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı verilmiştir.

$$t_1' = t_2 \quad (3.26.a)$$

$$t_2' = t_3 \quad (3.26.b)$$

$$t_3' = t_4 \quad (3.26.c)$$

$$t_4' = \frac{-Pt_3}{EI \left(1 - \frac{P}{k_s GA} \right)} \quad (3.26.d)$$

TKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop kolonun burkulma davranışını yöneten Eşitlik 3.25'de verilen diferansiyel denklemde $k_s GA$ ifadesi sonsuz

alınırsa, EKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop kolonun burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem Eşitlik 3.27'de verildiği gibi elde edilir.

$$EI \frac{d^4 D}{dx^4} + P \frac{d^2 D}{dx^2} = 0 \quad (3.27)$$

Eşitlik 3.27'de verilen yönetici diferansiyel denklem, Eşitlik 3.23'de verilen yeni tarif kullanılarak Eşitlik 3.28'de verilen birinci mertebeden diferansiyel denklem takımı elde edilebilir.

$$t_1' = t_2 \quad (3.28.a)$$

$$t_2' = t_3 \quad (3.28.b)$$

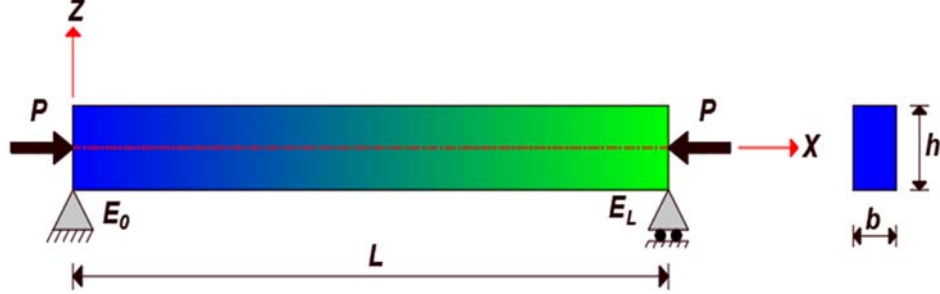
$$t_3' = t_4 \quad (3.28.c)$$

$$t_4' = \frac{-Pt_3}{EI} \quad (3.28.d)$$

3.4.3.1 Eksenel Yönde FD Malzemeli Kolonların Denge Denklemleri Yardımıyla Burkulma Davranışının Elde Edilmesi

Burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklem takımı, iç kuvvet-şekil değiştirme ilişkisinden ve serbest cisim diyagramı üzerinden yazılan denge denklemlerinden elde edilmiştir.

Şekil 3.5'de görünen TKT'ye dayalı modellenen dikdörtgen kesitli FD kolon için eğilme momentinin kolon boyunca değişimi Eşitlik 3.29'da verildiği gibi yazılabilir. θ 'nın kolon boyunca değişimiye Eşitlik 3.21'den yararlanılarak Eşitlik 3.30'daki gibi ifade edilebilir.



Şekil 3.5. Eksenel yönde FD malzemeli dikdörtgen kesitli kolon

$$M = -E(x)I \frac{d\theta}{dx} \quad (3.29)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{P}{k_s G(x)A} \right) \frac{dw}{dx} \quad (3.30)$$

Sadece eksenel basınç kuvveti altındaki kolonun, kesme kuvveti ve eğilme momentinde gerçekleşen değişimler Şekil 3.4’de verilen serbest cisim diyagramı üzerinden yazılabilir. Serbest cisim diyagramında yazılacak kuvvet ve moment dengesi yardımıyla kolon boyunca kesme kuvveti ve eğilme momentindeki değişimler Eşitlik 3.31 ve 3.32’de verildiği gibi elde edilir (Chen ve Lui, 1987).

$$M' = Q + Pw' \quad (3.31)$$

$$Q' = 0 \quad (3.32)$$

Elde edilen denklemler kullanılarak burkulma davranışını yöneten adi diferansiyel denklem takımı Eşitlik 3.33’de bu çalışmada verildiği gibi elde edilebilir.

$$\frac{dw}{dx} = \left(\frac{k_s G(x)A}{k_s G(x)A - P} \right) \theta \quad (3.33.a)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{E(x)I} \quad (3.33.b)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (3.33.c)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q + P \left(\frac{k_s G(x) A}{k_s G(x) A - P} \right) \theta \quad (3.33.d)$$

Eşitlik 3.33’de verilen TKT’ye dayalı modellenen eksenel yönde FD kolonun burkulma davranışını yöneten denklem takımında, kayma rijitliği $k_s G(x) A(x)$ ifadesi sonsuz alınırsa denklem takımı Eşitlik 3.34’de verilen denklem takımına dönüşmektedir.

$$\frac{dw}{dx} = \theta \quad (3.34.a)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{E(x)I} \quad (3.34.b)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (3.34.c)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q + P\theta \quad (3.34.d)$$

Eşitlik 3.34’de verilen diferansiyel denklem takımı EKT’ye dayalı modellenen FD malzemeli kolonların burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımını göstermektedir.

Davranışı yöneten diferansiyel denklem farklı sınır koşullarında çözülebilir. Denge denklemleri yardımıyla elde edilen diferansiyel denklem takımı mafsallı, ankastre ve serbest uç halindeki mesnetlenme şartları için çözülebilir. Bu mesnetlenme durumlarına ait sınır koşulları

Mafsallı Uç (M); $w = 0, M = 0$

Ankastre Uç (A); $w = 0, \theta = 0$

Serbest Uç (Se); $Q = 0, M = 0$ şeklindedir.

Yukarıda verilen sınır koşulları sadece eksenel basınç kuvveti altındaki elemanlar için elde edilmiştir. Mafsallı uçta düşey deplasman ve eğilme momentinin, ankastre uçta düşey deplasman ve dönmenin, sadece eksenel basınç kuvvetinin bulunduğu serbest uçta ise kesme kuvveti ve eğilme momentinin oluşmayacağı görülmektedir.

3.5. Çözüm Yöntemi

Eksenel yönde FD kolonların burkulma davranışını yöneten lineer sınır değer probleminin çözümünde TFY kullanılmıştır. TFY'nin uygulanabileceği kanonik formda elde edilen burkulma davranışını yöneten sınır değer problemi, TFY'nin çözüm prensibi gereği başlangıç değer problemine dönüştürülmüştür. Başlangıç değer problemleri RK4 ve RK5 algoritmaları ile çözülmüştür.

Çözümü yapılan kolonun burkulma yükleri, mesnetlenme şartları dikkate alınarak elde edilmiştir. Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem homojen olduğundan, diferansiyel denklem takımının homojen çözümünden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerlerden kritik burkulma yükleri bulunmuştur. Kritik burkulma yükleri olan bu kök değerleri iteratif olarak Secant metoduyla elde edilmiştir. Bu çalışmada, Secant metodunda en fazla 30 iterasyon yapılmıştır. Çizelgelerde * işareti maksimum iterasyonun aşıldığını ifade etmektedir.

3.5.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi

TFY, analitik çözümü mümkün olmayan veya çok karmaşık olan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir sayısal yöntemdir. Lineer sınır

değer problemlerinin çözümünde uygulanan bu yöntem, sınır değer problemini başlangıç değer problemine dönüştürme prensibine dayanmaktadır (Mengi, 1993).

Başlangıç değer problemine dönüştürülen yönetici denklem takımı, TFY gereği homojen ve homojen olmayan denklem takımı olarak iki kısımda çözülür. Diferansiyel denklemin başlangıç koşulları TFY gereği her problem için sabit alınmaktadır.

Başlangıç değer probleminin çözümünde probleme uygun olarak seçilen sayısal bir yöntem kullanılabilir.

Eşitlik 3.35’de $x=a$ ve $x=b$ çözüm aralığında, n . mertebeden bir sınır değer problemine ait lineer adi diferansiyel denklem operatörünün açılımı verilmiştir.

$$F = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \quad (3.35)$$

Burada; y bağımlı değişkeni, x bağımsız değişkeni, $a_0, \dots, a_n$ x ’e bağlı olabilecek katsayıları göstermektedir.

Çözüm için n . mertebeden diferansiyel denklem, n adet birinci mertebeden adi diferansiyel denklemden oluşan diferansiyel denklem takımına dönüştürülür. Elde edilen denklem takımı bir adet homojen olmayan ve n adet homojen olan başlangıç değer problemi olarak çözülür. Diferansiyel denklemin genel çözümü olan $y(x)$, Eşitlik 3.36’da verildiği gibi yazılır.

$$y(x) = y_0(x) + b_1 y_1(x) + \dots + b_n y_n(x) \quad (3.36)$$

Burada; $y_0(x)$ homojen olmayan çözümü, $y_1(x), \dots, y_n(x)$ homojen çözümleri, $b_1, \dots, b_n$ ifadeleri ise integrasyon sabitlerini göstermektedir.

$y_0(x)$ homojen olmayan çözümü ve $y_1(x), \dots, y_n(x)$ homojen çözümleri için $x=a$ başlangıç noktasında problemten bağımsız olarak TFY gereği Çizelge 3.1’de verilen başlangıç koşulları kullanılmaktadır. Burada; $T(x)$ kuvvet fonksiyonunu göstermektedir.

Çizelge 3.1. TFY’nin başlangıç koşulları

	$y_0(x)$ $F(y)=T(x)$	$y_1(x)$ $F(y)=0$	$y_2(x)$ $F(y)=0$	...	$y_n(x)$ $F(y)=0$
$y(a)$	0	1	0	...	0
$y'(a)$	0	0	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	...	$\vdots$
$y^{n-2}(a)$	0	0	$\vdots$	...	0
$y^{n-1}(a)$	0	0	0	...	1

İntegrasyon sabitleri ise $x=a$ ve $x=b$ noktalarında verilmiş olan problemin gerçek sınır şartları dikkate alınarak, Eşitlik 3.36’da verilen genel çözüm kullanılarak bulunmaktadır. Diferansiyel denklem homojen olduğundan, burkulma yüklerinin TFY yardımıyla elde edilmesinde homojen olmayan çözümün yapılması gerekmemektedir.

3.5.2. Runge-Kutta Metotları

Runge-Kutta metodu adi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanılan bu yöntem diferansiyel denklem takımlarının analizinde de kullanılabilir (Chapra ve Canale, 2011).

3.5.2.1. Dördüncü Mertebe Runge-Kutta Algoritması

Bu bölümde Eşitlik 3.37’de verilen iki adet adi diferansiyel denklemden oluşan diferansiyel denklem takımının RK4 algoritması ile çözümü özetlenmiştir.

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2) \quad (3.37.a)$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2) \quad (3.37.b)$$

Denklem takımının başlangıç koşulları ise Eşitlik 3.38’de verilmiştir.

$$y_1(x_0) = y_1(0), \quad y_2(x_0) = y_2(0) \quad (3.38)$$

Başlangıç koşulları Eşitlik 3.38’de verilen adi diferansiyel denklem takımı için kullanılan RK4 algoritması Eşitlik 3.39’da verilmiştir.

$$y_1(i+1) = y_1(i) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.39.a)$$

$$y_2(i+1) = y_2(i) + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) \quad (3.39.b)$$

Burada;

$$k_1 = hf_1(x_i, y_{1i}, y_{2i})$$

$$r_1 = hf_2(x_i, y_{1i}, y_{2i})$$

$$k_2 = hf_1(x_i + h/2, y_{1i} + k_1/2, y_{2i} + r_1/2)$$

$$r_2 = hf_2(x_i + h/2, y_{1i} + k_1/2, y_{2i} + r_1/2)$$

$$k_3 = hf_1(x_i + h/2, y_{1i} + k_2/2, y_{2i} + r_2/2)$$

$$r_3 = hf_2(x_i + h/2, y_{1i} + k_2/2, y_{2i} + r_2/2)$$

$$k_4 = hf_1(x_i + h, y_{li} + k_3, y_{2i} + r_3)$$

$$r_4 = hf_2(x_i + h, y_{li} + k_3, y_{2i} + r_3)$$

Yukarıdaki ifadelerde h, integrasyon adım aralığını göstermektedir.

3.5.2.2. Beşinci Mertebe Runge-Kutta Algoritması

Eşitlik 3.38’de başlangıç koşulları verilen Eşitlik 3.37’deki diferansiyel denklem takımının RK5 algoritmasıyla çözümü Eşitlik 3.40’da verildiği gibidir.

$$y_1(i+1) = y_1(i) + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h \quad (3.40.a)$$

$$y_2(i+1) = y_2(i) + \frac{1}{90}(7r_1 + 32r_3 + 12r_4 + 32r_5 + 7r_6)h \quad (3.40.b)$$

Burada;

$$k_1 = f_1(x_i, y_{li}, y_{2i})$$

$$r_1 = f_2(x_i, y_{li}, y_{2i})$$

$$k_2 = f_1(x_i + \frac{1}{4}h, y_{li} + \frac{1}{4}k_1h, y_{2i} + \frac{1}{4}r_1h)$$

$$r_2 = f_2(x_i + \frac{1}{4}h, y_{li} + \frac{1}{4}k_1h, y_{2i} + \frac{1}{4}r_1h)$$

$$k_3 = f_1(x_i + \frac{1}{4}h, y_{li} + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h, y_{2i} + \frac{1}{8}r_1h + \frac{1}{8}r_2h)$$

$$r_3 = f_2(x_i + \frac{1}{4}h, y_{li} + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h, y_{2i} + \frac{1}{8}r_1h + \frac{1}{8}r_2h)$$

$$k_4 = f_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_{li} - \frac{1}{2}k_2h + k_3h, y_{2i} - \frac{1}{2}r_2h + r_3h)$$

$$r_4 = f_2(x_i + \frac{1}{2}h, y_{li} - \frac{1}{2}k_2h + k_3h, y_{2i} - \frac{1}{2}r_2h + r_3h)$$

$$k_5 = f_1(x_i + \frac{3}{4}h, y_{li} + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h, y_{2i} + \frac{3}{16}r_1h + \frac{9}{16}r_4h)$$

$$r_5 = f_2(x_i + \frac{3}{4}h, y_{li} + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h, y_{2i} + \frac{3}{16}r_1h + \frac{9}{16}r_4h)$$

$$k_6 = f_1(x_i + h, y_{li} - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h, y_{2i} - \frac{3}{7}r_1h + \frac{2}{7}r_2h + \frac{12}{7}r_3h - \frac{12}{7}r_4h + \frac{8}{7}r_5h)$$

$$r_6 = f_2(x_i + h, y_{li} - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h, y_{2i} - \frac{3}{7}r_1h + \frac{2}{7}r_2h + \frac{12}{7}r_3h - \frac{12}{7}r_4h + \frac{8}{7}r_5h)$$

Yukarıdaki ifadelerde h, integrasyon adım aralığını göstermektedir.

3.5.3. Secant Yöntemi

Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımının homojen çözümünden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerler burkulma yüklerini vermektedir. Kolonların kritik burkulma yüklerini veren bu kök değerlerin bulunmasında fonksiyonun türevine ihtiyaç duyan Newton-Raphson yöntemi uygulanamamaktadır. Bu değerlerin bulunması için Secant yöntemi kullanılacaktır.

Doğrusal olmayan denklem çözüm yöntemleri arasında olan Secant Yöntemi, türev almanın çok zor olduğu veya mümkün olmadığı durumlarda sıklıkla yararlanılan bir sayısal çözümleme yöntemidir.

Eşitlik 3.41'de Secant yönteminin denklemi verilmiştir.

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} \right) y_i \quad (3.41)$$

Burada; x_i ve x_{i-1} iki adet başlangıç noktasını ifade ederken, x_{i+1} bu iki başlangıç noktasına göre iteratif olarak bulunan noktayı ifade etmektedir. İterasyon işlemi istenilen tolerans sağlandığından sonlandırılabilir. Tolerans değeri Eşitlik 3.42'deki gibi gösterilebilir.

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \text{tolerans} \quad (3.42)$$

Eşitlik 3.42'de verilen şartı sağlayan x_{i+1} değeri burkulma yükünü vermektedir. Eğer şart sağlanmamışsa $x_i = x_{i-1}$ ve $x_{i+1} = x_i$ alınarak tolerans değeri sağlanana kadar iterasyon devam ettirilir ve kök değeri bulunur. Yöntemin kök değerine yakınsamama ihtimaline karşı, yapılacak iterasyon sayısı sınırlandırılabilir.



4. SAYISAL UYGULAMALAR

4.1. Giriş

Bu bölümde eksenel basınç kuvveti altında bulunan kolonların kritik burkulma yükleri araştırılmıştır. Uygulanan yöntemin etkinliğini göstermek amacıyla elde edilen burkulma yükleri, literatürde bulunan mevcut sonuçlar ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. TFY sınır değer problemini başlangıç değer problemine dönüştürme prensibine dayanır. Başlangıç değer problemlerinin sayısal çözümünde RK4 ve RK5 algoritmaları kullanılacaktır. Her iki algoritma kullanılarak elde edilen sonuçlar çalışmada sunulmuştur.

Uygulanan yöntemin, malzeme değişim fonksiyonlarının, kesit özelliklerinin, kiriş teorilerinin ve sınır koşullarının burkulma yükü üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

4.2. Homojen-İzotrop Kolonların Burkulma Analizi

Bu bölümde EKT ve TKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop malzemeli kolonların burkulma yükleri TFY kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen burkulma yükleri literatürde verilen kesin sonuçlar (Wang ve ark, 2005) ile karşılaştırılmış ve uygulanan yöntemin etkinliği homojen-izotrop malzemeli kolonlar üzerinde gösterilmiştir.

4.2.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Homojen İzotrop Kolonların Burkulma Analizi

Elde edilen denklem takımlarının ve uygulanan yöntemin uygunluğunun, etkinliğinin ve yakınsamasının test edilebilmesi amacıyla verilen homojen-izotrop malzemeli kolonun farklı sınır koşullarındaki kritik burkulma yükleri araştırılmıştır. Bulunan sonuçlar literatürde bulunan kesin sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Araştırılan kolona ait kesit ve malzeme özellikleri Eşitlik 4.1’de verilmiştir.

$$r = \frac{I}{AL^2} = 0,01 \quad E(x) = E \quad (4.1)$$

Eşitlik 4.1’de verilen özelliklere sahip kolonun burkulma yükü, boyutsuz olarak Eşitlik 4.2’deki gibi elde edilmiştir.

$$\bar{P}_{nkr} = \frac{P_{nkr} L^2}{EI} \quad (4.2)$$

P_{nkr} kritik burkulma yükü, ilgili denklem takımının homojen çözümünün katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan P değerleridir. Bu burkulma yükleri Eşitlik 3.28 ve Eşitlik 3.34’de verilen burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımları için TFY kullanılarak elde edilecektir.

Eşitlik 3.28’de verilen burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımı, EKT’ye dayalı modellenen kolonun burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımıdır.

Eşitlik 3.28’de verilmiş olan burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımı RK4 ve RK5 algoritmaları yardımıyla TFY ile çözülmüştür. RK4 algoritması kullanılarak elde edilen en küçük burkulma yükleri boyutsuz olarak Çizelge 4.1’de verilmiştir. Çizelge 4.2’de ise RK5 algoritması kullanılarak elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri verilmiştir.

Burada $\% \Delta$ ifadesi TFY ile elde edilen boyutsuz burkulma yükü değerlerinin, kesin sonuçlarla yüzde bağıl farkını göstermektedir. Mühendislik uygulamalarında, yüksek emniyet katsayıları sebebiyle çok hassas sonuçlara genellikle ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu çalışmada, uygulanan sayısal yöntemin etkinliğini göstermek amacıyla boyutsuz burkulma yükleri çok hassas bir biçimde sunulmuştur.

Çizelge 4.1. Eşitlik 3.28’de verilen denklem takımından elde edilen boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK4)

N	Sınır Koşulları							
	A-Se		M-M		A-M		A-A	
	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ
4	2,46833	0,0375	9,91965	0,5071	20,53572	1,7087	40,81016	3,3733
6	2,46759	0,0076	9,88081	0,1136	20,28148	0,4495	40,00535	1,3347
8	2,46746	0,0024	9,87331	0,0375	20,22213	0,1555	39,67890	0,5078
10	2,46743	0,0010	9,87115	0,0157	20,20413	0,0664	39,56746	0,2256
15	2,46741	0,0002	9,86992	0,0032	20,19348	0,0136	39,49744	0,0482
20	2,46740	0,0001	9,86970	0,0010	20,19161	0,0044	39,48461	0,0157
25	2,46740	0,0000	9,86965	0,0004	20,19109	0,0018	39,48098	0,0065
30	2,46740	0,0000	9,86962	0,0002	20,19090	0,0009	39,47966	0,0032
40	2,46740	0,0000	9,86961	0,0001	20,19078	0,0003	39,47881	0,0010
50	2,46740	0,0000	9,86961	0,0000	20,19075	0,0001	39,47858	0,0004
75	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47845	0,0001
100	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47843	0,0000
Kesin	2,46740		9,86960		20,19073		39,47842	

Çizelge 4.2. Eşitlik 3.28’de verilen denklem takımından elde edilen boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK5)

N	Sınır Koşulları							
	A-Se		M-M		A-M		A-A	
	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ
4	2,46739	0,0003	9,86817	0,0145	20,16964	0,1044	39,30568	0,4376
6	2,46740	0,0000	9,86946	0,0014	20,18838	0,0116	39,45105	0,0693
8	2,46740	0,0000	9,86958	0,0003	20,19028	0,0022	39,47269	0,0145
10	2,46740	0,0000	9,86960	0,0001	20,19061	0,0006	39,47681	0,0041
15	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19072	0,0001	39,47827	0,0004
20	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47839	0,0001
25	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47841	0,0000
30	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
40	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
50	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
75	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
100	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
Kesin	2,46740		9,86960		20,19073		39,47842	

Eşitlik 3.34’de verilen FD malzemeli kolonların burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımında $E(x) = E$ sabit alınırsa, denklem takımı homojen-izotrop malzemeli kolonların burkulma davranışını yöneten denklem takımına dönüşür. Bu durumda Eşitlik 3.34’de verilen burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımının farklı sınır koşullarında çözümü TFY yardımıyla yapılmıştır. Kolonların en küçük boyutsuz burkulma yükleri RK4 algoritması kullanılarak farklı N değerlerinde bulunmuştur. Elde edilen boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4.3’de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Eşitlik 3.34’de verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK4)

N	Sınır Koşulları							
	A-Se		M-M		A-M		A-A	
	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ
4	2,46833	0,0375	9,91965	0,5071	20,53572	1,7087	40,81016	3,3733
6	2,46759	0,0076	9,88081	0,1136	20,28148	0,4495	40,00535	1,3347
8	2,46746	0,0024	9,87331	0,0375	20,22213	0,1555	39,67890	0,5078
10	2,46743	0,0010	9,87115	0,0157	20,20413	0,0664	39,56746	0,2256
15	2,46741	0,0002	9,86992	0,0032	20,19348	0,0136	39,49744	0,0482
20	2,46740	0,0001	9,86970	0,0010	20,19161	0,0044	39,48461	0,0157
25	2,46740	0,0000	9,86965	0,0004	20,19109	0,0018	39,48098	0,0065
30	2,46740	0,0000	9,86962	0,0002	20,19090	0,0009	39,47966	0,0032
40	2,46740	0,0000	9,86961	0,0001	20,19078	0,0003	39,47881	0,0010
50	2,46740	0,0000	9,86961	0,0000	20,19075	0,0001	39,47858	0,0004
75	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47845	0,0001
100	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47843	0,0000
Kesin	2,46740		9,86960		20,19073		39,47842	

Çizelge 4.4’de ise Eşitlik 3.34’de sunulan burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımının RK5 algoritması kullanılarak elde edilen en küçük burkulma yükleri boyutsuz olarak verilmiştir.

Çizelge 4.4. Eşitlik 3.34’de verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (EKT, RK5)

N	Sınır Koşulları							
	A-Se		M-M		A-M		A-A	
	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ
4	2,46739	0,0003	9,86817	0,0145	20,16964	0,1044	39,30568	0,4376
6	2,46740	0,0000	9,86946	0,0014	20,18838	0,0116	39,45105	0,0693
8	2,46740	0,0000	9,86958	0,0003	20,19028	0,0022	39,47269	0,0145
10	2,46740	0,0000	9,86960	0,0001	20,19061	0,0006	39,47681	0,0041
15	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19072	0,0001	39,47827	0,0004
20	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47839	0,0001
25	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47841	0,0000
30	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
40	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
50	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
75	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
100	2,46740	0,0000	9,86960	0,0000	20,19073	0,0000	39,47842	0,0000
Kesin	2,46740		9,86960		20,19073		39,47842	

Bu bölümde EKT’ye dayalı modellenen homojen-izotrop kolonların her iki yönetici diferansiyel denklem takımını için TFY ile çözümleri sunulmuştur. Çizelge 4.1, Çizelge 4.2, Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4 incelendiğinde her iki denklem takımının TFY ile çözümlerinden elde edilen burkulma yüklerinin çizelgelerde sunulan hassasiyete göre aynı sonuçları verdiği görülebilir.

N adım aralığı değeri arttıkça yönetici denklemlerden elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin kesin sonuca yakınsadığı görülmektedir.

N değerine bağlı olarak; RK5 algoritmasının kullanıldığı çözücünden elde edilen sonuçlar, RK4 algoritmasının kullanıldığı çözücüye kıyasla analitik sonuca çok daha hızlı yakınsamaktadır.

4.2.2. Timoshenko Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Homojen İzotrop Kolonların Burkulma Analizi

Bu bölümde TKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop kolonların burkulma davranışı araştırılmıştır. TFY ile elde edilen burkulma yükleri literatürde verilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Kolona ait kesit ve malzeme özellikleri Eşitlik 4.3'de verilmiştir.

$$r = \frac{I}{AL^2} = 0,01 \quad E(x) = E \quad \nu = 0,3 \quad k_s = 5/6 \quad L = 1 \text{ m} \quad (4.3)$$

Eşitlik 4.3'de verilen özelliklere sahip kolonun burkulma yükü Eşitlik 4.2'de verildiği gibi boyutsuz olarak elde edilmiştir.

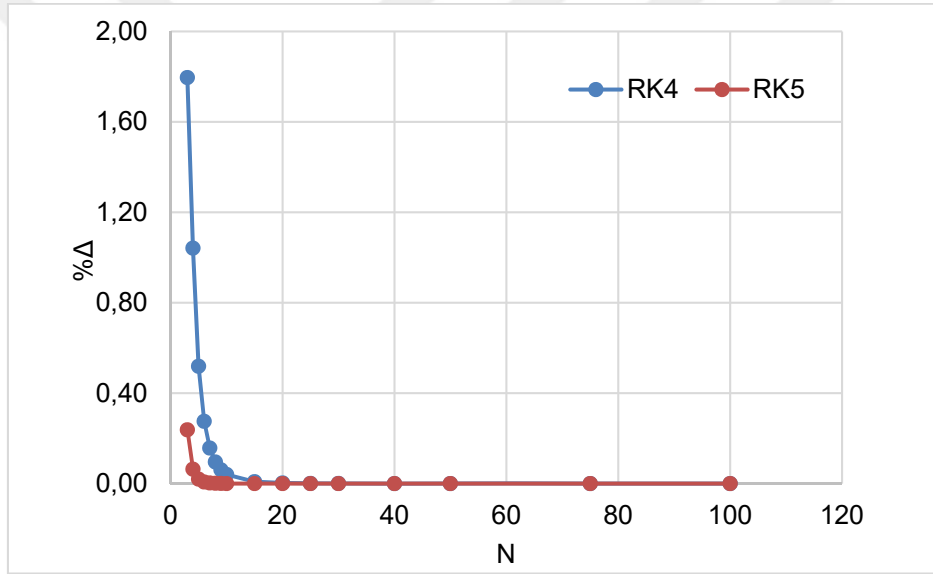
Eşitlik 3.26'da verilen burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımı TFY yardımıyla RK4 ve RK5 algoritmaları kullanılarak çözülmüştür. Farklı sınır koşullarında elde edilen boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4.5'de verilmiştir.

Çizelge 4.5. Eşitlik 3.26'da verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (TKT)

N	Sınır Koşulları							
	A-Se		M-M		A-M		A-A	
	RK4	RK5	RK4	RK5	RK4	RK5	RK4	RK5
4	2,29183	2,29103	7,57518	7,54513	12,51633	12,37939	17,95213	17,65486
6	2,29119	2,29103	7,55251	7,54588	12,42142	12,38644	17,79465	17,68413
8	2,29108	2,29103	7,54813	7,54595	12,39914	12,38715	17,72977	17,68848
10	2,29105	2,29103	7,54687	7,54596	12,39237	12,38728	17,70749	17,68931
15	2,29104	2,29103	7,54615	7,54596	12,38836	12,38732	17,69345	17,68960
20	2,29103	2,29103	7,54602	7,54596	12,38766	12,38732	17,69087	17,68962
25	2,29103	2,29103	7,54599	7,54596	12,38746	12,38732	17,69014	17,68963
30	2,29103	2,29103	7,54597	7,54596	12,38739	12,38732	17,68988	17,68963
40	2,29103	2,29103	7,54597	7,54596	12,38735	12,38732	17,68971	17,68963
50	2,29103	2,29103	7,54596	7,54596	12,38733	12,38732	17,68966	17,68963
75	2,29103	2,29103	7,54596	7,54596	12,38733	12,38732	17,68964	17,68963
100	2,29103	2,29103	7,54596	7,54596	12,38733	12,38732	17,68963	17,68963
Kesin	2,29103		7,54596		12,38732		17,68963	

Çizelge 4.6'da ise Eşitlik 3.33'de verilen yönetici diferansiyel denklem takımında $E(x) = E$ sabit alınarak elde edilen boyutsuz burkulma yükleri verilmiştir. Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6 incelendiğinde her iki diferansiyel denklem takımından elde edilen sonuçların, çizelgelerde sunulan hassasiyette bire bir örtüştüğü görülmektedir.

Şekil 4.1'de A-M sınır koşulunda TKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop kolonun N değerine bağlı olarak elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin analitik çözümlerle $\% \Delta$ farkları verilmiştir.



Şekil 4.1. RK4 ve RK5 algoritmalarının etkinliğinin karşılaştırılması

Bundan sonraki sayısal örneklerde, önceki örneklerde elde edilen sonuçlar ve Şekil 4.1 incelendiğinde daha etkili olduğu görülen RK5 algoritması kullanılmıştır.

Çizelge 4.6. Eşitlik 3.33’de verilen denklem takımından elde edilen en küçük boyutsuz burkulma yükleri (TKT)

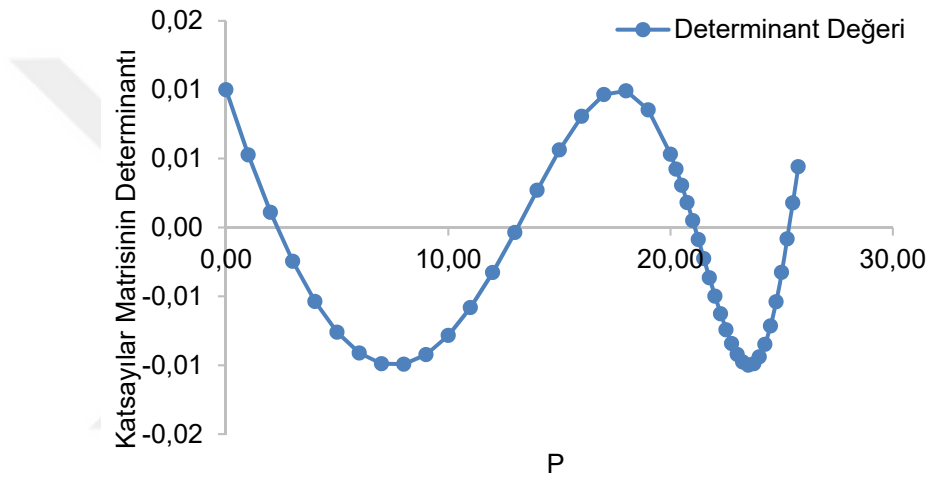
N	Sınır Koşulları							
	A-Se		M-M		A-M		A-A	
	RK4	RK5	RK4	RK5	RK4	RK5	RK4	RK5
4	2,29183	2,29103	7,57518	7,54513	12,51633	12,37939	17,95213	17,65486
6	2,29119	2,29103	7,55251	7,54588	12,42142	12,38644	17,79465	17,68413
8	2,29108	2,29103	7,54813	7,54595	12,39914	12,38715	17,72977	17,68848
10	2,29105	2,29103	7,54687	7,54596	12,39237	12,38728	17,70749	17,68931
15	2,29104	2,29103	7,54615	7,54596	12,38836	12,38732	17,69345	17,68960
20	2,29103	2,29103	7,54602	7,54596	12,38766	12,38732	17,69087	17,68962
25	2,29103	2,29103	7,54599	7,54596	12,38746	12,38732	17,69014	17,68963
30	2,29103	2,29103	7,54597	7,54596	12,38739	12,38732	17,68988	17,68963
40	2,29103	2,29103	7,54597	7,54596	12,38735	12,38732	17,68971	17,68963
50	2,29103	2,29103	7,54596	7,54596	12,38733	12,38732	17,68966	17,68963
75	2,29103	2,29103	7,54596	7,54596	12,38733	12,38732	17,68964	17,68963
100	2,29103	2,29103	7,54596	7,54596	12,38733	12,38732	17,68963	17,68963
Kesin	2,29103		7,54596		12,38732		17,68963	

TFY kullanılarak istenilen aralıklarda boyutsuz burkulma yükleri elde edilebilmektedir. Eşitlik 3.33’de verilen yönetici diferansiyel denklem takımı kullanılarak TKT’ye dayalı modellenen A-Se sınır koşulundaki homojen-izotrop kolonun en küçük dört boyutsuz burkulma yükü Çizelge 4.7’de verilmiştir.

Çizelge 4.7. TKT’ye dayalı modellenen homojen-izotrop A-Se kolonun en küçük dört boyutsuz burkulma yükü

N	$\bar{P}_{1kr}$	$\bar{P}_{2kr}$	$\bar{P}_{3kr}$	$\bar{P}_{4kr}$
5	2,29103	13,11484	21,06022	25,33910
10	2,29103	13,11785	21,09093	25,33024
15	2,29103	13,11791	21,09188	25,33446
20	2,29103	13,11791	21,09196	25,33488
25	2,29103	13,11791	21,09197	25,33495
30	2,29103	13,11791	21,09198	25,33497
40	2,29103	13,11791	21,09198	25,33498
50	2,29103	13,11791	21,09198	25,33498
75	2,29103	13,11791	21,09198	25,33498
100	2,29103	13,11791	21,09198	25,33498
Kesin	2,29103	13,11791	21,09198	25,33498

Diferansiyel denklem takımının homojen çözümden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan her P değeri burkulma yükünü vermektedir. A-Se sınır koşuluna sahip kolonun, P eksenel yüküne bağlı katsayılar matrisi determinantının değişimi Şekil 4.2’de gösterilmiştir. Şekil 4.2’de katsayılar matrisinin determinantının her işaret değişimi bir kritik burkulma yükünü göstermektedir.



Şekil 4.2. TKT’ye dayalı modellenen homojen-izotrop A-Se kolonun P yüküne bağlı katsayılar matrisi determinantının değişimi

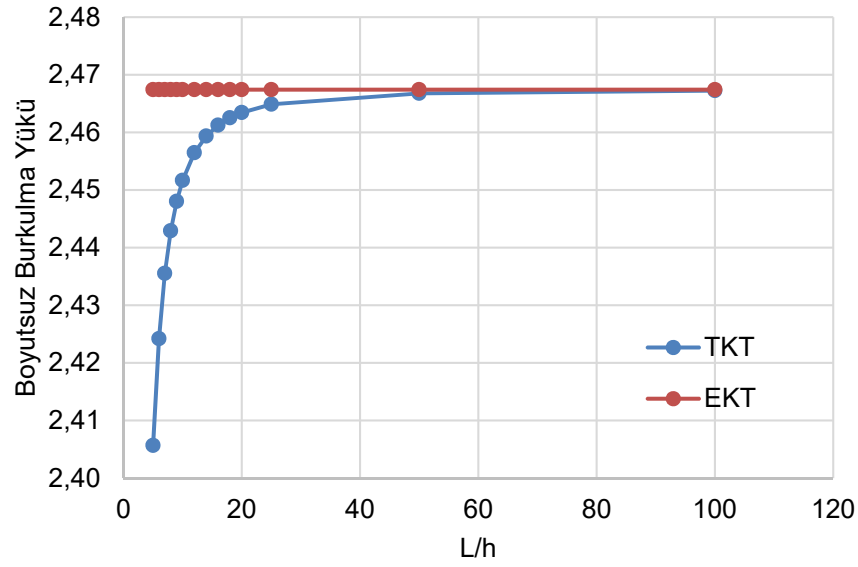
Kayma deformasyonlarının burkulma yüklerine etkisi kesit geometrisine bağlı değişmektedir. Bu değişimlerin görülebilmesi için TKT’ye dayalı modellenen homojen-izotrop kolonların farklı L/h oranları için bulunan en küçük birinci boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4.8’de sunulmuştur. Bu uygulama için TFY ile analizlerde $N=40$ adım aralığı kullanılmıştır.

Çizelge 4.8. TKT'ye dayalı modellenen farklı L/h oranlarındaki kolonların boyutsuz burkulma yükleri (N=40)

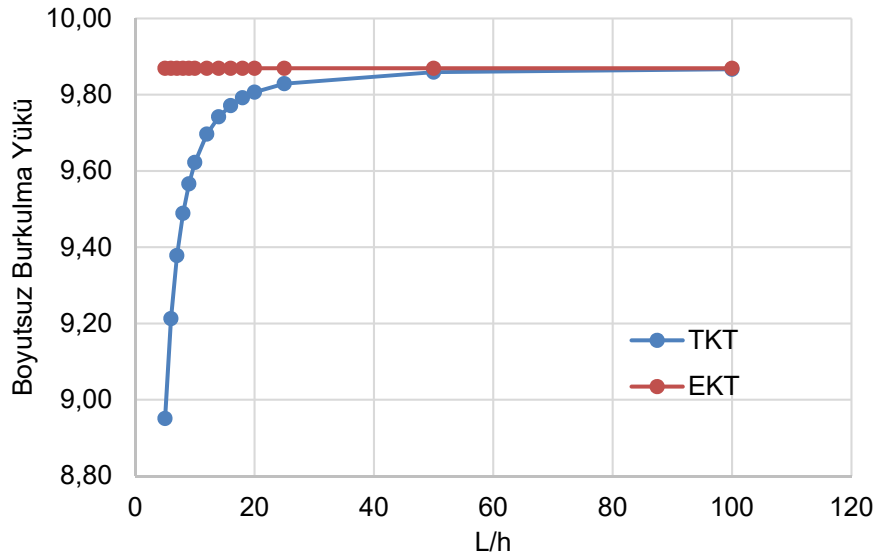
L/H	Sınır Koşulları			
	A-Se	M-M	A-M	A-A
5	2,40567	8,95085	16,68678	27,98745
6	2,42420	9,21290	17,62117	30,71959
7	2,43551	9,37846	18,23693	32,64089
8	2,44291	9,48913	18,66013	34,02194
9	2,44801	9,56653	18,96182	35,03833
10	2,45167	9,62268	19,18366	35,80342
12	2,45646	9,69681	19,48056	36,85162
14	2,45935	9,74206	19,66405	37,51384
16	2,46123	9,77166	19,78501	37,95654
18	2,46253	9,79205	19,86881	38,26614
20	2,46345	9,80669	19,92918	38,49071
25	2,46487	9,82925	20,02255	38,84054
50	2,46677	9,85948	20,14842	39,31699
100	2,46724	9,86707	20,18013	39,43794

EKT ve TKT'ye dayalı modellenen farklı sınır koşullarındaki homojen-izotrop kolonların L/h oranına bağlı en küçük boyutsuz burkulma yüklerinin değişimi Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da sunulmuştur.

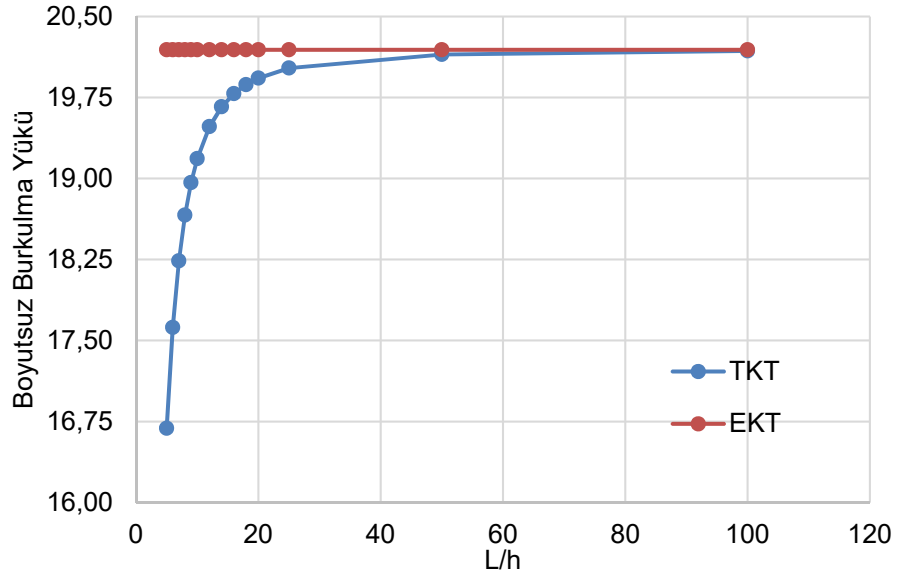
Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 incelendiğinde EKT'ye dayalı modellenen kolonların boyutsuz burkulma yükleri, kayma deformasyonlarının etkisi dikkate alınmadan hesaplandığından L/h oranından etkilenmemektedir.



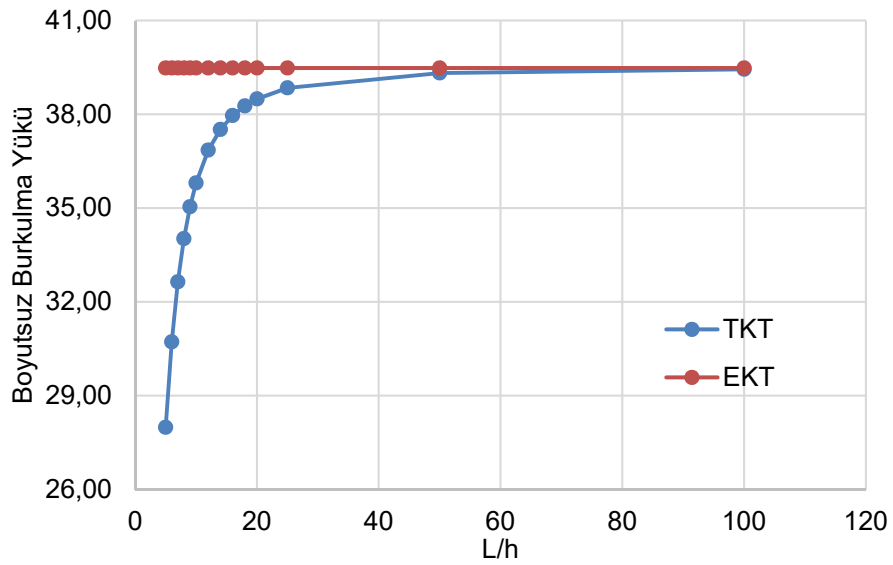
Şekil 4.3. A-Se kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri



Şekil 4.4. M-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri



Şekil 4.5. A-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri



Şekil 4.6. A-A kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri

TKT'ye dayalı modellenen kolonların boyutsuz burkulma yükleri ise L/h oranına bağlı olarak değişmektedir. L/h oranı arttıkça EKT ve TKT'ye dayalı modellenen kolonlardan elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin birbirine yaklaştığı yani kayma deformasyonlarının boyutsuz burkulma yükleri üzerindeki etkisinin azaldığı görülmektedir.

4.3. Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Burkulma Analizi

Bu bölümde eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışı araştırılmıştır. Burkulma yükleri TFY ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımı yardımıyla bulunmuştur. Elde edilen burkulma yükleri literatürde bulunan mevcut sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

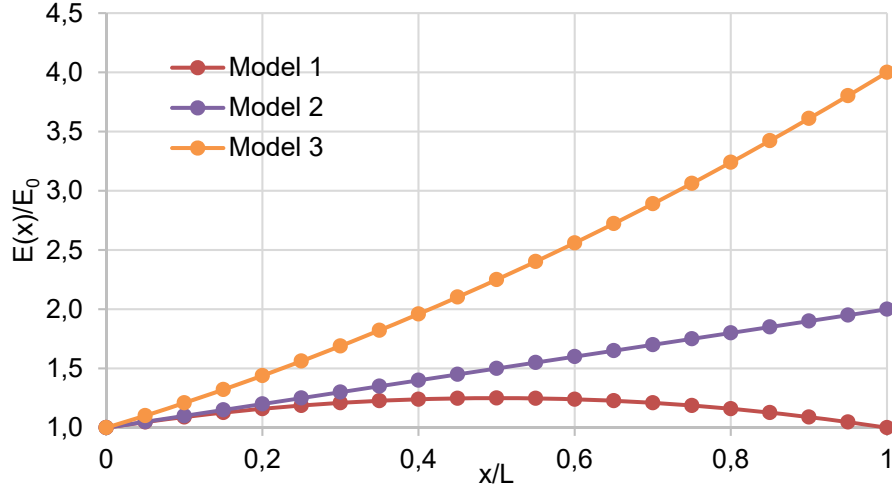
4.3.1. Malzeme Değişim Fonksiyonları ve Kesit Özellikleri

Bu çalışma kapsamında eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışı üç farklı model üzerinde araştırılmıştır. Modellere ait malzeme değişim fonksiyonları Çizelge 4.9'da verilmiştir.

Çizelge 4.9. Eksenel yönde malzeme değişim fonksiyonları

Model No	$E(x)$
Model 1	$E_0(1 + x - x^2)$
Model 2	$E_0(1 + x)$
Model 3	$E_0(1 + 2x + x^2)$

E_0 terimi $x=0$ başlangıç noktasına karşılık gelen elastisite modülünü ifade etmektedir. Çizelge 4.9'da verilen değişim fonksiyonlarının kolon boyunca değişimi Şekil 4.7'de verilmiştir.



Şekil 4.7. Malzeme değişim fonksiyonlarının kolon boyunca değişimi

Eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulması EKT ve TKT'ye bağlı olarak elde edilmiştir. Kolonlara ait kesit ve malzeme özellikleri Eşitlik 4.4'de verilmiştir.

$$E(x) \quad \nu=0,3 \quad k_s=0,85 \quad L=1m \quad (4.4)$$

Eşitlik 4.4'de verilen özelliklere sahip kolonun burkulma yükleri boyutsuz olarak Eşitlik 4.5'de gösterildiği gibi elde edilmiştir.

$$\bar{P}_{nkr} = \frac{P_{nkr} L^2}{E_0 I} \quad (4.5)$$

4.3.2. Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Abaqus Yazılımı Yardımıyla Burkulma Analizi

Abaqus (Dassault Systèmes Simulia Corp.) sonlu elemanlar programı Simulia tarafından geliştirilen bir yazılımdır. Çubuk, plak ve katı elemanlar yazılımında modellenenebilir. Havacılık uzay sanayi uygulamalarından, inşaat sektörüne

birçok eleman modelinin analizinde mevcut yazılım yaygın olarak kullanılmaktadır. İki boyutlu ve üç boyutlu sistemler üzerinde analizler gerçekleştirilebilir.

Çalışmada çubuk eleman olarak modellenen elemanların eksenel basınç kuvveti etkisi altındaki burkulma yükleri bulunacaktır. Çubuk eleman için burkulma yüklerinin analizi iki boyutlu düzlem üzerinde modellenerek elde edilmiştir. Bu çalışmada malzeme özelliği doğrusal elastik olarak tanımlanmıştır.

Bu çalışma kapsamında EKT'ye dayalı sonlu eleman modellerinde B23 tipi eleman kullanılırken, kayma deformasyonlarının etkisini dikkate alan TKT'ye dayalı modellerde B21 eleman tipi kullanılmıştır (Dassault Systèmes Simulia Corp., 2014). Farklı sınır koşulları tanımlanarak modellenen kolonların kritik burkulma yükleri Abaqus yazılımıyla elde edilmiştir.

Eksenel yönde FD malzemeli kolonların, malzeme değişiminin bir noktadan diğer bir noktaya sürekli olarak değişmesi nedeniyle modellenmesinde zorluklarla karşılaşmaktadır.

Eleman boyunca sürekli değişen mekanik özelliklerin modellenebilmesi amacıyla eleman doğrultusu boyunca çok sayıda homojen-izotrop elemana bölünebilir. Aynı ayrı modellenen homojen izotrop elemanların mekanik özellikleri malzeme değişim fonksiyonuna bağlı olarak programa girilir. Bölünen eleman sayısının artırılmasıyla elde edilen modelin eksenel yönde fonksiyonel derecelenmeyi daha iyi bir şekilde temsil edeceği düşünülmektedir. Ancak eleman sayısının artırılması modellemede zorluklar meydana gelmektedir.

Bu çalışmada çubuk eksenli boyunca gerçekleşen malzeme değişimini modelleyebilmek için kolonlar 25, 50 ve 100 homojen izotrop elemana bölünmüştür. Bölünen her eleman için programa malzeme özelliği tanımlanmıştır. Elastik burkulma probleminde doğrusal elastik malzeme davranışı için programa elastisite modülü ve poisson oranının girilmesi yeterlidir. Homojen izotrop eleman sayısına uygun biçimde her homojen izotrop elemanın orta noktasına denk gelen elastisite modülü elemanın malzeme özelliği olarak programa girilmiştir. 25 homojen-izotrop

elemandan oluşturulan modelin Abaqus yazılımı ara yüzündeki görüntüsü Şekil 4.8’de verilmiştir.

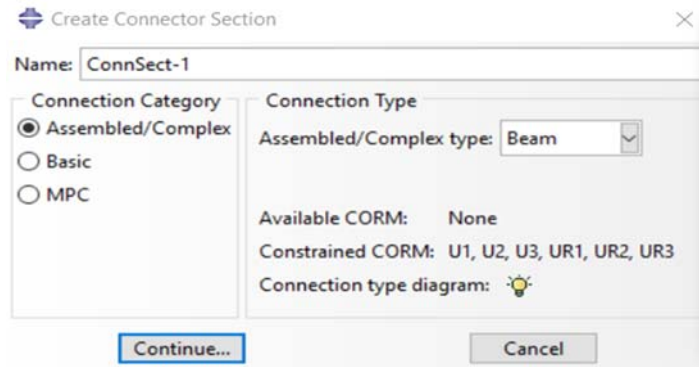


Şekil 4.8.Eksenel yönde FD malzemeli kolonun Abaqus yazılımı ara yüzündeki görüntüsü

Şekil 4.8’de görülen renkler farklı malzeme özelliğine sahip homojen-izotrop elemanları göstermektedir.

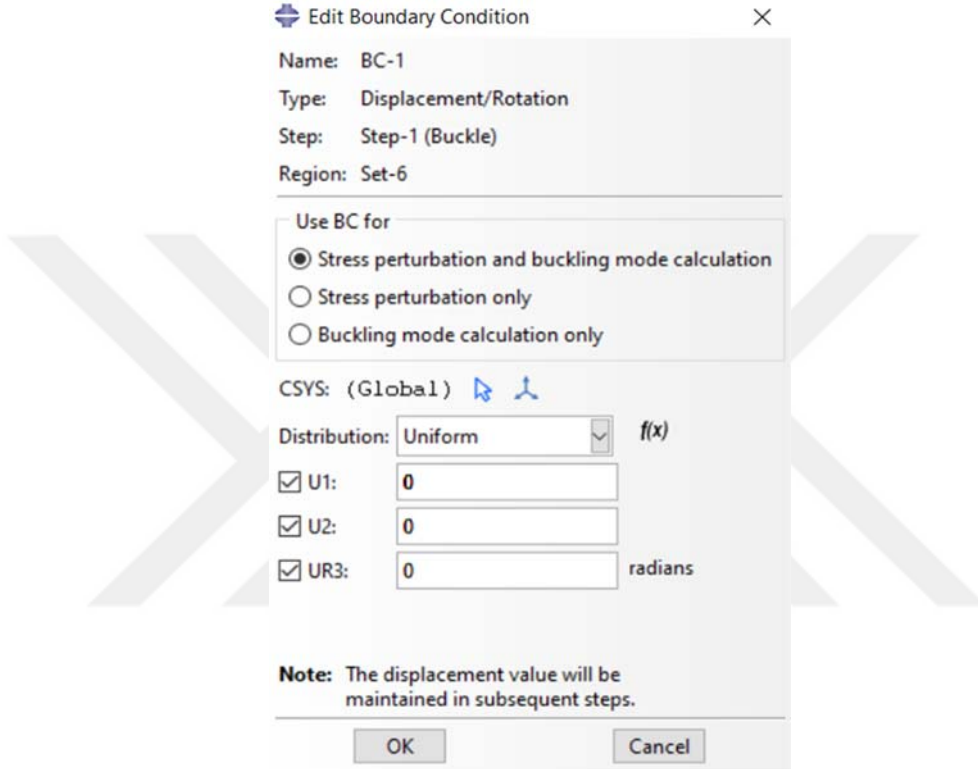
Burkulma yüklerini boyutsuz olarak elde etmeyi kolaylaştırmak için modellenen çubuk elemanın toplam uzunluğu 1 m olarak alınmıştır.

Ayrı ayrı modellenen bu homojen izotrop çubuk elemanların tek bir eleman gibi çalışabilmeleri için Şekil 4.9’da görüldüğü gibi “Beam” tipi bağlayıcı kesitler kullanılmıştır.



Şekil 4.9. Bağlayıcı kesitlerin tanımlanması

Farklı sınır koşullarındaki kolonların analizi için çubuk elemanın uçlarına ilgili sınır koşulları uygulanmıştır. Şekil 4.10'da ankastre mesnete ait sınır koşullarının programa girişi gösterilmiştir.



Şekil 4.10. Abaqus yazılımında sınır koşullarının tanımlanması

Şekilde U1 x eksenindeki yer değiştirmeyi, U2 y eksenindeki yer değiştirmeyi, UR3 ise dönmeyi ifade etmektedir. Ankastre mesnetli uçta U1, U2 ve UR3 serbestlikleri tutuludur. Sabit mesnet modellemek için ilgili uçta U1 ve U2 serbestlikleri tutulurken, hareketli mesnet için sadece U2 serbestliği tutulmalıdır. Serbest uçta ise her üç serbestlikte tutulu değildir.

4.3.3. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Burkulma Analizi

EKT'ye dayalı eksenel yönde FD malzemeli kolonun burkulma davranışını yöneten adi diferansiyel denklem takımı Eşitlik 3.33'de verilmiştir. Çizelge 4.9'da verilen malzeme değişim fonksiyonlarına sahip kolonların burkulma yükleri TFY ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımı kullanılarak elde edilmiştir.

Abaqus yazılımı yardımıyla her üç model, 25, 50 ve 100 homojen-izotrop malzemeli eleman kullanılarak ayrı ayrı modellenmiş ve burkulma yükleri elde edilmiştir.

Model 1 malzeme değişim fonksiyonuna sahip kolonların dört farklı sınır koşullarındaki en küçük üç boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4.10'da verilmiştir.

Çizelge 4.10'da TFY kullanılarak farklı N adım aralığı değeri için elde edilen boyutsuz burkulma yükleri, literatürde verilen ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

TFY kullanılarak bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin, literatürde verilen mevcut sonuçlarla ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen sonuçlarla gayet uyumlu olduğu görülmüştür. N adım aralığı değerinin artmasıyla TFY yardımıyla elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

En büyük boyutsuz burkulma yükleri A-A sınır koşulundaki kolonlardan elde edilirken, en küçük boyutsuz burkulma yükler A-Se sınır koşulundaki kolonlardan elde edilmiştir.

Çizelge 4.10. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (EKT, Model 1)

SK	Yöntem	$\bar{P}_{1kr}$	$\bar{P}_{2kr}$	$\bar{P}_{3kr}$
A-Se	Bu çalışma	N=5	2,8654	25,8300
		N=10	2,8654	25,8412
		N=25	2,8654	25,8415
	Abaqus	25 Eleman	2,8658	25,8450
		50 Eleman	2,8655	25,8420
		100 Eleman	2,8654	25,8420
	Huang ve Li (2011)		2,8636	-
	Rajasekaran (2012)		2,8638	-
M-M	Bu çalışma	N=5	11,9994	46,3728
		N=10	12,0000	46,4581
		N=25	12,0000	46,4601
	Abaqus	25 Eleman	11,9990	46,4530
		50 Eleman	12,0000	46,4580
		100 Eleman	12,0000	46,4600
	Huang ve Li (2011)		12,0000	-
	Rajasekaran (2012)		12,0000	-
A-M	Bu çalışma	N=5	23,6557	69,2710
		N=10	23,6642	69,5817
		N=25	23,6644	69,5915
	Abaqus	25 Eleman	23,6680	69,6010
		50 Eleman	23,6650	69,5940
		100 Eleman	23,6650	69,5920
	Huang ve Li (2011)		23,6644	-
	Rajasekaran (2012)		23,6644	-
A-A	Bu çalışma	N=5	45,3083	93,3713
		N=10	45,3936	94,0477
		N=25	45,3956	94,0797
	Abaqus	25 Eleman	45,4150	94,1200
		50 Eleman	45,4000	94,0900
		100 Eleman	45,3970	94,0830
	Huang ve Li (2011)		45,3956	-
	Rajasekaran (2012)		45,3956	-

Model 2 malzeme değişim fonksiyonuna sahip kolonun, TFY ve Abaqus yazılımıyla elde edilen boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4.11’de verilmiştir.

Çizelge 4.11. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (EKT, Model 2)

SK	Yöntem		$\bar{P}_{1kr}$	$\bar{P}_{2kr}$	$\bar{P}_{3kr}$
A-Se	Bu çalışma	N=5	3,1177	31,8670	89,9401
		N=10	3,1177	31,8854	89,3922
		N=25	3,1177	31,8858	89,4104
	Abaqus	25 Eleman	3,1185	31,8940	89,4330
		50 Eleman	3,1179	31,8880	89,4160
		100 Eleman	3,1177	31,8860	89,4120
	Huang ve Li (2011)		3,1177	-	-
	Rajasekaran (2012)		3,1177	-	-
M-M	Bu çalışma	N=5	14,5102	57,5286	128,9372
		N=10	14,5112	57,6526	129,4941
		N=25	14,5112	57,6562	129,5615
	Abaqus	25 Eleman	14,5100	57,6520	129,5500
		50 Eleman	14,5110	57,6550	129,5600
		100 Eleman	14,5110	57,6560	129,5600
	Huang ve Li (2011)		14,5113	-	-
	Rajasekaran (2012)		14,5113	-	-
A-M	Bu çalışma	N=5	29,4341	86,5433	174,3101
		N=10	29,4486	86,9717	173,0872
		N=25	29,4490	86,9883	173,2776
	Abaqus	25 Eleman	29,4560	87,0110	173,3200
		50 Eleman	29,4510	86,9940	173,2900
		100 Eleman	29,4490	86,9900	173,2800
	Huang ve Li (2011)		29,4490	-	-
	Rajasekaran (2012)		29,4490	-	-
A-A	Bu çalışma	N=5	57,2609	116,9222	250,3155
		N=10	57,3904	117,6710	229,4824
		N=25	57,3939	117,7220	229,9629
	Abaqus	25 Eleman	57,4020	117,7400	230,0000
		50 Eleman	57,3960	117,7300	229,9700
		100 Eleman	57,3940	117,7200	229,9700
	Huang ve Li (2011)		57,3940	-	-
	Rajasekaran (2012)		57,3940	-	-

Çizelge 4.12’de Model 3 malzeme değişim fonksiyonuna sahip kolonların boyutsuz burkulma yükleri verilmiştir.

Çizelge 4.12. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (EKT, Model 3)

SK	Yöntem		$\bar{P}_{1kr}$	$\bar{P}_{2kr}$	$\bar{P}_{3kr}$
A-Se	Bu çalışma	N=5	3,8364	44,9715	126,4431
		N=10	3,8364	45,0173	127,1474
		N=25	3,8364	45,0185	127,1932
	Abaqus	25 Eleman	3,8387	45,0440	127,2600
		50 Eleman	3,8370	45,0250	127,2100
		100 Eleman	3,8365	45,0200	127,2000
	Huang ve Li (2011)		3,8364	-	-
	Rajasekaran (2012)		3,8364	-	-
M-M	Bu çalışma	N=5	20,7893	82,1762	186,2158
		N=10	20,7922	82,4097	184,9749
		N=25	20,7923	82,4191	185,1294
	Abaqus	25 Eleman	20,7880	82,4010	185,0900
		50 Eleman	20,7910	82,4150	185,1200
		100 Eleman	20,7920	82,4180	185,1300
	Huang ve Li (2011)		20,7923	-	-
	Rajasekaran (2012)		20,7923	-	-
A-M	Bu çalışma	N=5	42,0705	123,5754	257,6076
		N=10	42,1082	124,2568	247,1334
		N=25	42,1092	124,2995	247,5558
	Abaqus	25 Eleman	42,1320	124,3700	247,7000
		50 Eleman	42,1150	124,3200	247,5900
		100 Eleman	42,1110	124,3000	247,5700
	Huang ve Li (2011)		42,1092	-	-
	Rajasekaran (2012)		42,1092	-	-
A-A	Bu çalışma	N=5	81,6311	167,7431	*
		N=10	81,9135	168,0562	327,4641
		N=25	81,9233	168,1803	328,4218
	Abaqus	25 Eleman	81,9530	168,2400	328,5500
		50 Eleman	81,9310	168,2000	328,4600
		100 Eleman	81,9250	168,1900	328,4400
	Huang ve Li (2011)		81,9234	-	-
	Rajasekaran (2012)		81,9235	-	-

4.3.4. Timoshenko Kiriş Teorisine Dayalı Modellenen Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Kolonların Burkulma Analizi

Bu bölümde, Eşitlik 3.33’de verilen TKT’ye dayalı modellenen eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklem takımı TFY yardımıyla çözülmüştür.

Burkulma yükleri TFY kullanılarak N=25 adım aralığı için elde edilmiştir. Abaqus sonlu eleman yazılımında malzeme değişimi 25, 50 ve 100 adet homojen-izotrop eleman kullanılarak modellenmiştir. TKT’nin kolonların kesit özelliklerine bağlı burkulma yükleri üzerindeki etkisi farklı L/h oranları kullanılarak araştırılmıştır. Model 1 malzeme değişim fonksiyonuna sahip, L/h oranı 5 olan eksenel yönde FD malzemeli kolonun farklı sınır koşullarındaki en küçük üç boyutsuz burkulma yükü Çizelge 4.13’de verilmiştir.

Çizelge 4.13. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 1, L/h=5, N=25)

SK	Yöntem	$\bar{P}_{1kr}$	$\bar{P}_{2kr}$	$\bar{P}_{3kr}$
A-Se	Bu çalışma	2,7951	21,0481	43,9457
	25 Eleman	2,7956	21,0520	43,9570
	Abaqus 50 Eleman	2,7952	21,0500	43,9520
	100 Eleman	2,7952	21,0490	43,9510
	Bu çalışma	10,8085	32,8325	54,0142
M-M	25 Eleman	10,8080	32,8360	54,0320
	Abaqus 50 Eleman	10,8090	32,8350	54,0240
	100 Eleman	10,8090	32,8350	54,0210
	Bu çalışma	19,5268	43,2188	62,2595
	25 Eleman	19,2590	42,5750	61,6730
A-M	Abaqus 50 Eleman	19,2570	42,5700	61,6640
	100 Eleman	19,2570	42,5690	61,6620
	Bu çalışma	32,5526	51,7313	70,0579
	25 Eleman	32,5640	49,2960	70,0720
	Abaqus 50 Eleman	32,5570	49,2900	70,0700
A-A	100 Eleman	32,5560	49,2880	70,0700

Çizelge 4.14’de Model 2 malzeme değişim fonksiyonuna sahip, L/h oranı 5 olan aksenal yönde FD malzemeli kolonun en küçük üç boyutsuz burkulma yükü verilmiştir.

Çizelge 4.14. Aksenal yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 2, L/h=5, N=25)

SK	Yöntem	$\bar{P}_{1kr}$	$\bar{P}_{2kr}$	$\bar{P}_{3kr}$
A-Se	Bu çalışma	3,0588	25,9723	54,0737
	Abaqus	25 Eleman	3,0596	25,9780
		50 Eleman	3,0590	25,9750
		100 Eleman	3,0588	25,9740
M-M	Bu çalışma	13,0956	40,4740	65,9043
	Abaqus	25 Eleman	13,0960	40,4800
		50 Eleman	13,0960	40,4780
		100 Eleman	13,0960	40,4770
A-M	Bu çalışma	24,4548	53,2736	75,6289
	Abaqus	25 Eleman	23,9130	52,4300
		50 Eleman	23,9100	52,4260
		100 Eleman	23,9090	52,4250
A-A	Bu çalışma	40,5010	62,9792	83,7975
	Abaqus	25 Eleman	40,5420	60,2210
		50 Eleman	40,5400	60,2180
		100 Eleman	40,5390	60,2170

Model 3 malzeme değişim fonksiyonuna sahip L/h oranı 5 olan kolonun TFY ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4.15’de verilmiştir.

Çizelge 4.13, Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15 incelendiğinde TFY ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin A-Se ve M-M sınır koşuluna sahip kolonlarda oldukça uyumlu olduğu görülmüştür.

Çizelge 4.15. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 3, L/h=5, N=25)

SK	Yöntem	$\bar{P}_{1kr}$	$\bar{P}_{2kr}$	$\bar{P}_{3kr}$
A-Se	Bu çalışma	3,7793	36,0769	72,4528
	25 Eleman	3,7816	36,0940	72,4660
	Abaqus 50 Eleman	3,7799	36,0830	72,4640
	100 Eleman	3,7795	36,0800	72,4630
	Bu çalışma	18,4497	55,2270	84,9709
M-M	25 Eleman	18,4490	55,2560	85,1860
	Abaqus 50 Eleman	18,4500	55,2380	85,0360
	100 Eleman	18,4500	55,2330	84,9990
	Bu çalışma	34,4975	71,7692	94,4108
	25 Eleman	33,5370	70,2850	92,5470
A-M	Abaqus 50 Eleman	33,5260	70,2800	92,5710
	100 Eleman	33,5240	70,2790	92,5870
	Bu çalışma	55,7005	82,4196	98,6024
	25 Eleman	55,8980	78,5590	98,4220
	Abaqus 50 Eleman	55,8890	78,5550	97,9650
A-A	100 Eleman	55,8870	78,5550	97,8340

Kayma deformasyonlarının, kesit geometrisine bağlı boyutsuz burkulma yükü üzerindeki etkisi farklı L/h oranları üzerinden araştırılmıştır. Çizelge 4.16’da farklı sınır koşullarında, Model 1 değişim fonksiyonuna sahip eksenel yönde FD malzemeli kolonun en küçük üç boyutsuz burkulma yükü verilmiştir.

Burada $\% \Delta$ ifadesi; EKT’ye dayalı modellenen kolondan elde edilen boyutsuz burkulma yükünün, aynı malzeme değişim modeli, sınır koşulu ve L/h oranına sahip TKT’ye dayalı modellenen kolondan elde edilen boyutsuz burkulma yüküyle bağlı farkını göstermektedir.

Çizelge 4.17’de Model 2 değişim fonksiyonuna sahip kolonun boyutsuz burkulma yükleri verilmiştir.

Çizelge 4.16. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların farklı L/h oranlarındaki boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 1, N=25)

SK	L/h	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{2kr}$	% Δ	$\bar{P}_{3kr}$	% Δ
A-Se	10	2,8475	0,62	24,4501	5,38	61,9670	13,64
	20	2,8609	0,16	25,4790	1,40	69,0304	3,80
	50	2,8647	0,03	25,7828	0,23	71,3050	0,63
	100	2,8652	0,01	25,8268	0,06	71,6422	0,16
M-M	10	11,6783	2,68	42,0972	9,39	84,4296	18,70
	20	11,9179	0,68	45,2871	2,52	98,2098	5,44
	50	11,9868	0,11	46,2684	0,41	102,9089	0,91
	100	11,9967	0,03	46,4120	0,10	103,6170	0,23
A-M	10	22,4745	5,03	60,3917	13,22	106,0998	23,37
	20	23,3553	1,31	67,0393	3,67	128,6591	7,08
	50	23,6144	0,21	69,1702	0,61	136,7952	1,20
	100	23,6519	0,05	69,4857	0,15	138,0419	0,30
A-A	10	41,3226	8,97	78,1189	16,97	130,6303	28,67
	20	44,3041	2,40	89,5095	4,86	166,4221	9,12
	50	45,2174	0,39	93,3175	0,81	180,2324	1,58
	100	45,3509	0,10	93,8880	0,20	182,3941	0,40

Çizelge 4.17. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların farklı L/h oranlarındaki boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 2, N=25)

SK	L/h	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{2kr}$	% Δ	$\bar{P}_{3kr}$	% Δ
A-Se	10	3,1028	0,48	30,1764	5,36	77,0118	13,87
	20	3,1139	0,12	31,4411	1,39	85,9628	3,86
	50	3,1171	0,02	31,8139	0,23	88,8409	0,64
	100	3,1175	0,00	31,8678	0,06	89,2674	0,16
M-M	10	14,1304	2,62	52,1738	9,51	104,8183	19,10
	20	14,4142	0,67	56,1839	2,55	122,3787	5,54
	50	14,4956	0,11	57,4156	0,42	128,3579	0,93
	100	14,5073	0,03	57,5959	0,10	129,2586	0,23
A-M	10	28,0243	4,84	75,2522	13,49	131,9479	23,85
	20	29,0798	1,25	83,7349	3,74	160,7765	7,21
	50	29,3893	0,20	86,4514	0,62	171,1525	1,23
	100	29,4340	0,05	86,8535	0,16	172,7415	0,31
A-A	10	52,0103	9,38	97,0653	17,55	162,0223	29,54
	20	55,9487	2,52	111,8036	5,03	208,3214	9,41
	50	57,1578	0,41	116,7347	0,84	226,2123	1,63
	100	57,3347	0,10	117,4737	0,21	229,0140	0,41

Model 3 malzeme değişim fonksiyonuna sahip TKT'ye dayalı modellenen eksenel yönde FD malzemeli kolonun farklı sınır koşullarında L/h oranına bağlı bulunan boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4.18'de verilmiştir.

Çizelge 4.16, Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18 incelendiğinde L/h oranı arttıkça TKT'ye dayalı kolonlarda elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin, EKT'ye dayalı kolonlarda elde edilen boyutsuz burkulma yüklerine yaklaştığı görülmektedir. L/h oranı azaldıkça kayma deformasyonlarını dikkate alan TKT'ye dayalı modellenen ve bu deformasyonları ihmal eden EKT'ye dayalı modellenen kolonlardan elde edilen burkulma yükleri arasındaki fark artmaktadır.

Çizelge 4.18. Eksenel yönde FD malzemeli kolonların farklı L/h oranlarındaki boyutsuz burkulma yükleri (TKT, Model 3, N=25)

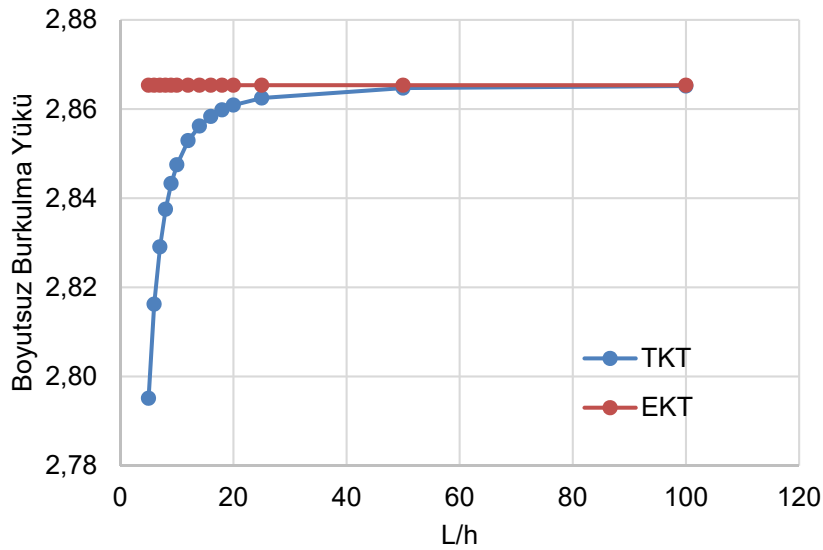
SK	L/h	$\bar{P}_{1kr}$	% Δ	$\bar{P}_{2kr}$	% Δ	$\bar{P}_{3kr}$	% Δ
A-Se	10	3,8220	0,38	42,4408	5,73	108,0517	15,05
	20	3,8328	0,09	44,3484	1,49	121,8760	4,18
	50	3,8358	0,02	44,9101	0,24	126,3151	0,69
	100	3,8362	0,00	44,9914	0,06	126,9726	0,17
M-M	10	20,1593	3,04	73,7216	10,55	146,2208	21,02
	20	20,6308	0,78	80,0812	2,84	173,8304	6,10
	50	20,7663	0,13	82,0370	0,46	183,2358	1,02
	100	20,7858	0,03	82,3233	0,12	184,6528	0,26
A-M	10	39,9458	5,14	106,0791	14,66	183,1702	26,01
	20	41,5491	1,33	119,2538	4,06	228,1122	7,85
	50	42,0187	0,21	123,4671	0,67	244,2521	1,33
	100	42,0865	0,05	124,0905	0,17	246,7225	0,34
A-A	10	73,5371	10,24	135,9798	19,15	222,3664	32,29
	20	79,6692	2,75	158,9691	5,48	294,6430	10,29
	50	81,5549	0,45	166,6444	0,91	322,5670	1,78
	100	81,8309	0,11	167,7940	0,23	326,9405	0,45

Çizelge 4.16, Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18 incelendiğinde eksenel yönde FD malzemeli kolonlarda, kayma deformasyonlarının burkulma yükleri üzerindeki etkisinin sınır koşullarına bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Kayma deformasyonlarının, her üç malzeme modeli içinde burkulma yüklerini en çok

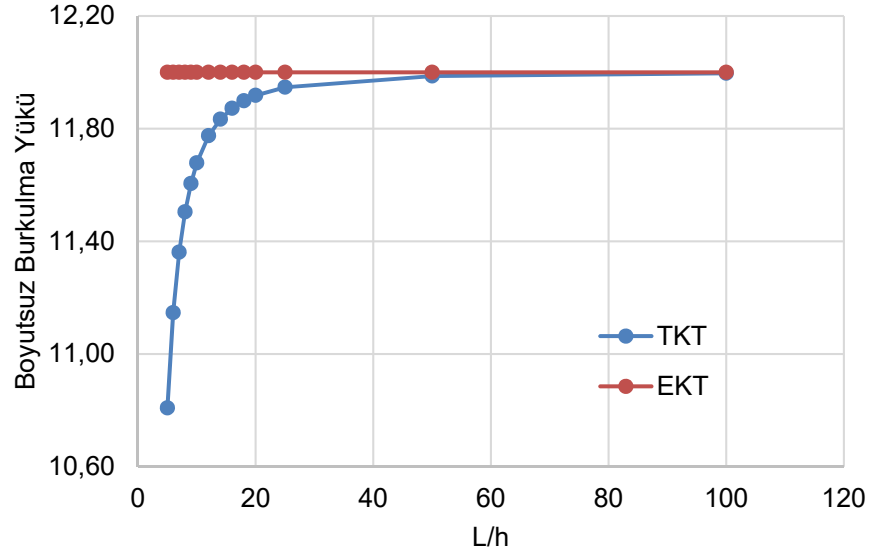
etkilediği sınır koşulu A-A iken, en az etkilediği sınır koşulu A-Se olarak görülmüştür.

Çizelge 4.16, Çizelge 4.17 ve Çizelge 4.18'den kayma deformasyonlarının burkulma modları üzerinde farklı oranlarda etkili olduğu görülmektedir. Aynı sınır koşulu ve L/h oranına sahip eksenel yönde FD malzemeli kolonlarda; yüksek burkulma modlarına ait burkulma yükleri, düşük burkulma modlarına ait burkulma yüklerine kıyasla kayma deformasyonlarından daha çok etkilenmektedir.

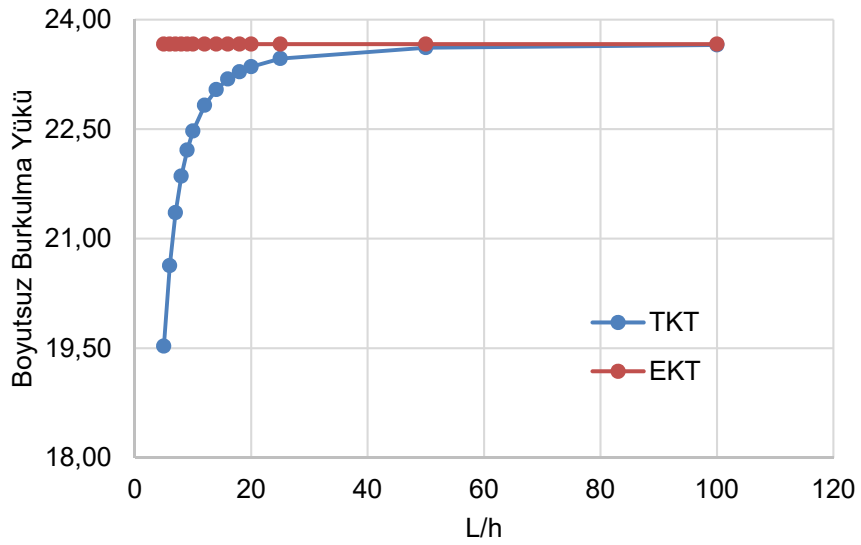
EKT ve TKT'ye dayalı modellenen farklı sınır koşullarında Model 1 malzeme değişim modeline sahip eksenel yönde FD malzemeli kolonun en küçük boyutsuz burkulma yükünün L/h oranına bağlı değişimi Şekil 4.11, Şekil 4.12, Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'de verilmiştir.



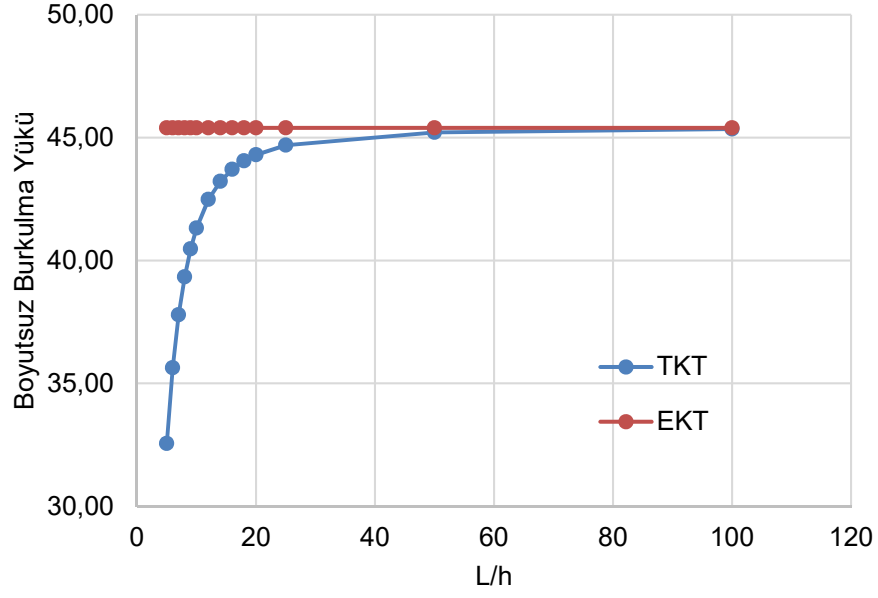
Şekil 4.11. A-Se kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)



Şekil 4.12. M-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)



Şekil 4.13. A-M kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)



Şekil 4.14. A-A kolonunun L/h oranına bağlı boyutsuz burkulma yükleri (Model1)



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmanın çok zor olduğu veya mümkün olmadığı problemlerde yaklaşık sonucu elde etmek amacıyla sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Bu çalışmada, burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemler TFY kullanılarak çözülmüştür. Bu amaçla Python programlama dilinde bir program hazırlanmıştır.

TFY, lineer sınır değer problemini başlangıç değer problemine dönüştürmektedir. Bu doğrultuda dönüştürülen başlangıç değer problemlerinin çözümlerinde RK4 ve RK5 algoritmaları kullanılmıştır.

Bu çalışmada, EKT ve TKT'ye dayalı modellenen eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışı araştırılmıştır. Burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemler, denge denklemleri ve iç kuvvet-şekil değiştirme ilişkileri kullanılarak iki farklı formatta sunulmuştur.

Elde edilen diferansiyel denklemler, öncelikle TFY'nin uygulanabilmesi amacıyla birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerden oluşan denklem takımına dönüştürülmüştür. Bu dönüşümlerde yardımcı fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Yönetici diferansiyel denklem takımının, homojen çözümünden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan eksenel yük değerleri burkulma yüklerini vermektedir. Bu kök değerleri Secant yöntemiyle iteratif olarak elde edilmiştir.

Uygulanan yöntemin burkulma yüklerinin hesabında etkin bir biçimde kullanılabileceğini göstermek amacıyla homojen-izotrop malzemeli kolonların burkulma yükleri TFY yardımıyla elde edilmiştir. EKT ve TKT'ye dayalı olarak modellenen farklı sınır koşullarındaki kolonların burkulma yükleri RK4 ve RK5 algoritmaları kullanılarak bulunmuştur.

Boyutsuz burkulma yükleri, çalışmada sunulan her iki yönetici denklem takımı içinde bulunmuştur. Her iki denklem takımından da elde edilen sonuçlar kesin sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çözümlerde kullanılan N adım aralığı değeri arttıkça

elde edilen sonuçların kesin sonuca yaklaştığı görülmüştür. RK5 algoritmasının kullanıldığı çözücünün, N değerine bağlı kesin çözüme yaklaşma hızı, RK4 algoritmasının kullanıldığı çözücüye kıyasla daha yüksektir.

Kayma deformasyonlarını ihmal eden EKT'ye dayalı modellenen homojen-izotrop malzemeli kolonlardan elde edilen burkulma yükleri, kayma deformasyonlarının etkisini dikkate alan TKT'ye dayalı modellenen kolonlardan elde edilen burkulma yüklerinden daha büyüktür. Kesitin geometrik özelliklerine bağlı olarak kayma deformasyonlarının boyutsuz burkulma yüküne etkisini incelemek amacıyla farklı L/h oranlarında kolonlar ele alınmıştır. Düşük L/h oranlarına sahip kolonların burkulma yükü değerlerinin kayma deformasyonlarından önemli ölçüde etkilendiği görülmüştür. Ancak L/h oranı arttıkça; TKT'ye dayalı modellenen kolonlardan elde edilen boyutsuz burkulma yükleri, EKT'ye dayalı modellenen kolonlardan elde edilen burkulma yüklerine yaklaşmaktadır.

Homojen-izotrop malzemeli kolonlar üzerinde test edilen TFY, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma analizinde kullanılmıştır. EKT ve TKT'ye dayalı modellenen eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma yükleri Eşitlik 3.33 ve Eşitlik 3.34'de verilen yönetici diferansiyel denklem takımlarından elde edilmiştir. Kullanılan yönetici diferansiyel denklem takımları; kolonlara ait sınır koşullarının, malzeme özelliklerinden ve kesit geometrisinden bağımsız yazılabilesine olanak sağlamıştır. Seçilen yönetici diferansiyel denklem takımlarının sağladığı bir diğer avantaj ise burkulma davranışını yöneten diferansiyel denklemin doğrudan birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerden elde edilmesidir.

Eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışında malzeme değişim modelinin önemli bir etkisi vardır. Bu çalışma kapsamında üç farklı malzeme değişim modeli incelenmiştir. TFY ile elde edilen boyutsuz burkulma yükleri literatürde bulunan mevcut sonuçlar ve Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Abaqus sonlu elemanlar yazılımında iki boyutlu düzlemde çalışılmıştır. Kolonlar çubuk sonlu elemanlar kullanılarak modellenmiştir. EKT'ye dayalı modellemelerde B23 tipi eleman kullanılırken, TKT'ye dayalı modellemelerde B21 tipi eleman kullanılmıştır. Eksenel yönde FD malzemeli kolonlar, sonlu elemanlar yazılımında çok sayıda homojen-izotrop malzemeli eleman kullanılarak modellenmiştir. Bu çalışma kapsamında ele alınan malzeme değişim fonksiyonlarına sahip FD malzemeli kolonların modellenmesinde 25, 50 ve 100 homojen-izotrop eleman kullanılmıştır.

EKT'ye dayalı modellenen eksenel yönde FD malzemeli kolonların TFY ile elde edilen burkulma yüklerinin Abaqus sonlu elemanlar yazılımından elde edilen burkulma yükleriyle oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Abaqus ile yapılan analizlerde, kullanılan homojen-izotrop eleman sayısının artmasıyla elde edilen sonuçların daha hasas hale geldiği görülmüştür.

EKT'ye dayalı modellenen FD malzemeli kolonların boyutsuz burkulma yükleri L/h oranından etkilenmezken, TKT'ye dayalı modellenen kolonların boyutsuz burkulma yükleri L/h oranına bağlı değişmektedir. L/h oranı arttıkça, TKT'ye dayalı kolonlardan elde edilen sonuçların EKT'ye dayalı kolonlardan elde edilen sonuçlara yaklaştığı; bu oran azaldıkça kayma deformasyonunun kritik burkulma yüküne etkisinin arttığı gözlemlenmiştir.

FD malzemeli kolonlarda en büyük burkulma yükleri, Model 3 malzeme değişim fonksiyonu için elde edilmiştir. Aynı malzeme modeli ve L/h oranına sahip kolonlarda en büyük burkulma yükleri A-A sınır koşulunda elde edilirken, en küçük burkulma yükleri A-Se sınır koşulundaki kolonlarda bulunmuştur.

Kayma deformasyonlarının, burkulma yükü üzerindeki etkisinin sınır koşullarına bağlı değiştiği görülmüştür. Kayma deformasyonlarının etkisini ihmal eden EKT'ye dayalı modellenen ve bu etkileri dikkate alan TKT'ye dayalı modellenen kolonlardan elde edilen boyutsuz burkulma yükleri arasındaki en büyük farklar A-A sınır koşulunda görülürken, en küçük farklar A-Se sınır koşulunda görülmüştür.

Kayma deformasyonlarının, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma modları üzerinde farklı oranlarda etkili olduğu görülmüştür. Aynı malzeme değişim modeline, sınır koşuluna ve L/h oranına sahip eksenel yönde FD malzemeli kolonlarda; yüksek derece burkulma modlarına ait burkulma yükleri, düşük derece burkulma modlarına ait burkulma yüklerine kıyasla kayma deformasyonlarından daha çok etkilenmektedir.

Sonuç olarak, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulma davranışının araştırılmasında TFY'nin etkin bir şekilde kullanılabileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Akgöz, B., 2019. Ritz Yöntemi ile Değişken Kesitli Kolonların Burkulma Analizi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 7(2): 452-458.
- Bakioğlu, M., 2001. *Cisimlerin Mukavemeti*, Beta Basım Yayım, İstanbul, 776s.
- Chapra, S. C., and Canale, R. P., 2015. *Numerical methods for engineers*. McGraw-hill Education, New York, 970p.
- Chen, D., Yang, J., and Kitipornchai, S., 2015. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam. *Composite Structures*, 133: 54-61.
- Chen, W. F., and Lui, E. M., 1987. *Structural stability: theory and implementation*. No. 624.12 C5, New York, 490p.
- Coşkun, S.F., and Atay, M.T., 2009. Determination of Critical Buckling Load for Elastic Columns of Constant and Variable Cross-Sections Using Variational Iteration Method. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(11-12): 2260-2266.
- Dassault Systèmes Simulia Corp., ABAQUS, Providence, RI, USA.
- Dassault Systèmes Simulia Corp., 2014. *ABAQUS 6.14 Analysis User's Guide Volume IV: Elements*, Providence, RI, USA.
- Elishakoff, I., 2001. Inverse buckling problem for inhomogeneous columns. *International Journal of Solids and Structures*, 38(3): 457-464.
- Elishakoff, I., 2012. Buckling of a Column Made of Functionally Graded Material. *Archive of Applied Mechanics*, 82(10): 1355–1360.
- Filiz, S., ve Aydoğdu, M., 2015. Eksenel Fonksiyonel Derecelenmiş Kirişlerin Titreşim ve Burkulma Analizi. XIX. Ulusal Mekanik Kongresi, Trabzon, 483-491.
- Gören, B., ve Erim, S., 2000. Değişken Kesitli Ankastre Timoshenko Kirişin Statik Stabilitate Analizi. *DEÜ Mühendislik Fakültesi, Fen ve Mühendislik Dergisi*, 2(2): 75-86.

- Groves, J. F., and Wadley, H. N. G., 1997. Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2): 57-69.
- Huang, Y., and Li, X. F., 2010. Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation. *Materials & Design*, 31(7): 3159-3166.
- Huang, Y., and Li, X.F., 2011. Buckling Analysis of Nonuniform and Axially Graded Columns with Varying Flexural Rigidity. *Journal of Engineering Mechanics*, 137(1): 73-81.
- Huang, Y., Zhang, M., and Rong, H., 2016. Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 29(2): 200-207.
- İnan, M., 2001. *Cisimlerin Mukavemeti*. İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul, 560s.
- Jamil, H., and Tütüncü, N., 2019. Numerical methods in calculating eigenvalues: case studies in stability of Euler columns. *ALKÜ Fen Bilimleri Dergisi*, 1(3): 156-164.
- Kahya, V., and Turan, M., 2017. Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 109: 108-115.
- Karamanlı, A., 2018. Analytical solutions for buckling behavior of two directional functionally graded beams using a third order shear deformable beam theory. *Academic Platform-Journal of Engineering and Science*, 6(2): 164-178.
- Lee, J. K., and Lee, B. K., 2019. Free vibration and buckling of tapered columns made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, 75: 73-87.
- Lee, J. K., and Lee, B. K., 2022. Buckling optimization of axially functionally graded columns having constant volume. *Engineering Optimization*, 54(2): 269-285.

- Lin, X., and Yue, T. M., 2005. Phase formation and microstructure evolution in laser rapid forming of graded SS316L/Rene88DT alloy. *Materials Science and Engineering: A*, 402(1-2): 294-306.
- Mengi, Y., 1993. Numerical methods in engineering. Lecture notes, Çukurova University, Adana.
- Nemat-Alla, M. M., Ata, M. H., Bayoumi, M. R. and Khair-Eldeen, W., 2011. Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of aluminum/steel functionally graded material. *Materials Sciences and Applications*, 2(12): 1708.
- Omurtag, M. H., 2010. Çubuk Sonlu Elemanlar. Birsen Yayınevi, İstanbul, 291s.
- Rajasekaran, S., 2013. Buckling and Vibration of Axially Functionally Graded Nonuniform Beams Using Differential Transformation Based Dynamic Stiffness Approach. *Meccanica*, 48: 1053–1070.
- Shahba, A., Attarnejad, R., Marvi, M. T., and Hajilar, S., 2011. Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 42(4): 801-808.
- Shahbaa, A., Attarnejada, R., and Hajilara, S., 2011. Free Vibration and Stability of Axially Functionally Graded Tapered Euler-bernoulli Beams. *Shock and Vibration*, 18(5): 683-696.
- Singh, K. V., and Li, G., 2009. Buckling of functionally graded and elastically restrained non-uniform columns. *Composites Part B: Engineering*, 40(5): 393-403.
- Sivri, B., ve Temel, B., 2022a. Değişken kesitli Timoshenko kolonlarının tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemiyle burkulma analizi. *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 11(1): 122-128.
- _____, 2022b. Euler Bernoulli ve Timoshenko Kiriş Teorilerine Dayalı Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelenmiş Kolonların Burkulma Analizi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Dergisi*, 37 (2): 319-328.

- Soltani, M., 2020. Finite Element Modeling for Buckling Analysis of Tapered Axially Functionally Graded Timoshenko Beam on Elastic Foundation. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 7(2): 203-218.
- Şimşek, M., 2016. Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions. *Composite Structures*, 149: 304-314.
- Şimşek, M., and Yurtcu, H. H., 2013. Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory. *Composite Structures*, 97: 378-386.
- Tang, H., Li, L., and Hu, Y., 2018. Buckling analysis of two-directionally porous beam. *Aerospace Science and Technology*, 78: 471-479.
- Uluköy, A., 2016. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemenin Lineer Burkulma Analizi. *AKÜ FEMÜBİD, Özel Sayı(16)*: 122-127.
- Wang, C.M., Wang, C.Y., and Reddy, J.N., 2005. *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. Florida, CRC Press.
- Watanabe, Y., Yamanaka, N., and Fukui, Y., 1998. Control of composition gradient in a metal-ceramic functionally graded material manufactured by the centrifugal method. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 29(5-6): 595-601.
- Xiao, B. J., and Li, X. F., 2019. Exact solution of buckling load of axially exponentially graded columns and its approximation. *Mechanics Research Communications*, 101: 103414.
- Yılmaz, Y., Girgin, Z., and Evran, S., 2013. Buckling Analyses of Axially Functionally Graded Nonuniform Columns with Elastic Restraint Using a Localized Differential Quadrature Method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013: 1-12.

ÖZGEÇMİŞ

Burkay SİVRİ, 2014 yılında lise eğitimini Eskişehir’de tamamladı. 2018 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden birincilikle mezun oldu. 2020 yılında Çukurova Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2020 yılı Mart ayından beri Çukurova Üniversitesi’nde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.

