



**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Faruk Fırat ÇALIM

135760

**VİSKOELASTİK, ANİZOTROPİK
EĞRİ EKSENLİ UZAYSAL ÇUBUK
SİSTEMLERİN DİNAMİK ANALİZİ**

**T.C. YÜSEKÖĞRETİM VE
DOKÜMANTASYON MENKUR**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ADANA, 2003

135760

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**VİSKOELASTİK, ANİZOTROPİK EĞRİ EKSENLİ
UZAYSAL ÇUBUK SİSTEMLERİN
DİNAMİK ANALİZİ**

Faruk Fırat ÇALIM

DOKTORA TEZİ

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

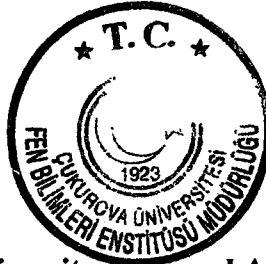
**Bu tez 23/09/2003 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.**

İmza:  İmza:  İmza: 
Yrd. Doç. Dr. Beytullah TEMEL Prof. Dr. A. Kamil TANRIKULU Prof. Dr. Naki TÛTÛNCÛ
DANIŞMAN ÜYE ÜYE

İmza:  İmza: 
Yrd. Doç. Dr. Hüseyin R. YERLİ Yrd. Doç. Dr. Ali Osman ATAHAN
ÜYE ÜYE

Bu tez Enstitümüz İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 782




Prof. Dr. Fikri AKDENİZ
Enstitü Müdürü

**Bu Çalışma Çukurova Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından
Desteklenmiştir.**

Proje No: FBE 2002 D-178

**Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.**

ÖZ

DOKTORA TEZİ

VİSKOELASTİK, ANİZOTROPİK EĞRİ EKSENLİ UZAYSAL ÇUBUK SİSTEMLERİN DİNAMİK ANALİZİ

Faruk Fırat ÇALIM

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Beytullah TEMEL

Yıl : 2003, **Sayfa:** 160

Jüri : Yrd. Doç. Dr. Beytullah TEMEL

: Prof. Dr. A. Kamil TANRIKULU

: Prof. Dr. Naki TÜTÜNCÜ

: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin R. YERLİ

: Yrd. Doç. Dr. Ali Osman ATAHAN

Bu tezde, izotropik, anizotropik ve elastik, viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiş ve silindirik helisel çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Laplace uzayında elde edilen skaler formdaki adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplayabilmek için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Malzemenin viskoelastik olduğu durumda, elastik-viskoelastik anolojisi yardımıyla, malzeme sabitleri Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile yer değiştirilmektedir. Çözümlerde, Kelvin modeli uygulanmıştır. Elde edilen çözümler, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile zaman uzayına dönüştürülmüştür. Bu çalışmada elde edilen sonuçların ANSYS ve literatürdeki mevcut sonuçlar ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler : Silindirik Helisel Çubuklar, Viskoelastik Cisimler, Kompozit Malzemeler, Sayısal Ters Laplace Dönüşümleri, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi.

ABSTRACT

Ph. D. THESIS

DYNAMIC ANALYSIS OF VISCOELASTIC, ANISOTROPIC CURVED SPATIAL ROD SYSTEMS

Faruk Fırat ÇALIM

DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Beytullah TEMEL

Year : 2003, **Pages:** 160

Jury : Assist. Prof. Dr. Beytullah TEMEL
: Prof. Dr. A. Kamil TANRIKULU
: Prof. Dr. Naki TÜTÜNCÜ
: Assist. Prof. Dr. Hüseyin R. YERLİ
: Assist. Prof. Dr. Ali Osman ATAHAN

In this thesis, the dynamic behaviour of cylindrical helical rods made of isotropic, anisotropic and elastic, viscoelastic materials under time dependent loads is theoretically investigated in the Laplace domain. The governing equations for naturally twisted and curved spatial rods obtained using the Timoshenko beam theory are rewritten for cylindrical helical rods. The curvature of the rod axis, effect of rotary inertia and, shear and axial deformations are considered in the formulation. Ordinary differential equations in scalar form obtained in the Laplace domain are solved numerically with the help of the complementary functions method to calculate the dynamic stiffness matrix of the problem. In the viscoelastic material case, with the help of elastic-viscoelastic analogy, the material constants are replaced with their complex counterparts in the Laplace domain. In the solutions, Kelvin model is employed. The solutions obtained are transformed to the real space using the Durbin's numerical inverse Laplace transform method. The results obtained in this study are found to be in good agreement with those available in the literature and ANSYS.

Keywords : Cylindrical Helical Rods, Viscoelastic Solids, Composite Materials, Inverse Laplace Transforms, Complementary Functions Method.

TEŞEKKÜR

Doktora tez programımın yürütülmesi esnasında, çalışmalarımı sabır ve ilgi ile izleyip yön veren, değerli bilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve bana her türlü desteği sağlayan danışman hocam, sayın Yrd. Doç. Dr. Beytullah TEMEL'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans tez çalışmamda bu konuların temelini atan sayın Prof. Dr. Erhan KIRAL'a, değerli yardımlarını esirgemeyen sayın Prof. Dr. Naki TÜTÜNCÜ ve sayın Yrd. Doç. Dr. Hüseyin R. YERLİ'ye teşekkür ederim.

Ayrıca, bu çalışmada ve diğer konularda bana manevi destek sağlayan aileme minnettarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR	XIV
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	4
2.1. Elastik Çubuklarla İlgili Çalışmalar	4
2.2. Viskoelastik Çubuklarla İlgili Çalışmalar	6
2.3. Kompozit Çubuklarla İlgili Çalışmalar	8
3. UZAYSAL EĞRİ EKSENLİ ÇUBUK SİSTEMLER	11
3.1. Çubuk Geometrisi	11
3.2. Geometrik Uygunluk Denklemleri ve Şekil Değiştirme Tansörü	13
3.3. Hareket Denklemleri	14
3.4. Elastik Bünye Denklemleri	15
4. SİLİNDİRİK HELİSEL ÇUBUKLARIN SERBEST ve ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ	20
4.1. Silindirik Helisel Çubukların Zorlanmış Titreşimi	20
4.2. Silindirik Helisel Çubukların Serbest Titreşimi	26
5. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ	27
5.1. Diferansiyel Denklemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Çözümü	27
5.2. Homojen Çözümün Elde Edilmesi	29
5.3. Özel Çözümün Elde Edilmesi	30
5.4. Sınır Şartlarından C_m İntegrasyon Sabitlerinin Elde Edilmesi	30
5.5. Eleman Dinamik Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi	33

6. SÖNÜMÜN DİNAMİK DAVRANIŞA ETKİSİ	36
6.1. Viskoelastik Davranış	36
6.2. Viskoelastik Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi	36
6.3. Elastik-Viskoelastik Analojisi	40
7. KOMPOZİT MALZEMELER	45
7.1. Kompozit Malzemelerin Mekanik Davranışları	45
7.2. Anizotropik Malzemelerin Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısı	46
7.3. Ortotropik Malzemeler İçin Elastik Sabitler	48
7.4. Ortotropik Tabakalı Çubuklar İçin Elastik Sabitler	53
7.5. Kompozit Çubuklar İçin Bünye Denklemleri	57
8. SAYISAL UYGULAMALAR	63
8.1. Konsol Helis	63
8.2. İki Ucu Ankastre 7.6 Sarımlık Helisel Yay	69
8.3. İki Ucu Ankastre Yarım Sarımlık Helis	74
8.4. Viskoelastik Malzemeli Konsol Helis	81
8.5. Viskoelastik Malzemeli 7.6 Sarımlık İki Ucu Ankastre Helis	86
8.6. Kompozit Helisel Çubuk	90
8.7. Çapraz Elyaf Takviyeli (Cross-Ply) Tabakadan Yapılmış Konsol Helis	115
8.8. Çapraz Elyaf Takviyeli Tabakadan Yapılmış İki Ucu Ankastre Helis	117
9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	119
KAYNAKLAR	122
ÖZGEÇMİŞ	129
EK A. BEŞİNCİ MERTEBE RUNGE-KUTTA ALGORİTMASI	130
EK B. SAYISAL LAPLACE VE TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ	131
B.1. Direk Laplace Dönüşümü	131
B.1.1. Analitik Laplace Dönüşümü	133
B.1.2. FFT'ye Dayalı Sayısal Laplace Dönüşümü	134
B.2. Sayısal Ters Laplace Dönüşüm Yöntemleri	136

B.2.1. ‘Maximum Degree of Precision (MDOP)’ Yöntemi	136
B.2.2. Durbin’in Modifiye Edilmiş Ters Laplace Dönüşüm Yöntemi	136
EK C. SAYISAL FOURIER VE TERS FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ	141
C.1. Fourier Dönüşümü Hakkında Özet Bilgiler	141
C.2. Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri.....	141
C.3. Ayrık Fourier Dönüşümü	143
C.4. Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemi.....	144
C.5. Kompleks Fourier Serisi	144
C.6. Sürekli Fourier Dönüşümü ve Kompleks Fourier Serisi Arasındaki İlişki...	147
C.7. Ayrık Fourier Dönüşüm Formülleri.....	148
C.8. Katlama Frekansı	149
C.9. Ayrık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Son Şekli.....	149
C.10. Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemli Bir Özelliği.....	150
C.11. Ayrık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Kompakt Formu	151
C.12. Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol.....	151
C.13. Ters Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol	152
C.14. FFT Algoritması (Hızlı Fourier Dönüşüm Algoritması).....	154
C.15. FFT Algoritmasının Giriş Bilgileri.....	154
C.16. FFT Alt Programı	155
EK D. LAPLACE VE FOURIER DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİNİN	
KARŞILAŞTIRILMASI	156
D.1. Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Dinamik Davranışı.....	156
D.2. Mathematica Programı İle Kesin Çözüm.....	160

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 7.1. Kısaltılmış notasyonda gerilme ve şekil değiştirme tansörü bileşenleri	47
Çizelge 8.1. Doğal frekanslar (Hertz)	64
Çizelge 8.2. Doğal frekanslar (Hertz)	70
Çizelge 8.3. Doğal frekanslar (Hertz)	75
Çizelge 8.4. Enine izotrop malzeme özellikleri	90
Çizelge 8.5. Carbon-epoxy ² malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz) (D/d=5)	91
Çizelge 8.6. Carbon-epoxy ² malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz) (D/d=10)	92
Çizelge 8.7. Carbon-epoxy ¹ malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz)	93
Çizelge 8.8. Kevlar 49-epoxy malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz)	94
Çizelge 8.9. Serbest titreşim frekansları (Hertz)	116
Çizelge 8.10. Serbest titreşim frekansları (Hertz)	118
Çizelge B.1. Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Laplace dönüşümleri	132
Çizelge B.2. El-Centro 1940 depremi ivmesinin K-G bileşenin Laplace dönüşümü	135
Çizelge B.3. Tip No : 6 olan fonksiyon ile karşılaştırma	138
Çizelge B.4. Tip No : 7 olan fonksiyon ile karşılaştırma	139
Çizelge B.5. Tip No : 8 olan fonksiyon ile karşılaştırma	140
Çizelge C.1. Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Fourier dönüşümleri	143

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Çubuk geometrisi	11
Şekil 3.2. Çubuk kesiti üzerindeki küçük eleman	16
Şekil 4.1. Silindirik helis geometrisi	20
Şekil 4.2. Helisin yükselme açısı	21
Şekil 5.1. Serbest titreşim frekanslarının elde edilmesi	35
Şekil 6.1. (a) Hooke tipi yay (b) Newton tipi yağ kutusu	37
Şekil 6.2. Kelvin cismi	37
Şekil 7.1. Üç boyutlu gerilme hali	46
Şekil 7.2. Ortotropik tabaka için malzeme simetri düzlemi	50
Şekil 8.1. Konsol helis ve dinamik yük tipleri	64
Şekil 8.2. Bu çalışmada bulunan konsol helisin serbest ucundaki düşey deplasman	65
Şekil 8.3. ANSYS programı ile bulunan konsol helisin serbest ucundaki düşey deplasman	65
Şekil 8.4. Adım tipi yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi	66
Şekil 8.5. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi	67
Şekil 8.6. Dikdörtgen impulsif yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi	67
Şekil 8.7. Dikdörtgen impulsif yük altında ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi	68
Şekil 8.8. Üçgen impulsif yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi	68
Şekil 8.9. Üçgen impulsif yük altında ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi	69
Şekil 8.10. Silindirik helisel yay ve dinamik yük tipi	70
Şekil 8.11. 7.6 sarımlık helisin orta noktasındaki düşey deplasman	71
Şekil 8.12. 7.6 sarımlık helisin orta noktasındaki düşey deplasman	72
Şekil 8.13. Yayın orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi	72
Şekil 8.14. Yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi	73
Şekil 8.15. Ankastre uçtaki düşey kesme kuvvetinin zamanla değişimi	73
Şekil 8.16. Ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi	74
Şekil 8.17. Ara tekil yüklü iki ucu ankastre helis ve dinamik yük tipi	75

Şekil 8.18. Helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	76
Şekil 8.19. Helisin orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi	76
Şekil 8.20. Ankastre uçtaki düşey kesme kuvvetinin zamanla değişimi	77
Şekil 8.21. Ankastre uçtaki M_z momentin zamanla değişimi	77
Şekil 8.22. Üniform yüklü helisel çubuk ve dinamik yük tipleri	78
Şekil 8.23. Adım tipi yük etkisinde helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	79
Şekil 8.24. Adım tipi yük etkisinde helisin ankastre ucundaki momentin zamanla değişimi	79
Şekil 8.25. Dikdörtgen impulsif yük etkisinde helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	80
Şekil 8.26. Dikdörtgen impulsif yük etkisinde helisin ankastre ucundaki momentin zamanla değişimi	80
Şekil 8.27. Adım tipi yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi	81
Şekil 8.28. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi	81
Şekil 8.29. Viskoelastik malzemeli konsol helis için uygulanan dinamik yük tipleri	82
Şekil 8.30. Adım tipi yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi	82
Şekil 8.31. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi	83
Şekil 8.32. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki M_z momentinin zamanla değişimi	83
Şekil 8.33. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki M_y momentinin zamanla değişimi	84
Şekil 8.34. Sinüzoidal impulsif yük altında serbest uçtaki düşey deplasmanın zamanla değişimi	84
Şekil 8.35. Sinüzoidal impulsif yük altında ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi	85
Şekil 8.36. Sinüzoidal impulsif yük altında ankastre uçtaki M_z momentinin zamanla değişimi	85
Şekil 8.37. Sinüzoidal impulsif yük altında ankastre uçtaki M_y momentinin zamanla değişimi	86

Şekil 8.38. Yayın orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi	87
Şekil 8.39. Ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi	87
Şekil 8.40. Helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi	88
Şekil 8.41. Helisin orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi	88
Şekil 8.42. Ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi	89
Şekil 8.43. Ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi	89
Şekil 8.44. Tek eksenli kompozit helisel çubuk kesiti	90
Şekil 8.45. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	95
Şekil 8.46. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	96
Şekil 8.47. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	96
Şekil 8.48. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	97
Şekil 8.49. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	97
Şekil 8.50. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	98
Şekil 8.51. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	98
Şekil 8.52. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	99
Şekil 8.53. $D/d=5$ için farklı sarım sayılarını içeren helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	100
Şekil 8.54. $D/d=10$ için farklı sarım sayılarını içeren helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ¹)	100
Şekil 8.55. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	101
Şekil 8.56. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	101

Şekil 8.57. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	102
Şekil 8.58. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	102
Şekil 8.59. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	103
Şekil 8.60. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	103
Şekil 8.61. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	104
Şekil 8.62. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	104
Şekil 8.63. $D/d=5$ için farklı sarım sayılarını içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	105
Şekil 8.64. $D/d=10$ için farklı sarım sayılarını içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy ²)	105
Şekil 8.65. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	106
Şekil 8.66. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	106
Şekil 8.67. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	107
Şekil 8.68. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	107
Şekil 8.69. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	108
Şekil 8.70. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	108
Şekil 8.71. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	109

Şekil 8.72. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	109
Şekil 8.73. $D/d=5$ için farklı sarım sayılarını içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	110
Şekil 8.74. $D/d=10$ için farklı sarım sayılarını içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)	110
Şekil 8.75. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	111
Şekil 8.76. $D/d=5$ ve $n=4$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	111
Şekil 8.77. $D/d=5$ ve $n=8$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	112
Şekil 8.78. $D/d=5$ ve $n=12$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	112
Şekil 8.79. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	113
Şekil 8.80. $D/d=10$ ve $n=4$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	113
Şekil 8.81. $D/d=10$ ve $n=8$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	114
Şekil 8.82. $D/d=10$ ve $n=12$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi	114
Şekil 8.83. Kesitin tabaka durumları	115
Şekil 8.84. Serbest uçtaki düşey deplasmanın zamanla değişimi	116
Şekil 8.85. Kesitin tabaka durumları	117
Şekil 8.86. Helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi	118
Şekil B.1. Yük fonksiyonunun zamana göre değişimi	133
Şekil B.2. El-Centro 1940 depremine ait ivmenin K-G bileşeni	135
Şekil B.3. Tip No : 6 olan fonksiyonun zamanla değişimi	138
Şekil B.4. Tip No : 7 olan fonksiyonun zamanla değişimi	139
Şekil B.5. Tip No : 8 olan fonksiyonun zamanla değişimi	140

Şekil C.1. $f(t)$ fonksiyonunun ayrık tanımı	143
Şekil C.2. Fourier sabitleri	146
Şekil C.3. Yayılı Fourier sabitleri	146
Şekil C.4. Ayrık Fourier dönüşümünün simetri ve antisimetri özellikleri	150
Şekil C.5. Ayrık $f(t)$ fonksiyon değerleri	152
Şekil C.6. Ayrık F^F değerleri	153
Şekil C.7. F^F 'nin $[0, 2f_c]$ aralığına genişletilmesi	153
Şekil D.1. Mekanik sistem ve dinamik yük tipi	156
Şekil D.2. Sistem deplasmanının zamanla değişimi	158
Şekil D.3. Sistem deplasmanının zamanla değişimi	159



SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbf{r}$	: Durum vektörü
s	: Eğrisel koordinatlarda eksenel uzunluk
t	: Zaman
$\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$	: Teğet, normal ve binormal birim vektör
x_1, x_2, x_3	: Dik koordinat takımı
$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$	: Dik koordinat takımı üzerindeki birim vektörler
χ, τ	: Eğrilik ve tabii burulma
ε_{pjk}	: Permütasyon tansörü
$\gamma^\circ, \omega^\circ$	: Rölatif birim uzama ve rölatif birim dönme
$\mathbf{U}^\circ, \mathbf{\Omega}^\circ$	: Yerdeğiştirme ve dönme vektörü
e_{mn}	: Şekil değiştirme tansörü
$\mathbf{T}^\circ, \mathbf{M}^\circ$	: İç kuvvet ve moment vektörleri
$\mathbf{p}^{(ex)}, \mathbf{m}^{(ex)}$	: Birim boyta etkiyen yayılı dış kuvvet ve yayılı dış moment
$\mathbf{p}^{(in)}, \mathbf{m}^{(in)}$	: Birim boyta etkiyen kütleli atalet kuvveti ve kütleli atalet momenti
ρ	: Kütleli yoğunluk
A	: Kesit alanı
I_i	: Atalet momenti
μ, λ	: Lamé sabitleri
E, G, ν	: Elastisite modülü, kayma modülü ve Poisson oranı
δ_{ij}	: Kronecker delta
$[\mathbf{A}]$	: Uzama ve kayma rijitliği
$[\mathbf{D}]$	: Burulma ve eğilme rijitliği
ϕ	: Helisin yatay açısı
a	: Helisin sarıldığı silindirin yarıçapı
α	: Helisin yükselme açısı
z	: Laplace dönüşüm parametresi
$f(t)$	: Zamana bağlı fonksiyon
α_n, α_b	: Kayma düzeltme faktörleri

$\bar{\cdot}$	: Herhangi bir büyüklüğün Laplace dönüşümü
$\mathbf{B}$	: Sistemin yayılı dış yükleri
$\mathbf{F}$	: Diferansiyel matris
$\mathbf{Y}$	: Durum vektörü
ω	: Açısal frekans
$\{\bar{\mathbf{d}}\}$	: Eleman uç deplasmanları vektörü
$\{\bar{\mathbf{p}}\}$	: Eleman uç kuvvetlerini içeren vektör
$\{\bar{\mathbf{f}}\}$	: Eleman ankastrelik uç kuvvetleri
$[\bar{\mathbf{k}}]$	: Eleman dinamik rijitlik matrisi
$[\mathbf{T}]$	: Transformasyon matrisi
$[\mathbf{K}(\mathbf{z})]$	: Sistem dinamik rijitlik matrisi
$[\mathbf{D}]$	: Sistem bilinmeyen düğüm deplasmanları vektörü
$\{\mathbf{P}(\mathbf{z})\}$	: Sistem yük vektörü
η	: Viskozite katsayısı
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$	: Diferansiyel operatörler
$\mathbf{s}_{ij}$	: Deviatorik gerilme tansörü
$\mathbf{e}_{ij}$	: Deviatorik şekil değiştirme tansörü
k	: Hacim genleşme modülü
μ_v, λ_v	: Viskoelastik Lamé sabitleri
$\mathbf{E}_v, \nu_v$	: Viskoelastik malzeme sabitleri
g	: Viskoz sönüm oranı
$\mathbf{C}_{ij}$	: Malzeme rijitlik matrisi
$\mathbf{S}_{ij}$	: Malzeme esneklik matrisi
$\mathbf{C}'_{ij}$	: Dönüştürülmüş rijitlik matrisi
$\mathbf{S}'_{ij}$	: Dönüştürülmüş esneklik matrisi
$[\mathbf{T}], [\mathbf{R}]$	: Dönüşüm matrisleri
$\mathbf{Q}_{ij}$	: İndirgenmiş rijitlik matrisi
$\tilde{\sigma}_i$	: Kısaltılmış notasyonda gerilmeler
$\tilde{\epsilon}_i$	: Kısaltılmış notasyonda şekil değiştirmeler

$\tilde{Q}_{ij}$	: Kısaltılmış notasyonda indirgenmiş rijitlik matrisi
$\tilde{Q}'_{ij}$	: Dönüştürülmüş ve indirgenmiş rijitlik matrisi
$\tilde{\gamma}_j, \tilde{\omega}_j$	: Kısaltılmış notasyonda rölatif birim uzama ve rölatif birim dönme
A, B, F, D	: Çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini içeren matrisler
TFY	: Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi
TMM	: Taşıma matrisi metodu
SEY	: Sonlu elemanlar yöntemi



1. GİRİŞ

Eğri eksenli ve helisel çubukların dinamik davranışı önemli bir mühendislik problemi olarak güncelliğini korumaktadır. Helisel çubuklar, helisel merdivenler gibi yapı elemanı, araç süspansiyon sistemi ve motor sübop yayı gibi makina elemanı olarak kullanılmaktadır. Yaklaşık yüzyıl öncesinde başlayan bu çalışmalar, bilgisayar kullanımından sonra hız kazanmış ve hesap kolaylığı bakımından daha önce yapılan basitleştirmelerden kaçınılmıştır.

Bilindiği gibi, eğri eksenli uzaysal çubuk problemlerinin hareket denklemlerinin üç boyutlu elastisite teorisi ile elde edilmesi mümkün görünmemektedir. Bu nedenle problemin formülasyonunda Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorileri gibi yaklaşımlar yapılmaktadır. Ancak, bu şekilde yapılan yaklaşımlar ile matematiksel olarak çözülebilen denklemler elde edilebilmektedir. Elastik ince çubuk teorileri hakkında ilk çalışmalar Bernoulli-Euler kabullerine dayanmaktadır. Bernoulli-Euler elemanter teorisi, ince kirişler ve küçük titreşim modlarına sahip titreşimler için geçerlidir. Yüksek frekans modlarına sahip çubuklar için ise, Timoshenko kiriş teorisi daha iyi bir yaklaşım sunmaktadır. Timoshenko kiriş teorisi eksenel ve kayma deformasyonu ile dönme ataleti etkilerini gözönüne almaktadır.

Helisel çubuğun yay veya merdiven olarak kullanılması halinde çözülmesi gereken denklemler aynıdır. Helisel çubukların hesabı, genellikle yaklaşık yöntemlerle ve doğru eksenli çubuk kabulü ile yapılmaktadır. Çözümlerde genellikle rijitlik matrisi yöntemi kullanılmaktadır. Eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörünün doğru bir şekilde hesaplanması önemlidir.

Ayrıca eğri eksenli çubuklara ait çalışmalarda, enerji, sonlu farklar ve sonlu elemanlar gibi yaklaşık yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemlerle eleman rijitlik matrisinin hesaplanması çok zahmetli olup, sonuçları da kaçınılmaz bir şekilde yaklaşık olmaktadır.

Olayı idare eden kısmi diferansiyel denklemlere Laplace veya Fourier dönüşümleri uygulanarak zamandan bağımsız hale getirilmektedir ve çözümleri de basitleşmektedir.

Mühendislik yapılarında, analizlerinin basitliği nedeniyle, malzemelerin elastik olduğu kabul edilmektedir. Gerçekte, kullanılan bu malzemeler bünyesindeki iç sürtünmeden dolayı az veya çok viskoelastik özelliğe sahiptir. Bu nedenle, gerçek malzeme davranışını yansıtmak için elastik bünye bağıntıları yerine viskoelastik bünye bağıntıları kullanmak daha gerçekçi olacaktır. Birçok araştırmacı viskoelastik malzemelerin dinamik davranışını çeşitli modeller kullanarak araştırmışlardır. Viskoelastik malzeme kullanılması durumunda, elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla Laplace uzayında malzeme sabitleri kompleks karıştırları ile yer değiştirilmektedir.

1960'lı yıllardan beri kompozit malzeme ile ilgili çalışmalar devam etmektedir. Modern mühendislik yapılarında yüksek mukavemet, hafif malzeme gibi özelliklerden dolayı kompozit çubukların davranışı ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Kompozit malzemeler kiriş, plak ve kabuk gibi yapı sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Eğri eksenli çubukların serbest titreşimine ait birçok çalışma olmasına rağmen zorlanmış titreşim ile ilgili çalışmalar yeterli değildir. Viskoelastik malzemedan yapılmış doğru eksenli çubuklar, plaklar ve kabuklar gibi yapı sistemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Bununla birlikte helisel çubukların viskoelastik analizi ile ilgili yeterli sayıda çalışma bulunmamaktadır. Bu tez çalışmasında, helisel çubukların viskoelastik analizi için etkin bir yöntem uygulanmıştır.

Bu tezde, izotropik, anizotropik ve elastik, viskoelastik malzemeli eğri eksenli çubuk sistemlerin dinamik analizleri ayrı ayrı gözönüne alınmıştır. Malzemenin homojen, lineer elastik ve izotropik olduğu durumlar için zamanla değişen yükler altında eğri eksenli uzaysal çubukların zorlanmış titreşimi Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele alınmıştır. Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak eğri eksenli çubukları idare eden denklemler, silindirik helisel çubuklar için tekrar düzenlenmiştir. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Laplace uzayında kanonik formda elde edilen adi diferansiyel denklemler, dinamik rijitlik matrisini hesaplayabilmek için

tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Viskoelastik malzeme durumunda, elastik-viskoelastik anolojisini kullanarak, Laplace uzayında malzeme sabitleri kompleks karşılıkları ile yer değiştirilmektedir. Formülasyonda, hem elastisite modülü hem de Poisson oranının kompleks karşılıkları kullanılmaktadır. Çözümlerde, Kelvin viskoelastik sönüm modeli uygulanmıştır.

Malzemelerin izotropik veya anizotropik olmasına göre mekanik davranışları farklılık gösterirler. Uygulamada anizotropik malzemelerin birçoğu ortotropik özellik sergilemektedir. Bu tezde ayrıca, lineer elastik, homojen ve ortotropik malzemeli, simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış (cross-ply) silindirik helisel çubukların dinamik davranışları da araştırılmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümler, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak zaman uzayına dönüştürülmüştür. Sonlu elemanlar ile analizlerde yüzlerce eleman alınması gerekirken, bu çalışmada önerilen çözüm yöntemi ile bir veya birkaç elemanla istenilen hassasiyette sonuçlara ulaşılabilir. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler, uygun integrasyon adım aralığı seçilerek tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile Laplace uzayında istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde lineer elastik, viskoelastik ve anizotropik çubuk malzemesi durumları için silindirik helisel çubukların dinamik davranışları ayrı ayrı ele alınmaktadır. Bu nedenle, eğri eksenli çubuklara ait çalışmalar üç ana başlık halinde sunulacaktır.

2.1. Elastik Çubuklarla İlgili Çalışmalar

Massoud (1965), vektörel formda ince uzaysal çubukların hareket denklemlerini elde etmek için D'Alembert prensibini kullanmıştır. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini gözönüne almıştır. Ayrıca silindirik helisel çubukların serbest titreşimi için skaler denklemleri vermiştir.

Wittrick (1966), Timoshenko kiriş teorisini kullanarak helisin diferansiyel denklemlerini elde etmiştir. Yarı sonlu yayların dalga yayılımlarını incelemiş, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini ihmal ederek yaklaşık çözümler vermiştir.

Kıral ve Ertepinar (1974a, 1974b, 1974c), Timoshenko kiriş teorisini kullanarak kanonik formda uzaysal eğri eksenli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimini idare eden denklemleri elde etmişlerdir. Serbest titreşim analizini, taşıma matrisi metodu ile yapmışlardır. Zorlanmış titreşim analizi için daha etkin bir yöntem kullanılmasına ihtiyaç olduğunu belirtmişlerdir.

Kıral ve Ural (1975), Timoshenko kiriş teorisini kullanarak, Kıral ve Ertepinar (1974a-c) çalışmalarında elde edilen eğri eksenli çubukların hareket denklemlerini taşıma matrisi metodu ve ters dönüşüm için 'Maximum Degree of Precision' ters Laplace dönüşüm tekniğini uygulayarak çözmüşlerdir. Bu ters dönüşüm tekniği, çok kısa zaman aralığı için doğru sonuç vermektedir.

Mottershead (1980), statik durum için Wittrick'in (1966) verdiği denklemleri kullanarak, helisel yayların doğal frekanslarını sonlu elemanlar ile hesaplamış ve bunları kendi deneysel sonuçları ile karşılaştırmıştır.

Pearson (1982), ön yüklü dairesel kesitli silindirik helisel yayların davranışını analiz etmek için Wittrick (1966) tarafından verilen dinamik denklemleri

genişletmiştir. Taşıma matrisi metodunu kullanarak helisel yayların serbest titreşimini çalışmıştır.

Pearson ve Wittrick (1986), helisel yayların serbest titreşimi için Bernoulli-Euler giriş teorisine dayanan dinamik rijitlik matrisini elde etmiştir. Bu çalışmada helisel yayların serbest titreşimi için kayma deformasyonu etkisini ihmal edilmiştir.

Nagaya ve ark. (1986), daire kesitli, dairesel olmayan silindirik helisel yayların serbest titreşimini hem deneysel hem de eşdeğer taşıma matrisi metodu ile incelemişlerdir. Sadece eksenel deformasyon etkisini gözönüne alarak statik eleman taşıma matrisini kapalı formda vermişlerdir.

Lin ve Pisano (1987, 1988), değişken yükselme açılı ve yarıçaplı dairesel kesitli helisel yayların genel dinamik denklemlerini çıkarmışlardır.

Tabarrok ve ark. (1988), sonlu elemanlar modeli yardımı ile tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukların serbest titreşimini incelemişler ve problemin mod deplasmanlarını bulmuşlardır.

Haktanır (1990), Timoshenko giriş teorisi kullanarak ön yüklü silindirik helisel çubukların statik ve dinamik yükler altındaki davranışını incelemiştir. Helisel çubukların zamanla değişen yükler altında davranışını Laplace uzayında taşıma matrisi metodu ile incelemiştir. Laplace uzayında elde ettiği çözümlerden zaman uzayına geçmek için 'Maximum Degree of Precision' ters Laplace dönüşüm tekniğini kullanmıştır. Bu dönüşüm tekniğinin çok kısa zaman aralığı için uygun sonuç vermesine karşın ilerleyen zaman dilimlerinde çözümün bozulduğu belirtilmektedir. Bunun için iyi bir ters Laplace dönüşüm tekniğine ihtiyaç duyulmaktadır. Temel (1996), çeşitli ters Laplace dönüşüm yöntemlerini karşılaştırmış ve en iyi sayısal ters dönüşüm tekniğinin Durbin'in modifiye edilmiş sayısal ters Laplace dönüşüm tekniği olduğunu çeşitli örnekler üzerinde göstermiştir. Bu çalışmada 'Maximum Degree of Precision' ters dönüşüm tekniğinin çok kısa zaman aralığında veya bir periyotluk zaman diliminde uygun çözüm verdiği görülmektedir.

Jiang ve ark. (1991), helisel yayların uzama-burulma titreşimini teorik olarak incelemiştir.

Haktanır ve Kırıl (1993), helisel merdivenler ve yayların statik analizini taşıma matrisi metoduna dayalı rijitlik matrisini kullanarak incelemişlerdir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini gözönüne almışlardır.

Haktanır (1995), keyfi yükler altında helisel yayların statik davranışını incelemiştir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanarak eleman rijitlik matrisini elde etmiştir.

Yıldırım (1996), Taşıma matrisi metodu yardımıyla helisel yayların serbest titreşimini incelemiştir. Ayrıca Yıldırım (1999a), helisin eleman rijitlik matrisi ve tutarlı kütle matrisi kullanarak silindirik helisel yayların serbest titreşimini incelemiştir.

Lee ve Thompson (2001), son zamanlarda helisel yayların dalga hareketini ve serbest titreşim analizi için dinamik rijitlik formülasyonunu çalışmışlardır. Dinamik rijitlik matrisi ile serbest titreşim frekanslarını hesaplamak için taşıma matrisine dayalı Wittrick-Williams algoritmasını kullanmıştır.

Temel ve Çalım (2003), silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında zorlanmış titreşimini Laplace uzayında teorik olarak incelemişlerdir. Timoshenko kiriş teorisi kullanarak eğri eksenli çubukları idare eden denklemleri, silindirik helisel çubuklar için tekrar düzenlemişlerdir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler, Timoshenko çubuk teorisi kullanarak Kırıl ve Ertepinar (1974a-c) tarafından daha önceki çalışmalarında elde edilmiştir. Bu çalışmada ise, davranışı idare eden denklemler silindirik helisel çubuklar için yeniden yazılarak tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile Laplace uzayında etkin bir şekilde çözülmüştür.

2.2. Viskoelastik Çubuklarla İlgili Çalışmalar

Adey ve Brebbia (1973), elastik problemin ters dönüşümünü elde etmek için yaklaşık bir yöntem kullanmışlardır.

Yamada ve ark. (1974), viskoelastik çubukların serbest titreşim frekanslarını incelemişlerdir.

Flügge (1975), viskoelastik çubukların Laplace dönüşüm uygulamalarını incelemiştir.

Kıral ve ark. (1976), eğri eksenli viskoelastik çubukların hareket denklemlerini elde etmişlerdir. Fakat bu problemi etkin olarak çözememişlerdir. Analizlerde taşıma matrisi metodunu kullanmışlardır. Ters Laplace dönüşümü için 'Maximum Degree of Precision' yöntemini kullanmışlar, ki bu yöntem çok kısa zaman aralığı için doğru sonuç vermektedir.

Findley ve ark. (1976), viskoelastik kirişleri idare eden denklemleri çözmek için mütekabiliyet prensibi ve süperpozisyon prensibini kullanmışlardır.

Christensen (1982), Fourier dönüşümü kullanarak viskoelastik kirişlerin dinamik davranışını incelemiştir. Kompleks geometri ve bünye bağıntılarının kapalı çözümü mümkün olmadığından, sayısal çözüm tekniklerini adapte etmiştir.

Chen ve Lin (1982), viskoelastik malzeme modeli için zamana bağlı sünme ifadesini kullanarak kirişlerin dinamik davranışlarını çalışmışlardır.

White (1986), kuazi-statik bir problemi sonlu elemanlar yöntemiyle çözebilmek için, zamana bağlı terimlere sonlu farklar yaklaşımı uygulayarak, Hereditary integral tipinde bünye bağıntılarını kullanmıştır.

Chen (1995), lineer viskoelastik Timoshenko kirişinin kuazi-statik ve dinamik davranışını incelemiştir. Formülasyonda Poisson oranı sabit, sadece elastisite modülü viskoelastik olarak alınmıştır. Normal gerilme-şekil değiştirme ve kayma gerilmesi-şekil değiştirme bağıntılarını aynı Prony serisine açmıştır. Laplace dönüşümü yardımıyla zaman terimini yok etmek için Hybrid metodunu kullanmış ve ortak denklemleri sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüştür.

Aköz ve Kadioğlu (1996), Gâteaux diferansiyeli kullanarak elastik dairesel kirişler için karışık sonlu elemanlar yöntemini incelemişlerdir. Benzer bir yaklaşım kullanarak, Aköz ve Kadioğlu (1999), viskoelastik Timoshenko ve Euler-Bernoulli kirişinin kuazi-statik ve dinamik davranışını çalışmışlardır. Kadioğlu ve Aköz (1999), hem Poisson oranı hem de elastisite modülünü viskoelastik olarak dairesel kirişlerin kuazi-statik ve dinamik davranışı için gevşeme modülünün genel formunu incelemişlerdir. İdare eden denklem ve sınır şartlarındaki zamana bağlı türevlerden kurtulmak için Laplace-Carson dönüşümünü kullanmışlardır.

Kadioğlu (1999), viskoelastik çubukların kuazi-statik ve dinamik davranışlarına ait karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirmiştir. Dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkilerini gözönüne almıştır. Formülasyonda, hem elastisite modülü hem de Poisson oranı viskoelastiktir.

Park ve Schapery (1999), Prony serilerine dayanan lineer viskoelastik malzeme fonksiyonları ile modülleri arasında dönüşümü sağlayan sayısal bir metod önermişler ve bu metodu polimerik malzemeler için seçilen deneysel verileri kullanarak test etmişlerdir. Schapery ve Park (1999), bir önceki çalışmalarında önerdikleri modelin doğruluğunu sayısal örnekler üzerinde göstermişlerdir.

Ilyasov ve Aköz (2000), plakların statik ve dinamik davranışını incelemişlerdir. Viskoelastik bünye denklemlerini Boltzmann-Volterra formunda ifade etmişlerdir.

Park (2001), viskoelastik sönümleyicilerin matematiksel modeli için farklı yaklaşımları incelemiş ve diğer teorik yöntemlerle kıyaslamıştır.

Kim ve Kim (2001), periyodik yük altında tabakalı kirişlerin parametrik kararsızlığını çalışmışlardır. Lineer viskoelastik bünye denklemleri için Boltzmann süperpozisyonu ile Hamilton prensibini kullanarak idare eden denklemleri elde etmişlerdir.

Temel ve ark. (2003a), lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların kuazi-statik ve dinamik davranışını incelemişlerdir. Timoshenko kiriş teorisi kullanarak eğri eksenli çubukları idare eden denklemleri Laplace uzayında helisel çubuklar için yeniden yazılmıştır. Problemin dinamik rijitlik matrisini Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla hesaplamışlardır. Çözümlerde Kelvin viskoelastik sönüm modelini uygulamışlardır.

2.3. Kompozit Çubuklarla İlgili Çalışmalar

Chen ve Yang (1985), anizotropik tabakalı kirişler için sonlu elemanlar yöntemi kullanarak etkin bir çözüm yöntemi geliştirmişlerdir. Formülasyonda kayma deformasyonu etkisini dahil etmişlerdir.

Chandrashekhara ve Bangera (1992), tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimi için, yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı bir sonlu eleman

modeli geliştirmişlerdir. Formülasyonda, kayma deformasyonu ve dönme ataleti terimleri gözönüne alınmıştır.

Krishnaswamy ve ark. (1992), tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimini idare eden dinamik denklemleri Hamilton prensibini kullanarak geliştirmişlerdir. Enerji formülasyonunda ters kayma etkisi ve dönme ataleti terimleri gözönüne alınmıştır.

Qatu (1992), sığ yarıçaplı, tabakalı kompozit kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimi için denklem takımını sunmuştur. Basit mesnetli eğrisel çubukların serbest titreşimini kesin olarak elde etmiştir. Keyfi sınır şartlarının yaklaşık çözümünü elde etmek için Ritz metodu ve cebrik polinomlar kullanmıştır. Eğriliğin, malzeme ortotropisi ve tabaka sıklığının serbest titreşim frekansına etkisini çalışmıştır.

Qatu ve Elsharkawy (1993), genel sınır şartlarında, büyük eğrilik yarıçaplı tabakalı kompozit kemerlerin serbest titreşimi için kesin çözümler vermişlerdir. Serbest titreşim frekanslarını Ritz metodu kullanarak elde etmişlerdir.

Nabi ve Ganesan (1994), tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşimi için birinci mertebe teorisi kullanarak genel bir sonlu eleman geliştirmiştir.

Abramovich ve Livshits (1994), Timoshenko kiriş teorisi kullanarak simetrik olmayan çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış kompozit kirişlerin serbest titreşimini çalışmışlardır. Dönme ataleti ve kayma deformasyonu etkisi formülasyonda gözönüne alınmıştır.

Rao ve Ganesan (1997), sonlu eleman modeli kullanarak değişken kompozit kirişlerin harmonik davranışını araştırmışlardır.

Yıldırım ve ark. (1999a, 1999b), Bernoulli-Euler ve Timoshenko kiriş teorisi kullanarak düzlemi içinde ve düzlemine dik simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış kirişlerin serbest titreşimini taşıma matrisi yardımıyla incelemişlerdir.

Yıldırım ve ark. (1999c), Yıldırım ve Sancaktar (2000), Timoshenko kiriş teorisi kullanarak simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış silindirik helisel çubukların serbest titreşimini Taşıma Matrisi yardımıyla incelemişlerdir.

Yıldırım (1999b), Timoshenko kiriş teorisi kullanarak ön burulmalı elastik uzaysal çubukların ısı etkisi altındaki titreşim davranışını teorik olarak incelemiştir.

Formülasyonda, malzeme anizotropisi, çubuk eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini gözönüne almıştır.

Yıldırım (1999c), çapraz elyaf takviyeli tabakadan yapılmış silindirik helisel çubukların serbest titreşimini teorik olarak incelemiştir. Matematiksel modelde birinci mertebe teorisini uygulamıştır.

İnce (2000), tabakalı kompozit düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzleme dik serbest titreşim analizini, taşıma matrisi metodu ile teorik olarak incelemiştir. Formülasyonda, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini gözönüne almıştır. Çubuk kesitinin çubuk eksenine boyunca değişken olması halini gözönüne alarak, boyutsuz serbest titreşim frekanslarını grafik formda sunmuştur.

Yıldırım (2001), tek eksenli kompozit silindirik helisel çubukların serbest titreşim problemini teorik olarak modellemiştir. Formülasyonda, dönme ataleti, kayma ve eksenel deformasyonu etkilerini gözönüne almıştır. Anizotropik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların serbest titreşimini idare eden diferansiyel denklemleri taşıma matrisi metodu yardımı ile çözmüştür.

Tabakalı kompozit malzemeden yapılmış helisel çubukların serbest titreşimine ait birçok çalışma olmasına rağmen zamanla değişen yükler altında zorlanmış titreşimi ile ilgili çalışmaya rastlanmamıştır. Kompozit malzemeli helisel çubukların zamanla değişen yükler altındaki dinamik davranışı Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile yapılmıştır.

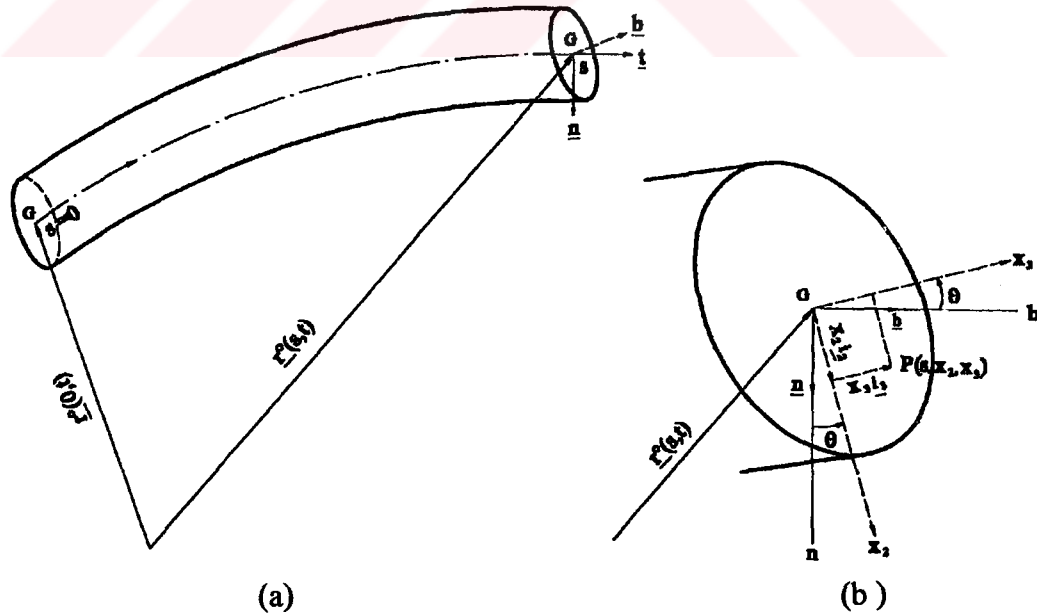
3. UZAYSAL EĞRİ EKSENLİ ÇUBUK SİSTEMLER

3.1. Çubuk Geometrisi

Tabii olarak eğilmiş ve burulmuş uzaysal bir çubuk gözönüne alalım. Çubuk eksen, geometrik merkezi G 'nin yörüngesi olarak tanımlanır ve eksen üzerinde keyfi olarak seçilen $s=0$ noktasından ölçülen, $t=0$ anındaki durum vektörü $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}^0(s, 0)$ olarak verilir (Şekil 3.1a). Eğri eksenli çubuklarda, eksene bağlı hareketli bir koordinat takımının seçilmesi, problemin tanımlanmasında büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Herhangi bir t anında, çubuk ekseninin orijininde $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ birim vektörleri olarak tanımlanan bir hareketli koordinat takımı seçilmiştir.

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}^0(s, t)}{\partial s} \quad (3.1)$$

Burada $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektörleri olarak adlandırılmaktadır. $\mathbf{t}$ artan s yönünde, $\mathbf{n}$ teğet birim vektöre dik ve yönü eğrilik merkezine doğrudur. Binormal birim vektör $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ olup, $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ birim vektörlerinin oluşturdukları düzleme diktir.



Şekil 3.1. Çubuk geometrisi

Bu şekilde tarif edilen $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ birim vektörlerinin teşkil ettiği takım sağ el kuralı ile temsil edilir ve aralarında Frenet formülleri denilen türevsel bağıntılar mevcuttur (Sokolnikoff ve Redheffer, 1958).

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \chi \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = \tau \mathbf{b} - \chi \mathbf{t}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -\tau \mathbf{n} \quad (3.2)$$

Burada, χ ve τ , sırasıyla eksenin eğriliği ve tabii burulmasıdır. χ , eğrilik daima pozitiftir. τ ise, artan s yönünde eğri üzerindeki $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ normal düzlemi $\mathbf{t}$ eksenine etrafında pozitif yönde dönerse pozitif, aksi halde negatif olmaktadır. χ ve τ ifadeleri yer vektörü $\mathbf{r}^o(s, t)$ nin türevleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\chi = \left| \frac{\partial^2 \mathbf{r}^o}{\partial s^2} \right|, \quad \tau = - \frac{\frac{\partial \mathbf{r}^o}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}^o}{\partial s^2} \times \frac{\partial^3 \mathbf{r}^o}{\partial s^3}}{\chi^2} \quad (3.3)$$

Düzlemsel çubuklar için $\tau=0$ ve doğru eksenli çubuklar için $\chi=\tau=0$ alınmaktadır.

Kesitin tabii burulmasını gözönüne almak için, x_1 eksenini kesitin t doğrultusu ve x_2, x_3 kesitin asal eksenleri olmak üzere, ikinci bir dik takım (x_1, x_2, x_3) seçilmektedir (Şekil 3.1b). $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ ve $\mathbf{i}_3$ birim vektörleri sırasıyla x_1, x_2 ve x_3 eksenleri üzerinde tanımlanmaktadır. (Şekil 3.1b)'den (3.4) ifadesi yazılabilir.

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{n} = \mathbf{i}_2 \cos \theta - \mathbf{i}_3 \sin \theta, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i}_2 \sin \theta + \mathbf{i}_3 \cos \theta \quad (3.4)$$

(3.2) ve (3.4) denklemleri yardımı ile $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ birim vektörleri arasındaki diferansiyel bağıntılar

$$\frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial s} = \chi_3 \mathbf{i}_2 - \chi_2 \mathbf{i}_3 \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial s} = \chi_1 \mathbf{i}_3 - \chi_3 \mathbf{i}_1 \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_3}{\partial s} = \chi_2 \mathbf{i}_1 - \chi_1 \mathbf{i}_2 \quad (3.5c)$$

olup, kapalı olarak

$$\frac{\partial \mathbf{i}_p}{\partial s} = \varepsilon_{pjk} \chi_k \mathbf{i}_j \quad (p, j, k=1,2,3) \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\chi_1 = \tau - \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad \chi_2 = \chi \sin \theta, \quad \chi_3 = \chi \cos \theta \quad (3.7)$$

bağıntıları olup, ε_{pjk} permütasyon tansörleridir. Çubuk doğru eksenli ($\chi = \tau = 0$) olsa bile, tabii burulma ile ilgili χ_1 terimi sıfırdan farklı olmaktadır. Tor demiri ve perfaratör bıçaklarında durum böyledir.

3.2. Geometrik Uygunluk Denklemleri ve Şekil Değiştirme Tansörü

Çubuk eksenini üzerinde herhangi bir s noktasında yer değiştirme $\mathbf{U}^o(s, t)$ ve kesitin G ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönme $\boldsymbol{\Omega}^o(s, t)$ vektörleri ile gösterilmektedir. Ayrıca, çubuk eksenini üzerinde birim boyun rölative uzaması $\gamma^o(s, t)$ ve rölative dönmesi $\omega^o(s, t)$ vektörleri ile tarif edilmektedir. Geometrik uygunluk denklemleri (3.8) eşitlikleri ile verilmektedir (İnan, 1966).

$$\gamma^o = \frac{\partial \mathbf{U}^o}{\partial s} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}^o, \quad \omega^o = \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}^o}{\partial s} \quad (3.8)$$

Deformasyonların çok küçük oldukları kabulü ile, (3.8) denkleminde verilen vektörel uygunluk denklemleri, aşağıdaki gibi x_1, x_2, x_3 dik koordinat takımında skaler formda tekrar düzenlenebilir (Kıral ve Ertepinar, 1974a).

$$\gamma_1^o = \frac{\partial U_1^o}{\partial s} - \chi_3 U_2^o + \chi_2 U_3^o \quad (3.9a)$$

$$\gamma_2^o = \frac{\partial U_2^o}{\partial s} + \chi_3 U_1^o - \chi_1 U_3^o - \Omega_3^o \quad (3.9b)$$

$$\gamma_3^0 = \frac{\partial U_3^0}{\partial s} + \chi_1 U_2^0 - \chi_2 U_1^0 + \Omega_2^0 \quad (3.9c)$$

$$\omega_1^0 = \frac{\partial \Omega_1^0}{\partial s} - \chi_3 \Omega_2^0 + \chi_2 \Omega_3^0 \quad (3.9d)$$

$$\omega_2^0 = \frac{\partial \Omega_2^0}{\partial s} + \chi_3 \Omega_1^0 - \chi_1 \Omega_3^0 \quad (3.9e)$$

$$\omega_3^0 = \frac{\partial \Omega_3^0}{\partial s} + \chi_1 \Omega_2^0 - \chi_2 \Omega_1^0 \quad (3.9f)$$

Kesitin herhangi bir noktasındaki şekil değiştirme tansörü e_{mn} , bu noktayı içine alan kesitin geometrik merkezinin rölatif birim uzaması $\gamma^0(s, t)$ ve rölatif birim dönmesi $\omega^0(s, t)$ cinsinden yaklaşık olarak elde edilebilir (Kıral ve Ertepinar, 1974a). Burada kesit çarpılmasının etkisi ihmal edilmektedir.

$$e_{11} = \gamma_1^0 - x_2 \omega_3^0 + x_3 \omega_2^0 \quad (3.10a)$$

$$e_{12} = e_{21} = \frac{1}{2}(\gamma_2^0 - x_3 \omega_1^0) \quad (3.10b)$$

$$e_{13} = e_{31} = \frac{1}{2}(\gamma_3^0 + x_2 \omega_1^0) \quad (3.10c)$$

$$e_{22} = e_{33} = e_{23} = e_{32} = 0 \quad (3.10d)$$

3.3. Hareket Denklemleri

$T(s, t)$ ile t anında s noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel toplamı ve $M(s, t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterilsin. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $p^{ex}(s, t)$ ve yayılı moment $m^{ex}(s, t)$ olsun. Yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu kabulü ile hareket denklemleri (Kıral ve Ertepinar, 1974c):

$$\frac{\partial T^0}{\partial s} + p^{(ex)} = p^{(in)}, \quad \frac{\partial M^0}{\partial s} + t \times T^0 + m^{(ex)} = m^{(in)} \quad (3.11)$$

şeklinde verilmektedir. $\mathbf{p}^{(in)}$ ve $\mathbf{m}^{(in)}$ çubuk ekseninin birim uzunluğundaki kütleli atalet kuvveti ve kütleli atalet momentidir. Kesit çarpılmasının ihmal edildiği veya kesitin çift simetriye sahip olduğu durumlar için x_1, x_2, x_3 dik koordinat takımında $\mathbf{p}^{(in)}$ ve $\mathbf{m}^{(in)}$ vektörlerinin bileşenleri

$$\mathbf{p}_i^{(in)} = -\rho A \frac{\partial^2 U_i^0}{\partial t^2}, \quad \mathbf{m}_i^{(in)} = -\rho I_i \frac{\partial^2 \Omega_i^0}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.12)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada, ρ kütleli yoğunluğu, A kesit alanını, I_i ise x_i eksenlerine göre atalet momentlerini göstermektedir.

(3.12) eşitlikleri (3.11) ifadesinde yerlerine konulduğunda ve (3.6) denklemi yardımıyla, x_i koordinat takımında skaler formdaki hareket denklemleri

$$\frac{\partial T_1^0}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_1^0}{\partial t^2} + \chi_3 T_2^0 - \chi_2 T_3^0 - p_1^{(ex)} \quad (3.13a)$$

$$\frac{\partial T_2^0}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_2^0}{\partial t^2} + \chi_1 T_3^0 - \chi_3 T_1^0 - p_2^{(ex)} \quad (3.13b)$$

$$\frac{\partial T_3^0}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_3^0}{\partial t^2} + \chi_2 T_1^0 - \chi_1 T_2^0 - p_3^{(ex)} \quad (3.13c)$$

$$\frac{\partial M_1^0}{\partial s} = \rho I_1 \frac{\partial^2 \Omega_1^0}{\partial t^2} + \chi_3 M_2^0 - \chi_2 M_3^0 - m_1^{(ex)} \quad (3.13d)$$

$$\frac{\partial M_2^0}{\partial s} = \rho I_2 \frac{\partial^2 \Omega_2^0}{\partial t^2} + \chi_1 M_3^0 - \chi_3 M_1^0 + T_3^0 - m_2^{(ex)} \quad (3.13e)$$

$$\frac{\partial M_3^0}{\partial s} = \rho I_3 \frac{\partial^2 \Omega_3^0}{\partial t^2} + \chi_2 M_1^0 - \chi_1 M_2^0 - T_2^0 - m_3^{(ex)} \quad (3.13f)$$

şeklinde açık olarak yazılmaktadır.

3.4. Elastik Bünye Denklemleri

Çubuk malzemesinin homojen, lineer elastik ve izotrop olduğu kabulü ile elastik bünye denklemleri Hooke kanununa göre

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.14)$$

veya

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij} \quad (3.15)$$

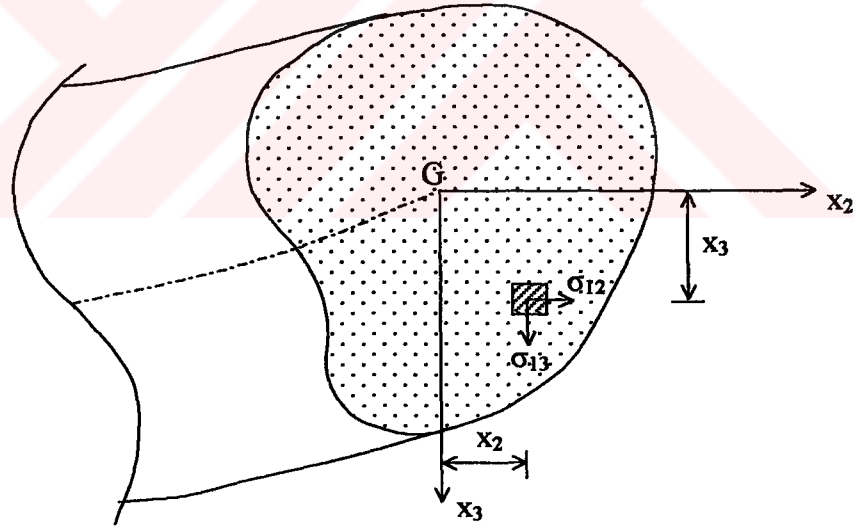
şeklinde yazılabilir (Boley ve Weiner, 1966). Burada, λ Lamé sabiti, ν Poisson oranı, E elastisite modülü, G kayma modülü olup, δ_{ij} ise birim matrisin bileşenlerini göstermektedir. Klasik çubuk teorilerinden

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \quad (3.16)$$

olduğu kabul edilmektedir (Sokolnikoff, 1956). Bu kabuller altında, (3.14) ifadesinde belirtilen gerilme-şekil değiştirme tansörleri arasında

$$\sigma_{11} = E e_{11}, \sigma_{12} = 2G e_{12}, \sigma_{13} = 2G e_{13}, \sigma_{23} = 0 \quad (3.17)$$

bağıntıları elde edilmektedir.



Şekil 3.2. Çubuk kesiti üzerindeki küçük eleman

$T(s, t)$ ile s noktasındaki kesite etkiyen iç kuvvetlerin vektörel bileşkesi ve $M(s, t)$ ile bu kuvvetlerin G ağırlık merkezine indirgendikleri zaman elde edilen

moment olarak tarif edilmektedir. Bu tariflere göre, $T(s, t)$ ve $M(s, t)$ vektörlerinin x_1, x_2, x_3 eksenleri üzerindeki bileşenleri

$$T_i = \int_A \sigma_{li} dA \quad (i=1,2,3) \quad (3.18)$$

$$M_1 = \int_A (x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12}) dA \quad (3.19a)$$

$$M_2 = \int_A x_3 \sigma_{11} dA \quad (3.19b)$$

$$M_3 = - \int_A x_2 \sigma_{11} dA \quad (3.19c)$$

integralleri ile hesaplanmaktadır (Şekil 3.2). Kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabulü ile, (3.10) ve (3.17-3.19) eşitliklerinden bünye denklemleri

$$T_1 = EA \gamma_1^0, \quad T_i = GA \gamma_i^0 \quad (i=2,3) \quad (3.20)$$

$$M_1 = GI_1 \omega_1^0, \quad M_i = EI_i \omega_i^0 \quad (i=2,3) \quad (3.21)$$

olarak elde edilmektedir. Çubuk kesitin kayma merkezi ile geometrik merkezinin çakıştığı, kesit çarpılmasının ihmal edildiği ve çubuk malzemesinin homojen, izotropik ve lineer elastik olduğu kabulleri altında, rölatif birim uzama $\gamma^0(s, t)$ ve rölatif birim dönme $\omega^0(s, t)$ ile $T(s, t)$ ve $M(s, t)$ arasında aşağıdaki bünye denklemlerini yazmak mümkündür.

$$T_i^0 = A_{ij} \gamma_j^0, \quad M_i^0 = D_{ij} \omega_j^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.22)$$

Burada A_{11} kesitin uzama rijitliğini, A_{22} ve A_{33} de kayma rijitliklerini, D_{11} ise kesitin burulma rijitliğini, D_{22} ve D_{33} de eğilme rijitliklerini göstermektedir.

$$[A] = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_3 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} GI_1 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & EI_3 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Burada A kesit alanı, E ve G elastik sabitler, α_2 ve α_3 kayma düzeltme faktörleridir. [A] ve [D] matrisleri, çubuk malzemesi ve kesit geometrisine bağlı olup, $\gamma^o(s, t)$ ve $\omega^o(s, t)$ değişkenlerinden bağımsızdır.

Geometrik uygunluk denklemleri (3.8), bünye denklemleri (3.22) ve (3.11) hareket denklemlerini birlikte kullanarak x_1, x_2, x_3 koordinat takımında eğri eksenli uzaysal çubukların hareketini idare eden diferansiyel denklemler skaler formda ifade edilmektedir.

$$\frac{\partial U_1^o}{\partial s} = \chi_3 U_2^o - \chi_2 U_3^o + \frac{T_1^o}{A_{11}} \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial U_2^o}{\partial s} = -\chi_3 U_1^o + \chi_1 U_3^o + \Omega_3^o + \frac{T_2^o}{A_{22}} \quad (3.24b)$$

$$\frac{\partial U_3^o}{\partial s} = -\chi_1 U_2^o + \chi_2 U_1^o - \Omega_2^o + \frac{T_3^o}{A_{33}} \quad (3.24c)$$

$$\frac{\partial \Omega_1^o}{\partial s} = \chi_3 \Omega_2^o - \chi_2 \Omega_3^o + \frac{M_1^o}{D_{11}} \quad (3.24d)$$

$$\frac{\partial \Omega_2^o}{\partial s} = -\chi_3 \Omega_1^o + \chi_1 \Omega_3^o + \frac{M_2^o}{D_{22}} \quad (3.24e)$$

$$\frac{\partial \Omega_3^o}{\partial s} = -\chi_1 \Omega_2^o + \chi_2 \Omega_1^o + \frac{M_3^o}{D_{33}} \quad (3.24f)$$

$$\frac{\partial T_1^o}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_1^o}{\partial t^2} + \chi_3 T_2^o - \chi_2 T_3^o - p_1^{(ex)} \quad (3.24g)$$

$$\frac{\partial T_2^o}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_2^o}{\partial t^2} + \chi_1 T_3^o - \chi_3 T_1^o - p_2^{(ex)} \quad (3.24h)$$

$$\frac{\partial T_3^o}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_3^o}{\partial t^2} + \chi_2 T_1^o - \chi_1 T_2^o - p_3^{(ex)} \quad (3.24i)$$

$$\frac{\partial M_1^o}{\partial s} = \rho I_1 \frac{\partial^2 \Omega_1^o}{\partial t^2} + \chi_3 M_2^o - \chi_2 M_3^o - m_1^{(ex)} \quad (3.24j)$$

$$\frac{\partial M_2^o}{\partial s} = \rho I_2 \frac{\partial^2 \Omega_2^o}{\partial t^2} + \chi_1 M_3^o - \chi_3 M_1^o + T_3^o - m_2^{(ex)} \quad (3.24k)$$

$$\frac{\partial M_3^o}{\partial s} = \rho I_3 \frac{\partial^2 \Omega_3^o}{\partial t^2} + \chi_2 M_1^o - \chi_1 M_2^o - T_2^o - m_3^{(ex)} \quad (3.24l)$$

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ eksenleri asal eksenler olmaktadır. Bu kabullere göre $\theta = 0$ olup $\chi_1 = \tau$, $\chi_2 = 0$ ve $\chi_3 = \chi$ olmaktadır. Eğri eksenli çubukların davranışını idare eden diferansiyel denklemler $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ hareketli eksen takımında şöyle yazılabilmektedir.

$$\frac{\partial U_t}{\partial s} = \chi U_n + \frac{1}{EA} T_t \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial s} = -\chi U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{\alpha_n}{GA} T_n \quad (3.25b)$$

$$\frac{\partial U_b}{\partial s} = -\tau U_n - \Omega_n + \frac{\alpha_b}{GA} T_b \quad (3.25c)$$

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial s} = \chi \Omega_n + \frac{1}{GI_t} M_t \quad (3.25d)$$

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial s} = -\chi \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{1}{EI_n} M_n \quad (3.25e)$$

$$\frac{\partial \Omega_b}{\partial s} = -\tau \Omega_n + \frac{1}{EI_b} M_b \quad (3.25f)$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} + \chi T_n - p_t^{(ex)} \quad (3.25g)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} + \tau T_b - \chi T_t - p_n^{(ex)} \quad (3.25h)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial s} = \rho A \frac{\partial^2 U_b}{\partial t^2} - \tau T_n - p_b^{(ex)} \quad (3.25i)$$

$$\frac{\partial M_t}{\partial s} = \rho I_t \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} + \chi M_n - m_t^{(ex)} \quad (3.25j)$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial s} = \rho I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2} + \tau M_b - \chi M_t + T_b - m_n^{(ex)} \quad (3.25k)$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial s} = \rho I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2} - \tau M_n - T_n - m_b^{(ex)} \quad (3.25l)$$

4. SİLİNDİRİK HELİSEL ÇUBUKLARIN SERBEST VE ZORLANMIŞ TİTREŞİMİ

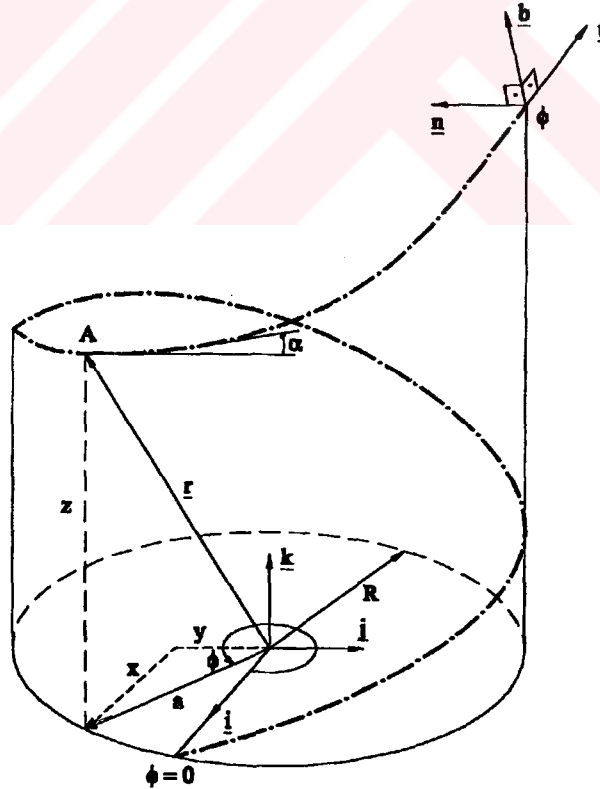
Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele alınacaktır. Bu yüzden zorlanmış titreşim hali önce sunulacaktır.

4.1. Silindirik Helisel Çubukların Zorlanmış Titreşimi

Bu bölümde silindirik helisel çubuklar, eğri eksenli uzaysal çubukların özel hali olarak ele alınmıştır. Taban daresi üzerinde ölçülen ϕ açısı parametre olarak seçilmektedir. Buna göre helisin parametrik denklemleri

$$x = a \cos \phi, \quad y = a \sin \phi, \quad z = h \phi \quad (4.1)$$

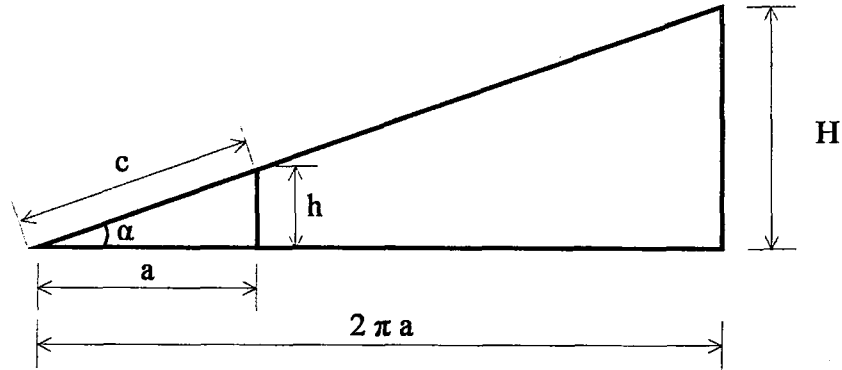
bağıntıları ile ifade edilmektedir. Burada ϕ , helisi çevreleyen silindirin taban daresi üzerinde x-ekseninden itibaren ölçülmektedir.



Şekil 4.1. Silindirik helis geometrisi

Birim radyan devir yaptıktan sonraki yükselme miktarı h , tam bir devir yaptıktan sonra yükselme miktarı ise H ile gösterilmektedir.

$$h = \frac{H}{2\pi} \quad (4.2)$$



Şekil 4.2. Helisin yükselme açısı

Silindir yüzeyi açılacak olursa, helis bu düzlemde bir doğru olarak görülecektir. Şekil 4.2' de gösterilen bu doğrunun taban çizgisine göre eğimine aynı zamanda helisin x, y düzlemine göre eğimi de denir ve

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{2\pi a} = \frac{h}{a} \quad (4.3)$$

ile gösterilir. Aynı açı için:

$$\sin \alpha = \frac{h}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{c}, \quad c = \sqrt{a^2 + h^2} \quad (4.4)$$

yazılabileceği görülür. Burada, α ve a sırasıyla helisin yükselme açısı ve helisin sarıldığı silindirin yarıçapıdır. Helisin uzunluk elemanı (4.1) ifadesinden

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{a^2 + h^2} d\phi = c d\phi \quad (4.5)$$

olmaktadır. i, j, k ile x, y, z eksenleri doğrultusunda seçilen sabit birim vektörleri gösterilirse, helisin parametrik denklemi yardımı ile yer vektörü

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = a\cos\phi\mathbf{i} + a\sin\phi\mathbf{j} + h\phi\mathbf{k} \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (3.1) ve (4.5) ifadeleri yardımıyla teğet birim vektör,

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s} = -\frac{a}{c}\sin\phi\mathbf{i} + \frac{a}{c}\cos\phi\mathbf{j} + \frac{h}{c}\mathbf{k} \quad (4.7)$$

olup (3.2) Frenet formülleri yardımıyla normal ve binormal birim vektörleri

$$\mathbf{n} = -\cos\phi\mathbf{i} - \sin\phi\mathbf{j} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{b} = \frac{h}{c}\sin\phi\mathbf{i} - \frac{h}{c}\cos\phi\mathbf{j} + \frac{a}{c}\mathbf{k} \quad (4.9)$$

elde edilmektedir. Hareketli koordinat takımı $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ ile ortak koordinat takımı $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ arasında aşağıdaki ilişki vardır (Şekil 4.1).

$$\{\mathbf{V}\}_{\text{tnb}} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{V}\}_{\text{ijk}}, \quad \begin{Bmatrix} V_t \\ V_n \\ V_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a/c)\sin\phi & (a/c)\cos\phi & (h/c) \\ -\cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ (h/c)\sin\phi & -(h/c)\cos\phi & (a/c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_k \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Burada V_i, V_j, V_k ortak koordinat takımında V_t, V_n, V_b ise hareketli koordinat takımında herhangi bir vektörün bileşenleridir. Helisin eğriliği ve tabii burulması ise

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + h^2} = \text{sabit} \quad (4.11)$$

$$\tau = \frac{h}{c^2} = \frac{h}{a^2 + h^2} = \text{sabit} \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) Frenet formülleri, (4.11) ve (4.12) ifadelerindeki χ ve τ 'nin aldığı değerlere göre düzenlenirse

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \frac{a}{c^2}\mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = \frac{h}{c^2}\mathbf{b} - \frac{a}{c^2}\mathbf{t}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} = -\frac{h}{c^2}\mathbf{n} \quad (4.13)$$

halini almaktadır. (4.5) ifadesinden yararlanılarak $d\phi$ değişkeni cinsinden (4.13) ifadesi aşağıdaki hali alır.

$$\frac{\partial t}{\partial \phi} = \frac{a}{c} n, \quad \frac{\partial n}{\partial \phi} = \frac{h}{c} b - \frac{a}{c} t, \quad \frac{\partial b}{\partial \phi} = -\frac{h}{c} n \quad (4.14)$$

Zamana bağlı bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $t > 0$ için, $L[f(t)] = \bar{F}(z)$ ise,

$$\bar{F}(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada z , Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. Zamana göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerin Laplace dönüşümleri kapalı olarak

$$L[\dot{f}(t)] = z \bar{F}(z) - f(0) \quad (4.16a)$$

$$L[\ddot{f}(t)] = z^2 \bar{F}(z) - z f(0) - \dot{f}(0) \quad (4.16b)$$

şeklinde yapılmaktadır.

Kesit büyüklükleri ve dış yükler, c sabiti ve kesitin n eksenine göre eğilme rijitliğine bağlı olarak boyutsuzlaştırılmaktadır. Laplace uzayındaki boyutsuzlaştırma parametreleri (4.17) ile tarif edilmektedir.

$$\bar{U}_i = \frac{1}{c} U_i^0, \quad \bar{\Omega}_i = \Omega_i^0 \quad (4.17a)$$

$$\bar{T}_i = \frac{c^2}{EI_n} T_i^0, \quad \bar{M}_i = \frac{c}{EI_n} M_i^0 \quad (4.17b)$$

$$\bar{p}_i = \frac{c^3}{EI_n} p_i^0, \quad \bar{m}_i = \frac{c^2}{EI_n} m_i^0 \quad (i = t, n, b) \quad (4.17c)$$

Hareketli koordinat takımında elde edilen (3.25) denklemlerinin (4.16) tarifleri yardımıyla Laplace dönüşümü alınır ve kesit büyüklükleri (4.17a-c) tarifleri ile boyutsuzlaştırılırsa, kısmi diferansiyel denklemler dönüşmüş uzayda adi diferansiyel denklem takımı haline dönüşmektedir. Böylece, Laplace uzayında silindirik helisel çubukların dinamik davranışını idare eden adi diferansiyel denklemler kanonik formda aşağıdaki şekilde elde edilmektedir:

$$\frac{d\bar{U}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\bar{U}_n + \frac{I_n}{Ac^2}\bar{T}_t \quad (4.18a)$$

$$\frac{d\bar{U}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\bar{U}_t + \frac{h}{c}\bar{U}_b + \bar{\Omega}_b + \frac{\alpha_n EI_n}{GA c^2}\bar{T}_n \quad (4.18b)$$

$$\frac{d\bar{U}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\bar{U}_n - \bar{\Omega}_n + \frac{\alpha_b EI_n}{GA c^2}\bar{T}_b \quad (4.18c)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\bar{\Omega}_n + \frac{EI_n}{GI_t}\bar{M}_t \quad (4.18d)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\bar{\Omega}_t + \frac{h}{c}\bar{\Omega}_b + \bar{M}_n \quad (4.18e)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\bar{\Omega}_n + \frac{I_n}{I_b}\bar{M}_b \quad (4.18f)$$

$$\frac{d\bar{T}_t}{d\phi} = \frac{\rho A c^4 z^2}{EI_n}\bar{U}_t + \frac{a}{c}\bar{T}_n + \bar{B}_7 \quad (4.18g)$$

$$\frac{d\bar{T}_n}{d\phi} = \frac{\rho A c^4 z^2}{EI_n}\bar{U}_n - \frac{a}{c}\bar{T}_t + \frac{h}{c}\bar{T}_b + \bar{B}_8 \quad (4.18h)$$

$$\frac{d\bar{T}_b}{d\phi} = \frac{\rho A c^4 z^2}{EI_n}\bar{U}_b - \frac{h}{c}\bar{T}_n + \bar{B}_9 \quad (4.18i)$$

$$\frac{d\bar{M}_t}{d\phi} = \frac{\rho I_t c^2 z^2}{EI_n}\bar{\Omega}_t + \frac{a}{c}\bar{M}_n + \bar{B}_{10} \quad (4.18j)$$

$$\frac{d\bar{M}_n}{d\phi} = \frac{\rho c^2 z^2}{E}\bar{\Omega}_n + \bar{T}_b - \frac{a}{c}\bar{M}_t + \frac{h}{c}\bar{M}_b + \bar{B}_{11} \quad (4.18k)$$

$$\frac{d\bar{M}_b}{d\phi} = \frac{\rho I_b c^2 z^2}{EI_n}\bar{\Omega}_b - \bar{T}_n - \frac{h}{c}\bar{M}_n + \bar{B}_{12} \quad (4.18l)$$

Zorlanmış titreşim durumu için, zamana bağlı $Y(\phi, t)$ durum vektörü

$$Y(\phi, t) = \left\{ U_t^0, U_n^0, U_b^0, \Omega_t^0, \Omega_n^0, \Omega_b^0, T_t^0, T_n^0, T_b^0, M_t^0, M_n^0, M_b^0 \right\}^T \quad (4.19)$$

olarak tanımlanmaktadır. (4.19) vektörünün zamana göre Laplace dönüşümü

$$L[Y(\phi, t)] = \bar{Y}(\phi, z) \quad (4.20)$$

olup burada Laplace dönüşüm parametresi z kompleks bir sayıdır. Laplace uzayında elde edilen birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d\bar{Y}(\phi, z)}{d\phi} = \bar{F}(\phi, z)\bar{Y}(\phi, z) + \bar{B}(\phi, z) \quad (4.21)$$

$\bar{F}(\phi, z)$ katsayılar matrisinin bazı elemanlarında bulunan ikinci türev ifadelerinin zamana göre Laplace dönüşümleri alınırsa

$$L\left[\rho A \frac{\partial^2 U_k^0}{\partial t^2}\right] = \rho A \left[z^2 \bar{U}_k^0 - z U_k^0(\phi, 0) - \frac{\partial U_k^0(\phi, 0)}{\partial t} \right] \quad (k = t, n, b) \quad (4.22a)$$

$$L\left[\rho I_k \frac{\partial^2 \Omega_k^0}{\partial t^2}\right] = \rho I_k \left[z^2 \bar{\Omega}_k^0 - z \Omega_k^0(\phi, 0) - \frac{\partial \Omega_k^0(\phi, 0)}{\partial t} \right] \quad (k = t, n, b) \quad (4.22b)$$

olur. (4.22a-b) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anında verilen başlangıç şartlarıdır. $\bar{B}(\phi, z)$ kolon matrisinin elemanları (4.23) denkleminde verilmiştir.

$$\bar{B}_i(\phi, z) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

$$\bar{B}_{6+j}(\phi, z) = -\left(\bar{p}_k^{(ex)}\right) - \rho A \left[z U_k^0(\phi, 0) + \frac{\partial U_k^0(\phi, 0)}{\partial t} \right] \quad (j=1, 2, 3) \quad (4.23)$$

$$\bar{B}_{9+j}(\phi, z) = -\left(\bar{m}_k^{(ex)}\right) - \rho I_k \left[z \Omega_k^0(\phi, 0) + \frac{\partial \Omega_k^0(\phi, 0)}{\partial t} \right] \quad (k = t, n, b)$$

(4.22) ifadesinde görülen başlangıç şartları, $\bar{\mathbf{B}}(\phi, z)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

4.2. Silindirik Helisel Çubukların Serbest Titreşimi

Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak incelenmiştir. Serbest titreşim analizi için, $p_i^{(ex)} = 0$ ve $m_i^{(ex)} = 0$ ($i = t, n, b$) alınmaktadır. Harmonik titreşim kabulü ile $\mathbf{U}^o$, $\mathbf{\Omega}^o$, $\mathbf{T}^o$ ve $\mathbf{M}^o$ vektörleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^o(\phi, t) &= \mathbf{U}^*(\phi) e^{i\omega t} \\ \mathbf{\Omega}^o(\phi, t) &= \mathbf{\Omega}^*(\phi) e^{i\omega t} \\ \mathbf{T}^o(\phi, t) &= \mathbf{T}^*(\phi) e^{i\omega t} \\ \mathbf{M}^o(\phi, t) &= \mathbf{M}^*(\phi) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.24)$$

(4.24) ifadeleri (3.8) ve (3.11) denkleminde yerlerine konulduğunda, birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı elde edilir. Eğer, genelleştirilmiş deplasmanlar $\mathbf{U}_t^*$, $\mathbf{U}_n^*$, $\mathbf{U}_b^*$, $\mathbf{\Omega}_t^*$, $\mathbf{\Omega}_n^*$, $\mathbf{\Omega}_b^*$ ve bunlara karşılık gelen kuvvetler $\mathbf{T}_t^*$, $\mathbf{T}_n^*$, $\mathbf{T}_b^*$, $\mathbf{M}_t^*$, $\mathbf{M}_n^*$, $\mathbf{M}_b^*$, $\mathbf{Y}^*(\phi)$ kolon matrisinin bileşenleri olarak düşünülürse, bu 12 adet denklem matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d\mathbf{Y}^*(\phi)}{d\phi} = \mathbf{F}(\phi, \omega) \mathbf{Y}^*(\phi) \quad (4.25)$$

Serbest titreşim durumunda, sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri problemin doğal frekanslarını vermektedir. Dinamik rijitlik matrisi, 5. bölümde anlatıldığı gibi, tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile elde edilecektir.

5. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi (TFY), başlangıç şartları yardımı ile değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümüne dayanmaktadır. Bu yöntem ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. Mengi (1989); Haktanır ve Kıral (1991), tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini düzlemsel çubukların statikğine doğrudan uygulamışlardır. Haktanır (1995) ve Çalim (1996), eleman rijitlik ve yük vektörlerini TFY ile elde ederek helisel çubukların statik analizini yapmışlardır. Bu çalışmaların hepsinde TFY'ne dayalı başlangıç değer problemlerinin çözümü için dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu (RK4) kullanılmıştır. Statik yükleme durumları için literatürde verilen bu yöntem, bu tezde Laplace uzayında dinamik yükleme durumu için modifiye edilerek kullanılmıştır. Bununla beraber, başlangıç değer probleminin çözümü için Butcher'ın beşinci mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması (Chapra ve Canale, 1998) (Ek-A'ya bakınız) adapte edilerek çok daha etkin çözümler elde edilmiştir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi bilgisayar ile programlamaya çok müsait olup, genel sınır şartlarına sahip fiziksel problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Bu yöntemle dayalı çözüm yapmanın diğer bir avantajı da, değişken kesit ve geometriye sahip problemlerin çözülebilmesidir. Uygun integrasyon adım aralığı seçilerek, diferansiyel denklemler istenilen hassasiyette kesin olarak çözülebilmektedir (Temel ve ark., 2003b).

5.1. Diferansiyel Denklemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Çözümü

Sabit katsayılı 12 adet (4.18a-l) diferansiyel denklemleri Laplace uzayında elde edilmiştir. Bu denklemlerin herbiri yere göre birinci mertebe türevler içermektedir. Laplace uzayında elde edilen adi diferansiyel denklem takımı matris notasyonunda

$$\frac{d\bar{Y}(\phi, z)}{d\phi} = \bar{F}(\phi, z)\bar{Y}(\phi, z) + \bar{B}(\phi, z) \quad (5.1)$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada, z Laplace dönüşüm parametresi olup (5.1) denkleminin çözümü ardaşık z parametreleri için yapılacaktır. ϕ bağımsız değişken, $\bar{Y}(\phi, z)$ bilinmeyen bağımlı değişkenleri içeren kolon matrisi, $\bar{F}(\phi, z)$ bağımlı değişkenlerin katsayılar kare matrisi ve $\bar{B}(\phi, z)$ Laplace dönüşümündeki başlangıç şartlarını da içeren sabitler vektörüdür.

Çözüm için gerekli olan 12 adet sınır şartından 6 adedi çözüm bölgesi başlangıcında ($\phi = a$)

$$\sum_{j=1}^{12} b_{ij} \bar{Y}_j(a) = \alpha_i \quad (i=1,2,\dots,6) \quad (5.2)$$

ve geri kalan 6 adeti ise çözüm bölgesi sonunda ($\phi = b$)

$$\sum_{j=1}^{12} d_{ij} \bar{Y}_j(b) = \beta_i \quad (i=1,2,\dots,6) \quad (5.3)$$

şeklinde verilmiş olsun. Görüldüğü gibi problemin sınır şartları, bilinmeyen $\bar{Y}(\phi, z)$ vektörünün ($\phi = a$) ve ($\phi = b$) noktalarındaki bileşenlerinin lineer kombinasyonları olarak da ifade edilebilmektedir.

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, problemin sınır şartlarından bağımsız olarak (5.1) denkleminin homojen ve özel çözümlerinin, tamamen çözüm bölgesi başlangıcında ($\phi = a$) belirlenen standart sınır şartları ile bulunması esasına dayanmaktadır. (5.1) denkleminin genel çözümü

$$\bar{Y}(\phi, z) = \sum_{m=1}^{12} C_m \left(\bar{U}^{(m)}(\phi, z) \right) + \bar{V}(\phi, z) \quad (5.4)$$

şeklinde olsun. (5.4) ifadesinde, $\bar{U}^{(m)}(\phi, z)$, verilen sınır şartlarından m . homojen sınır şartına ait homojen çözümü, $\bar{V}(\phi, z)$ ise homojen olmayan sınır şartları ile elde edilen özel çözümü göstermektedir. Burada C_m integrasyon sabitleri, ($\phi = a$) ve

$(\phi = b)$ noktalarında verilmiş olan problemin gerçek sınır şartlarından elde edilecektir. 12 adet standart sınır şartı ile elde edilen homojen çözümler,

$$[\bar{U}(\phi, z)]_{12 \times 12} = \{\bar{U}^{(1)}(\phi, z)_{12 \times 1}, \dots, \bar{U}^{(12)}(\phi, z)_{12 \times 1}\}_{12 \times 12} \quad (5.5)$$

kare matrisi ile gösterilmektedir. Böylece (5.4) denkleminin genel çözümü

$$\bar{Y}(\phi, z) = \bar{U}(\phi, z)C + \bar{V}(\phi, z) \quad (5.6)$$

formunda ifade edilebilir.

5.2. Homojen Çözümün Elde Edilmesi

(5.1) denkleminin homojen hali

$$\frac{d\bar{U}^{(m)}(\phi, z)}{d\phi} = \bar{F}(\phi, z)\bar{U}^{(m)}(\phi, z) \quad (m=1, 2, \dots, 12) \quad (5.7)$$

şeklinde olsun. (5.7) denkleminin 12 adet farklı sınır şartı için 12 kere çözülmesi gerekmektedir. Böylece 12×12 adetlik çözüm elde edilir.

Burada $\bar{U}^{(m)}(\phi, z)$, çözüm bölgesi başlangıcında bilinmeyen vektörün m. elemanına 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen çözümü göstermektedir.

$$\begin{aligned} \bar{U}_1(a) &= 1, \bar{U}_2(a) = 0, \dots, \bar{U}_{12}(a) = 0 \\ \bar{U}_1(a) &= 0, \bar{U}_2(a) = 1, \bar{U}_3(a) = 0, \dots, \bar{U}_{12}(a) = 0 \\ &\dots \\ &\dots \\ \bar{U}_1(a) &= 0, \dots, \bar{U}_{11}(a) = 0, \bar{U}_{12}(a) = 1 \end{aligned} \quad (5.8)$$

(5.5) ifadesinde tarif edilen ve bu şekilde elde edilmiş olan $[U]$ kare matrisinin çözüm bölgesindeki başlangıç değerleri birim matrise karşılık gelmektedir.

$$[\bar{U}(a)] = [I] \quad (5.9)$$

5.3. Özel Çözümün Elde Edilmesi

(5.1) denkleminin homojen olmayan hali

$$\frac{d\bar{V}(\phi, z)}{d\phi} = \bar{F}(\phi, z)\bar{V}(\phi, z) + \bar{B}(\phi, z) \quad (5.10)$$

şeklinde olsun. Bu denklemin çözüm bölgesi başlangıcı için kabul edilen,

$$\bar{V}(a) = 0 \quad (5.11)$$

sınır şartları ile bir defa çözülmesi yeterlidir.

5.4. Sınır Şartlarından C_m İntegrasyon Sabitlerinin Elde Edilmesi

(5.4) genel çözümünde yeralan C_m integrasyon sabitleri, problemin gerçek sınır şartlarından elde edilecektir. $(\phi = a)$ noktasında verilmiş olan 6 adet sınır şartının bulunduğu (5.2) ifadesinde, $\bar{Y}_j(a)$ çözümleri yerine konursa,

$$\sum_{j=1}^{12} b_{ij} \left(\sum_{m=1}^{12} C_m \bar{U}_j^{(m)}(a) + \bar{V}_j(a) \right) = \alpha_i \quad (5.12)$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{Y}_j(a) = \sum_{m=1}^{12} C_m \bar{U}_j^{(m)}(a) + \bar{V}_j(a) \quad (5.13)$$

olup özel çözümün bulunmasında kullanılan sınır şartları

$$\bar{V}_j(a) = 0 \quad (j= 1, 2, \dots, 12) \quad (5.14)$$

(5.12) ifadesinde yerine konursa

$$\sum_{m=1}^{12} b_{im} C_m = \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (5.15)$$

elde edilir. (5.15), 12 adet C_m integrasyon sabitinin elde edilmesi için 6 adet lineer denklem takımı sunmaktadır. Gerekli olan diğer 6 adet denklem ($\phi = b$) noktasındaki sınır şartlarından elde edilecektir. Yukarıdaki gibi, bu kez de ($\phi = b$) noktasındaki çözümler (5.3) ifadesinde yerine konulursa

$$\sum_{j=1}^{12} d_{ij} \left(\sum_{m=1}^{12} C_m \bar{U}_j^{(m)}(b) + \bar{V}_j(b) \right) = \beta_i \quad (5.16)$$

veya

$$\sum_{m=1}^{12} \left(\sum_{j=1}^{12} d_{ij} \bar{U}_j^{(m)}(b) \right) C_m = \beta_i - \sum_{j=1}^{12} d_{ij} \bar{V}_j(b) \quad (5.17)$$

elde edilir. Burada

$$P_{im} = \sum_{j=1}^{12} d_{ij} \bar{U}_j^{(m)}(b) \quad (5.18)$$

ve

$$k_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{12} d_{ij} \bar{V}_j(b) \quad (5.19)$$

tarifleri yapılırsa, (5.17) denklemi

$$\sum_{m=1}^{12} P_{im} C_m = k_i \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (5.20)$$

şeklinde düzenlenerek gerekli olan 6 adet lineer denklem de elde edilir. (5.15) ve (5.20) eşitlikleri birlikte matris formunda,

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & . & . & . & . & . & . & B_{1,12} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & . & . & . & . & . & . & B_{2,12} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ B_{61} & B_{62} & . & . & . & . & . & . & . & . & B_{6,12} \\ P_{11} & P_{12} & . & . & . & . & . & . & . & . & P_{1,12} \\ P_{21} & P_{22} & . & . & . & . & . & . & . & . & P_{2,12} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ P_{61} & P_{62} & . & . & . & . & . & . & . & . & P_{6,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \\ C_{11} \\ C_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

veya kapalı formda

$$[AA]\{C\} = \{\alpha\} \quad (5.22)$$

olarak yazılabilmektedir. (5.21) eşitliğinde C_m integrasyon sabitleri hesaplanıp (5.4) denkleminde yerine konularak genel çözüm yapılabilir.

$$\bar{Y}(\phi, z) = \sum_{m=1}^{12} C_m \left(\bar{U}^{(m)}(\phi, z) \right) + \bar{V}(\phi, z) \quad (5.23)$$

Böylece (5.23) denkleminin genel çözümünden çözüm bölgesi üzerinde istenilen herhangi bir noktadaki bağımlı değişkenlerin değerleri kolaylıkla hesaplanabilir.

Buraya kadar anlatılanlar bir problemin tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile doğrudan çözümü için yapılmıştır. Bu genel formülasyondan yararlanılarak eleman dinamik rijitlik matrisi elde edilecektir. Bu durum, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

5.5. Eleman Dinamik Rijitlik Matrisinin Elde Edilmesi

(5.1) denklem takımının homojen ve özel çözümleri bir önceki kısımda anlatıldığı şekilde yapılmaktadır. Eleman dinamik rijitlik matrisini hesaplamak için, C_m integrasyon sabitleri elde edilirken, problemin gerçek sınır şartları yerine çözüm bölgesinin $\phi = 0$ ve $\phi = L$ noktalarındaki sınır şartları olarak U_i ve Ω_i ($i=t, n, b$) büyüklükleri sırasıyla birim deplasman alınmaktadır. İlk adımda, sınır şartları olarak (5.21) denkleminin sağ tarafı için $U_t(0) = 1$ ve $U_n(0) = U_b(0) = \Omega_t(0) = \Omega_n(0) = \Omega_b(0) = U_t(L) = U_n(L) = U_b(L) = \Omega_t(L) = \Omega_n(L) = \Omega_b(L) = 0$ alınarak C_m integrasyon sabitleri hesaplanır. İkinci adımda, sınır şartları için $U_n(0) = 1$ ve diğerleri sıfır alınarak C_m integrasyon sabitleri hesaplanır. Sırasıyla her bir serbestlik için birim deplasman uygulanıp C_m integrasyon sabitleri ayrı ayrı hesaplanmaktadır. Bu sabitler hesaplanırken homojen çözümünden elde edilen (5.21) ifadesindeki katsayılar matrisinin bir kez oluşturulması yeterlidir.

Her düğümde altı serbestlik derecesi olmak üzere, bunun üçü deplasman, üçü dönmedir. Elemanın başlangıç düğümü i , diğer ucu j düğümü olmak üzere eleman deplasman ve eleman uç kuvvetleri

$$\{\bar{d}\} = \{\bar{U}(\phi_i, z), \bar{\Omega}(\phi_i, z), \bar{U}(\phi_j, z), \bar{\Omega}(\phi_j, z)\}^T \quad (5.24)$$

$$\{\bar{p}\} = \{\bar{T}(\phi_i, z), \bar{M}(\phi_i, z), \bar{T}(\phi_j, z), \bar{M}(\phi_j, z)\}^T \quad (5.25)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Eleman dinamik rijitlik matrisini hesaplamak için (5.24) ifadesindeki eleman uç deplasmanlarına sırasıyla birim deplasman uygulanarak C_m integrasyon sabitleri ilk parağrafta anlatıldığı şekilde elde edilir. Bu işlem 12 kez tekrarlanır. (5.1) denkleminin homojen çözümünden eleman uç kuvvetleri elde edilir ve bu kuvvetler eleman dinamik rijitlik matrisinin bileşenlerini oluşturmaktadır.

Ankastre uç kuvvetleri ise, bütün uç deplasmanları sıfıra eşitleyerek yine (5.1) denkleminin özel çözümünden hesaplanmaktadır.

$$\{\bar{f}\} = \left\{ -\bar{T}(\phi_i, z)(\phi_i, z), -\bar{M}(\phi_i, z), \bar{T}(\phi_j, z), \bar{M}(\phi_j, z) \right\}^T \quad (5.26)$$

Eleman denklemi Laplace uzayında aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\{\bar{p}\} = [\bar{k}] \{\bar{d}\} + \{\bar{f}\} \quad (5.27)$$

Eleman koordinatlarında elde edilen bu denklemlerden sistem koordinatlarına geçmek için aşağıdaki transformasyon işlemi uygulanmalıdır.

$$[\bar{k}]_{ijk} = [T]^T [\bar{k}]_{tnb} [T] \quad (5.28)$$

$$\{\bar{f}\}_{ijk} = [T]^T \{\bar{f}\}_{tnb} \quad (5.29)$$

Transformasyon matrisi [T]

$$[T] = \begin{bmatrix} [B(\phi_i)] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [B(\phi_i)] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [B(\phi_j)] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [B(\phi_j)] \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (5.30)$$

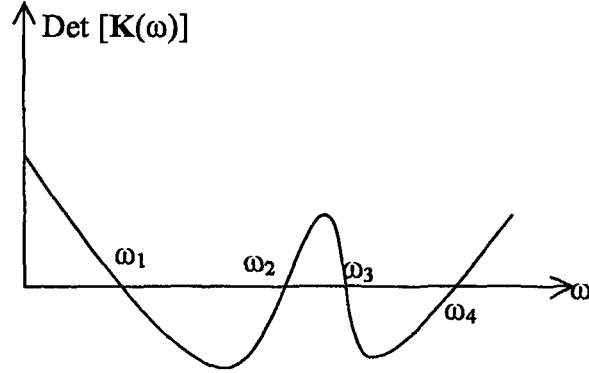
olup [B] matrisi (4.10) ifadesinde tanımlanmıştır.

Bu tezde, hem eleman dinamik rijitlik matrisi hem de ankastrelik uç kuvvetleri, Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımı ile (5.1) denkleminin çözümlerinden hesaplanmaktadır. Eleman dinamik rijitlik matrisi ve yük vektöründen sistem hareket denklemleri elde edilmektedir.

$$[K(z)]\{D\} = \{P(z)\} \quad (5.31)$$

Burada, $[K(z)]$ ve $\{P(z)\}$ sistem dinamik rijitlik matrisi ve yük vektörüdür. $\{D\}$ ise, sistemin bilinmeyen düğüm deplasmanları vektörüdür.

Serbest titreşim durumunda, sistem yük vektörü sıfıra eşitlenmekte ve sistem dinamik rijitlik matrisindeki Laplace parametresi z yerine $i\omega$ yazılmaktadır.



Şekil 5.1. Serbest titreşim frekanslarının elde edilmesi

Dönüşmüş uzayda Laplace parametresi “ z ” yerine “ $i\omega$ ” konularak sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri araştırılmaktadır. Bu değerler problemin doğal frekanslarını verecektir (Şekil 5.1). Sistem dinamik rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan değerler Secant kök bulma metodu ile hesaplanmaktadır.

6. SÖNÜMÜN DİNAMİK DAVRANIŞA ETKİSİ

6.1. Viskoelastik Davranış

Bir taşıyıcı sistemde dış kuvvetler etkisinde oluşacak gerilmelerin bilinmesine ihtiyaç vardır. Uygulamada taşıyıcı sistemlerin güvenliği açısından bu gerilmelerin mukavemet sınırları altında kalması istenir. Bu amaçla yapılan gerilme analizlerinde, denge denklemleri ile kinematik bağıntılar yanında bünye denklemlerine de ihtiyaç vardır. Malzemelerin gerilme-şekil değiştirme bağıntılarını veren bu denklemler mekanik davranışın türüne göre değişirler. Malzemelerin mekanik davranışları genellikle elastik, viskoelastik ve plastik olarak gruplara ayrılabilir. Mühendislik problemlerin analizlerinde basitliği nedeniyle malzemelerin elastik olduğu kabulü yapılmaktadır. Gerçekte ise, bu malzemelerin hemen hepsi bünyelerindeki iç sürtünmeden dolayı az veya çok viskoelastik özelliğe sahiptirler. Bu nedenle, malzemelerin davranışını yansıtmak için viskoelastik bünye bağıntısı, elastik bünye bağıntısından daha gerçekçi olacaktır.

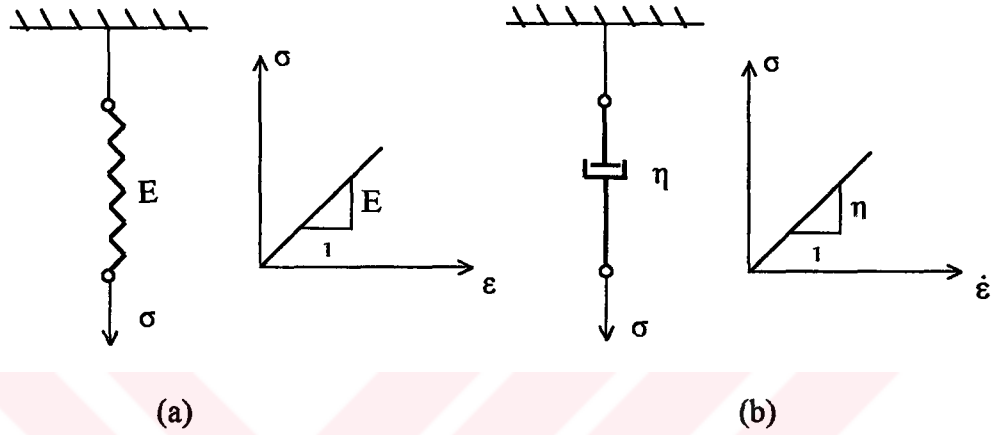
Viskoelastik davranış gösteren cisme sabit gerilme uygulandığında ani elastik uzama, sonra onu izleyen zamanda sürekli artan uzama görülür. Yük kaldırıldığı zaman ani elastik toparlanma ve sonra hızı zamanla azalan gecikmiş toparlanma oluşur. Viskoelastik davranışta yükleme hızının ve yükleme süresinin şekil değiştirmeye etkisi vardır. Herhangi bir andaki şekil değiştirme, gerilmenin geçmişte aldığı bütün değerlere bağlıdır.

6.2. Viskoelastik Gerilme-Şekil Değiştirme İlişkisi

Viskoelastik davranışta bünye denklemlerinde gerilme ve şekil değiştirmelerin yanında bir de zaman değişkeni vardır. Yükleme hızı ve yükleme süresi de oluşacak şekil değiştirmeye etkir. Viskoelastik davranış genellikle viskoz davranışla elastik davranışın karışımından oluşur. Viskoz davranış iç sürtünmeli bir amortisör şeklinde bir mekanik modelle, elastik davranış ise bir yay ile temsil edilir. Gerçek cisimlerin viskoelastik davranışı bu temel modellerin karışımından oluşan

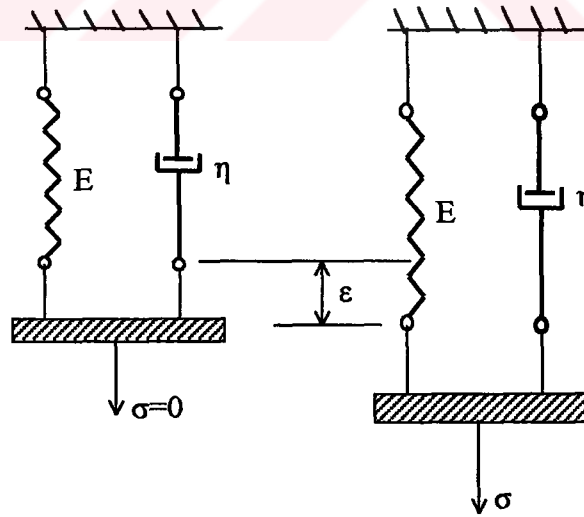
mekanik modeller sistemine benzetilir. Bu modeller yardımı ile mekanik davranışların kolayca ve açık bir şekilde formülasyonu yapılabilir (Onaran, 1995).

Viskoelastik cisimler Hooke ve Newton modelleri uygun şekilde düzenlenerek temsil edilirler (Şekil 6.1). Bu tezde, gerilme-şekil değiştirme ilişkisi için tek yay ve yağ kutusunun paralel bağlanmasından oluşan Kelvin modeli gözönüne alınacaktır.



Şekil 6.1. (a) Hooke tipi yay (b) Newton tipi yağ kutusu

Kelvin cisminin bünye denklemi, Hooke ve Newton modellerinin paralel bağlanması ile temsil edilmektedir (Şekil 6.2).



Şekil 6.2. Kelvin cismi

Her iki temel modelin uzaması eşit olup ε ile gösterilmektedir. Uygulanan σ gerilmesi, her iki modele aynı anda etkiyen gerilmelerin toplamıdır. Buna göre Kelvin cisminin gerilme-şekil değiştirme ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_1 \quad (6.1)$$

Burada η viskozite katsayısı, şekil değiştirmenin zamana göre türevi $\dot{\varepsilon}$ ise şekil değiştirme hızıdır. Kelvin cismine $\sigma=\sigma_0$ sabit gerilmesi uygulandığı zaman oluşacak sünme şekil değiştirmesi (6.1) diferansiyel denkleminin integrali yardımıyla bulunabilir. $\varepsilon(0)=0$ başlangıç şartı altında Kelvin cisminin sünme bağıntısı elde edilir.

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - e^{-(E/\eta)t} \right] \quad (6.2)$$

Viskoelastik modeller, birçok yay ve yağ kutusunun paralel ve seri bağlanması ile de oluşabilir. Bu durumda (6.1) gerilme-şekil değiştirme ilişkisinde, gerilme ve şekil değiştirmenin zamana göre yüksek dereceden türevleri bulunabilir. Yüksek mertebeden türevler bulunan viskoelastik gerilme-şekil değiştirme ilişkisi şu formda yazılabilir (Boley ve Weiner, 1960).

$$P\sigma_1 = Q\varepsilon_1 \quad (6.3)$$

Burada P ve Q diferansiyel operatörlerdir.

$$P = a_m \frac{\partial^m}{\partial t^m} + a_{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{\partial}{\partial t} + a_0 \quad (6.4a)$$

$$Q = b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n} + b_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{\partial}{\partial t} + b_0 \quad (6.4b)$$

(6.3) eşitliği ile tanımlanan gerilme-şekil değiştirme bağıntısı tek boyutlu hal için düşünülmüştür. Gerilme-şekil değiştirme bağıntısını üç boyutlu hal olarak ele alalım. Hidrostatik gerilme etkisi altında gerçekleştirilen deneyler, malzemelerin her türlü sıcaklık ve gerilme seviyelerinde tam elastik davrandıklarını göstermektedir. Bu

durumda, gerilme ve şekil değiştirme tansörleri deviatorik gerilme ve şekil değiştirme cinsinden yazılmaktadır (Boley ve Weiner, 1960).

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii} , \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \quad (6.5)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma , \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon \quad (6.6)$$

Burada δ_{ij} Kronecker deltasıdır ve $i=j$ için $\delta_{ij}=1$, $i \neq j$ için $\delta_{ij}=0$ olmaktadır.

Isı etkisinin olmadığı durumda gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{3k}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (6.7)$$

olup k malzemenin elastik hacim genleşme modülüdür. Üç boyutlu halde lineer viskoelastik gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

$$P s_{ij} = Q e_{ij} \quad (6.8)$$

olup P ve Q diferansiyel operatörlerdir. Kelvin modeli için viskoelastik bünye denklemi şu şekildedir.

$$s_{ij} = 2\eta \dot{e}_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (6.9)$$

Burada $\mu=G$ kayma modülünü göstermektedir. (6.6) denklemi (6.8) ifadesinde yerine konulduğu zaman gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$P(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma) = Q(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon) \quad (6.10)$$

haline gelir. (6.5) ifadesindeki şekil değiştirme ε ve (6.7) eşitliğindeki gerilme σ , (6.10) denkleminde yerlerine konulursa genel halde viskoelastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$P \sigma_{ij} = Q \varepsilon_{ij} + \left(kP - \frac{Q}{3} \right) \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (6.11)$$

elde edilmektedir.

(6.11) eşitliğinde, $P = 1$ ve $Q = 2\mu$ olması halinde üç boyutlu elastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı bulunmaktadır.

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \left(k - \frac{2\mu}{3} \right) \delta_{ij} \epsilon_{kk} \quad (6.12)$$

6.3. Elastik-Viskoelastik Analojisi

En basit tipte viskoelastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı (6.11) ile verilen genel formun lineer halidir. Bu durumda, bir cisimde elastik gerilme ve şekil değiştirmelere karşılık gelen viskoelastik gerilme ve şekil değiştirmelerin hesaplanmasına müsade eden bir matematiksel analogi vardır (Boley ve Weiner, 1960).

Yayıllı yüzey gerilmeleri ve hacim kuvvetlerinin lineer olması hali için (6.9) eşitliğinde verilen Kelvin modeline ait sabit parametrelili viskoelastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı ile birlikte (6.7) ifadesinin de geçerli olduğu bir cisim göz önüne alalım. Kelvin cismi için verilen (6.9) gerilme-şekil değiştirme bağıntısından,

$$P = 1, \quad Q = 2\eta \frac{\partial}{\partial t} + 2\mu \quad (6.13)$$

olduğu görülmektedir. P ve Q diferansiyel operatörleri (6.11) eşitliğinde yerlerine konulduğunda, gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$\sigma_{ij} = 3k\epsilon\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} - 2\eta\dot{\epsilon}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} - 2\mu\epsilon\delta_{ij} \quad (6.14)$$

halini alır. Cisim içerisindeki her noktada denge denklemlerinin sağlanması için

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (6.15)$$

veya

$$\sigma_{ij,j} = 3k\epsilon_{,j}\delta_{ij} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij,j} - 2\eta\dot{\epsilon}_{,j}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij,j} - 2\mu\epsilon_{,j}\delta_{ij} = 0 \quad (6.16)$$

olmalıdır. $i=j$ için $\delta_{ij}=1$ ve $i \neq j$ için ise $\delta_{ij}=0$ olduğu gözönüne alınırsa viskoelastik cismin denge denklemi

$$(3k - 2\mu)\epsilon_{,i} - 2\eta\dot{\epsilon}_{,i} + 2\eta\dot{\epsilon}_{ij,j} + 2\mu\epsilon_{ij,j} = 0 \quad (6.17)$$

haline gelir. Benzer şekilde denge şartından, (6.12) eşitliğinde verilen elastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$(3k - 2\mu)\epsilon_{,i} + 2\mu\epsilon_{ij,j} = 0 \quad (6.18)$$

haline gelmektedir. Viskoelastik (6.17) denge denklemleri ve elastik (6.18) denge denklemlerinin (4.15) tarifine göre Laplace dönüşümleri alınmaktadır. Böylece, viskoelastik denge denklemlerinin Laplace dönüşümü

$$(3k - 2\eta z - 2\mu)\bar{\epsilon}_{,i} + (2\eta z + 2\mu)\bar{\epsilon}_{ij,j} = 0 \quad (6.19)$$

ve elastik denge denklemlerinin Laplace dönüşümü

$$3\lambda\bar{\epsilon}_{,i} + 2\mu\bar{\epsilon}_{ij,j} = 0 \quad (6.20)$$

olarak elde edilmektedir. Laplace uzayında elde edilen (6.19) viskoelastik denge denklemleri ile (6.20) elastik denge denklemleri arasındaki tek fark, elastik malzeme sabitleri ile viskoelastik malzeme sabitleridir. Bu nedenle, viskoelastik çözümler için elastik Lamé sabitleri yerine Laplace uzayında viskoelastik Lamé sabitleri kullanılacaktır.

$$\lambda_v = \lambda - \frac{2}{3}\eta z, \quad \mu_v = \mu + \eta z \quad (6.21)$$

Burada, k hacim genleşme modülü olup, $3k = 3\lambda + 2\mu = 3\lambda_v + 2\mu_v$ şeklindedir. Bu formülasyondan görülmektedir ki, Laplace dönüşümü alınmış elastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısında malzeme sabitleri yerine eşdeğer sabitler konularak viskoelastik bir problem kolayca çözülebilmektedir. Bu olaya elastik-viskoelastik analojisi veya (Correspondence principle) Mütakabiliyet prensibi denilmektedir.

Sabit parametrelili diğer viskoelastik modeller için de aynı işlem sırası izlenebilir. (6.11) ile verilen viskoelastik gerilme-şekil değiştirme bağıntısı, analoji

yardımla çeşitli viskoelastik modeller için kolayca genişletilebilir. Böylece (6.4) ve (6.8) eşitliklerinden

$$\mu_v = \frac{z^n b_n + z^{n-1} b_{n-1} + \dots + z b_1 + b_0}{2(z^m a_m + z^{m-1} a_{m-1} + \dots + z a_1 + a_0)} \quad (6.22)$$

ve

$$\lambda_v = \lambda + \frac{2}{3}(\mu - \mu_v) \quad (6.23)$$

formülleri ile viskoelastik Lamé sabitleri kolayca hesaplanabilir. $a_0, \dots, a_m$ ve $b_0, \dots, b_n$ katsayıları, P ve Q diferansiyel operatörlerde görülen katsayılarıdır.

(6.21) ifadesinde η yerine μg konulursa viskoelastik Lamé sabitleri

$$\mu_v = \mu(1 + g z), \quad \lambda_v = \lambda + \frac{2}{3}(\mu - \mu_v) \quad (6.24)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadelerden yararlanılarak viskoelastik elastisite modülü ve Poisson oranı, viskoelastik Lamé sabitleri cinsinden

$$E_v = 2\mu_v(1 + \nu_v), \quad \nu_v = \frac{\lambda_v}{2(\lambda_v + \mu_v)} \quad (6.25)$$

veya elastik sabitler cinsinden

$$E_v = \frac{E(1 + g z)}{1 + \frac{(1 - 2\nu)}{3} g z}, \quad \nu_v = \frac{3\nu - (1 - 2\nu) g z}{3 + (1 - 2\nu) g z} \quad (6.26)$$

ifade edilmektedir. Burada, E_v , ν_v viskoelastik malzeme sabitleri, g viskoz sönüm oranı ve z Laplace dönüşüm parametresidir.

Lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların dinamik davranışını idare eden adi diferansiyel denklemler Laplace uzayında kanonik formda boyutsuz büyüklükler cinsinden elde edilmiştir.

$$\frac{d\bar{U}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\bar{U}_n + \frac{EI_n}{E_v A c^2}\bar{T}_t \quad (6.27a)$$

$$\frac{d\bar{U}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\bar{U}_t + \frac{h}{c}\bar{U}_b + \bar{\Omega}_b + \frac{\alpha_n EI_n}{G_v A c^2}\bar{T}_n \quad (6.27b)$$

$$\frac{d\bar{U}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\bar{U}_n - \bar{\Omega}_n + \frac{\alpha_b EI_n}{G_v A c^2}\bar{T}_b \quad (6.27c)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\bar{\Omega}_n + \frac{EI_n}{G_v I_t}\bar{M}_t \quad (6.27d)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\bar{\Omega}_t + \frac{h}{c}\bar{\Omega}_b + \frac{E}{E_v}\bar{M}_n \quad (6.27e)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\bar{\Omega}_n + \frac{EI_n}{E_v I_b}\bar{M}_b \quad (6.27f)$$

$$\frac{d\bar{T}_t}{d\phi} = \frac{\rho A c^4 z^2}{EI_n}\bar{U}_t + \frac{a}{c}\bar{T}_n + \bar{B}_7 \quad (6.27g)$$

$$\frac{d\bar{T}_n}{d\phi} = \frac{\rho A c^4 z^2}{EI_n}\bar{U}_n - \frac{a}{c}\bar{T}_t + \frac{h}{c}\bar{T}_b + \bar{B}_8 \quad (6.27h)$$

$$\frac{d\bar{T}_b}{d\phi} = \frac{\rho A c^4 z^2}{EI_n}\bar{U}_b - \frac{h}{c}\bar{T}_n + \bar{B}_9 \quad (6.27i)$$

$$\frac{d\bar{M}_t}{d\phi} = \frac{\rho I_t c^2 z^2}{EI_n}\bar{\Omega}_t + \frac{a}{c}\bar{M}_n + \bar{B}_{10} \quad (6.27j)$$

$$\frac{d\bar{M}_n}{d\phi} = \frac{\rho c^2 z^2}{E}\bar{\Omega}_n + \bar{T}_b - \frac{a}{c}\bar{M}_t + \frac{h}{c}\bar{M}_b + \bar{B}_{11} \quad (6.27k)$$

$$\frac{d\bar{M}_b}{d\phi} = \frac{\rho I_b c^2 z^2}{EI_n}\bar{\Omega}_b - \bar{T}_n - \frac{h}{c}\bar{M}_n + \bar{B}_{12} \quad (6.27l)$$

Çubuğun geometrisine bakılmaksızın, helisel çubukların davranışı dört ayrı durum için incelenecektir.

Durum 1 : Statik yük, elastik malzeme

Durum 2 : Statik yük, viskoelastik malzeme (kuazi-statik durum)

Durum 3 : Dinamik yük, elastik malzeme

Durum 4 : Dinamik yük, viskoelastik malzeme

Çubuk malzemesinin elastik veya viskoelastik olduğuna bakılmaksızın, statik yükleme durumunda (6.27g-l) denklemlerindeki kütleli yoğunluk içeren terimler sıfır alınmaktadır. Çubuk malzemesi viskoelastik olduğu durumda, (6.26) ifadesine göre elastik malzeme sabitleri, viskoelastik malzeme sabitleri ile yer değiştirilmektedir.

7. KOMPOZİT MALZEMELER

Kompozit malzeme, iki veya daha fazla malzemenin biraraya getirilmesiyle meydana gelen malzemelerdir. Bunun amacı, birbirlerinin zayıf yönünü düzelterek üstün özellikler elde etmektir. Kompozit malzemeler, makro düzeyde birleştirilerek amaçlanan doğrultuda bileşenlerinden daha üstün özelliklerin meydana geldiği malzemelerdir. Kompozit malzemeler mikroskobik açıdan heterojen, makroskobik açıdan homojen bir malzeme gibi davranmaktadır. Örnek olarak beton malzeme gösterilebilir.

Kompozit malzeme üretiminde genellikle mekanik dayanım, rijitlik, korozyon direnci, ağırlık, akustik, iletkenlik, ısı iletkenliği, yüksek sıcaklığa dayanıklılık, yorulma dayanımı gibi özelliklerinin geliştirilmesi amaçlanmaktadır.

7.1. Kompozit Malzemelerin Mekanik Davranışları

Kompozit malzemelerin mekanik özelliği, diğer malzemelerden farklıdır. Uygulamada kullanılan malzemelerin birçoğu homojen ve izotropik özellik göstermektedir. Buna karşın kompozit malzemeler genelde heterojen ve anizotropik yapıya sahiptirler.

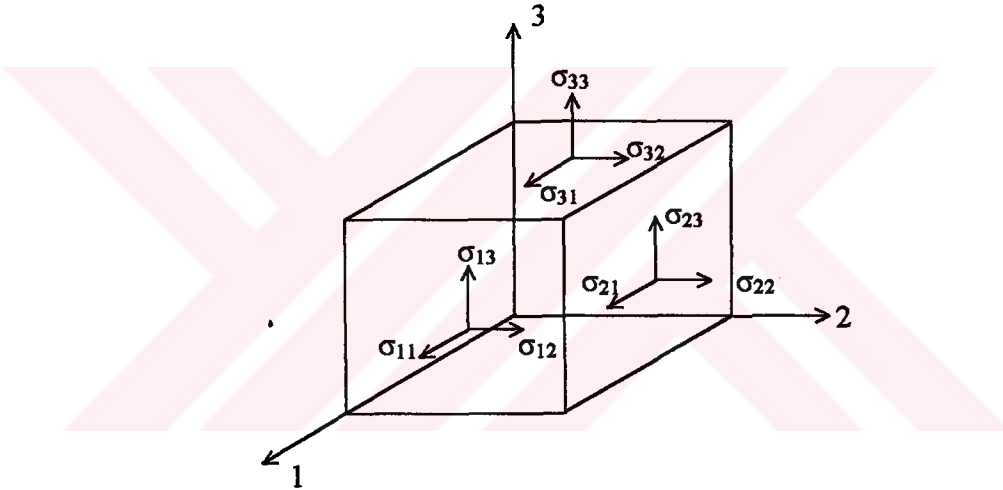
Malzemelerin izotropik veya anizotropik olmasına göre mekanik davranışları farklı özellik gösterirler. Uygulamada, anizotropik malzemelerin bir çoğu ortotropik özellik göstermektedir. İzotropik malzemeler, yapılarında herhangi bir yöne göre farklılık göstermeyen malzemelerdir.

Ortotropik malzemelerde, birbirine dik doğrultulardaki malzeme özellikleri farklılık göstermektedir. Yüklemenin asal malzeme doğrultusunda olması halinde, malzeme üzerinde etkili olan kuvvetin yönüne bağlı olarak izotropik hale benzer bir şekil değişikliği meydana gelir. Kayma halinde, malzemelerin yönlere göre farklı olan Poisson oranları ve elastisite modüllerinden bağımsız açı değişikliği meydana gelebilir.

Anizotropik malzemelerde, normal gerilme doğrultusu asal gerilme doğrultusu ile çakışmamaktadır. Bu durumda, normal gerilme altında hem boyutsal deformasyon hem de açısal şekil değiştirme meydana gelmektedir.

Tabakalı bir kompozit malzeme, çeşitli tabakaların biraraya getirilmesi ile oluşturulmaktadır. Bu tabakalar, farklı malzemelerden oluşacağı gibi, aynı malzemelerden de meydana getirilebilir. Ancak, aynı malzemeye ait tabakaların biraraya getirilmesi halinde, ahşap gibi, yönlere göre farklı özellikler gösteren bir malzeme olmaktadır.

7.2. Anizotropik Malzemelerin Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntısı



Şekil 7.1. Üç boyutlu gerilme hali

Bir cismin herhangi bir noktasındaki gerilme, küçük bir elemana etkiyen gerilmelerin bir eksen takımına göre bileşenleri ile ifade edilirler. Bir düzleme etkiyen gerilme vektörünün üç bileşeni vardır (Şekil 7.1). Üç düzleme etkiyen gerilmeler dokuz bileşenden oluşan σ_{ij} gerilme tansörünü meydana getiriler. Burada, gerilme tansöründeki i indisi gerilmenin etkiği düzlemin normalini, j indisi ise gerilmenin doğrultusunu göstermektedir. σ_{ij} gerilme tansöründe $i=j$ normal gerilme, $i \neq j$ ise kayma gerilmesini temsil etmektedir. Benzer şekilde, ϵ_{ij} şekil değiştirme tansörü de elde edilir. Gerilme ve şekil değiştirme tansörünün dokuz bileşeni olmakla

beraber moment denge koşulundan $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ve $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ simetrik olduğu görülür. Bu nedenle gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinde altı bağımsız sabit bulunmaktadır.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{simetrik} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \text{simetrik} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Çizelge 7.1. Kısaltılmış notasyonda gerilme ve şekil değiştirme tansörü bileşenleri

Gerilme		Şekil değiştirme	
Tansör notasyon	Kısaltılmış notasyon	Tansör notasyon	Kısaltılmış notasyon
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$	ε_4
$\tau_{13} = \sigma_{13}$	σ_5	$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13}$	ε_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	ε_6

Kısaltılmış notasyonu kullanarak lineer elastik malzeme için genelleştirilmiş Hooke kanunu

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{simetrik} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

veya kapalı formda

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \quad (7.3)$$

olarak ifade edilir. Burada C_{ij} rijitlik matrisidir. En genel halde lineer, elastik, anizotropik malzeme için 36 eleman, 21 bağımsız sabit bulunmaktadır.

Eğer malzeme bir simetri düzlemine sahipse (monoclinic), gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

şeklindedir. Monoclinic malzeme için 20 sıfırdan farklı eleman ve 13 bağımsız elastik sabit vardır. Eğer malzeme iki dik simetri düzlemine sahip ise asal malzeme koordinatlarında gerilme-şekil değiştirme ilişkisi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

olup bu tip malzeme özel ortotropik malzeme olarak adlandırılır. Bu durumda, sıfırdan farklı 12 eleman ve 9 bağımsız sabit vardır.

7.3. Ortotropik Malzemeler İçin Elastik Sabitler

Hooke kanunu, esneklik matrisi cinsinden de ifade edilebilir. Esneklik matrisi S_{ij} , gerilme-şekil değiştirme bağıntısının tersi olarak tanımlanır. Şekil değiştirme ile gerilme arasındaki ilişki

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & \text{simetrik} & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

veya kapalı formda

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (7.7)$$

olarak verilmektedir. Esneklik matrisi, C_{ij} rijitlik matrisinin tersidir.

$$S_{ij} = C_{ij}^{-1} \quad (7.8)$$

Esneklik matrisi S_{ij} diyagonale göre simetrik olduğundan

$$\frac{v_{ij}}{E_{ii}} = \frac{v_{ji}}{E_{jj}} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (7.9)$$

eşitliği yazılabilir. (7.9) eşitliği yardımı ile şekil değiştirme-gerilme bağıntısı aşağıdaki hali almaktadır.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-v_{12}}{E_{11}} & \frac{-v_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-v_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simetrik} & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7.10)$$

Esneklik matrisi S_{ij} ile rijitlik matrisi C_{ij} birbirlerinin tersi olmasından dolayı, rijitlik matrisinin bileşenleri esneklik matrisi bileşenleri cinsinden ifade edilmektedir (Jones, 1975).

$$C_{11} = \frac{S_{22} S_{33} - S_{23}^2}{S} \quad C_{12} = \frac{S_{13} S_{23} - S_{12} S_{33}}{S} \quad (7.11a)$$

$$C_{13} = \frac{S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22}}{S} \quad C_{22} = \frac{S_{11} S_{33} - S_{13}^2}{S} \quad (7.11b)$$

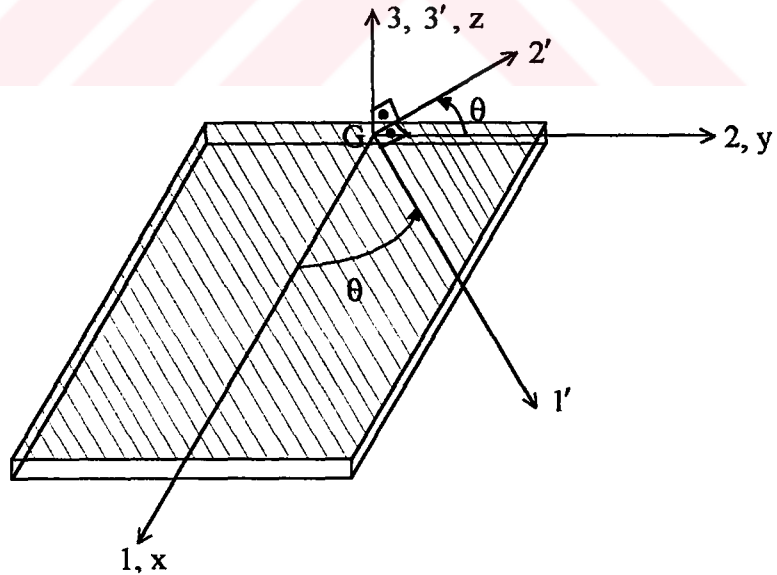
$$C_{23} = \frac{S_{12} S_{13} - S_{11} S_{23}}{S} \quad C_{33} = \frac{S_{11} S_{22} - S_{12}^2}{S} \quad (7.11c)$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}} \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}} \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (7.11d)$$

Burada

$$S = S_{11} S_{22} S_{33} - S_{11} S_{23}^2 - S_{22} S_{13}^2 - S_{33} S_{12}^2 + 2 S_{12} S_{13} S_{23} \quad (7.12)$$

bağıntısı ile verilmektedir.



Şekil 7.2. Ortotropik tabaka için malzeme simetri düzlemi

Ortotropik malzemenin asal malzeme eksenleri ile çubuk eksenleri genelde çakışmazlar (Şekil 7.2). Keyfi olarak seçilmiş fiber doğrultusu ile çubuk eksenindeki açı θ ile gösterilmektedir. 1, 2, 3 koordinatlarında ve 3 eksen etrafında döndürülmüş gerilme-şekil değiştirme ve şekil değiştirme-gerilme bağıntıları

$$\sigma_i = C'_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1,2,\dots,6) \quad (7.13a)$$

$$\varepsilon_i = S'_{ij} \sigma_j \quad (i, j=1,2,\dots,6) \quad (7.13b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada C'_{ij} ve S'_{ij} sırasıyla dönüştürülmüş rijitlik ve esneklik matrisleri olup aşağıdaki verilen bağıntılar yardımı ile hesaplanmaktadır (Jones, 1975).

$$[C'] = [T]^{-1} [C] [R] [T] [R]^{-1} \quad (7.14a)$$

$$[S'] = [R] [T]^{-1} [R]^{-1} [S] [T] \quad (7.14b)$$

Burada $m = \cos \theta$ ve $n = \sin \theta$ olmak üzere dönüşüm matrisleri

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

şeklindedir. Dönüştürülmüş rijitlik ve esneklik matrisleri, (7.14a-b) eşitliklerinin çözümünden

$$[C'] = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

$$[S'] = \begin{bmatrix} S'_{11} & S'_{12} & S'_{13} & 0 & 0 & S'_{16} \\ S'_{12} & S'_{22} & S'_{23} & 0 & 0 & S'_{26} \\ S'_{13} & S'_{23} & S'_{33} & 0 & 0 & S'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S'_{44} & S'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S'_{45} & S'_{55} & 0 \\ S'_{16} & S'_{26} & S'_{36} & 0 & 0 & S'_{66} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

olarak elde edilmektedir. Dönüştürülmüş rijitlik ve esneklik matrisinin elemanları hesaplanmış ve aşağıda verilmiştir.

$$C'_{11} = m^4 C_{11} + 2n^2 m^2 C_{12} + n^4 C_{22} + 4n^2 m^2 C_{66} \quad (7.18a)$$

$$C'_{12} = n^2 m^2 C_{11} + (n^4 + m^4) C_{12} + n^2 m^2 C_{22} - 4n^2 m^2 C_{66} \quad (7.18b)$$

$$C'_{13} = m^2 C_{13} + n^2 C_{23} \quad (7.18c)$$

$$C'_{16} = nm^3 C_{11} + nm(n^2 - m^2) C_{12} - n^3 m C_{22} + 2nm(n^2 - m^2) C_{66} \quad (7.18d)$$

$$C'_{22} = n^4 C_{11} + 2n^2 m^2 C_{12} + m^4 C_{22} + 4n^2 m^2 C_{66} \quad (7.18e)$$

$$C'_{23} = n^2 C_{13} + m^2 C_{23} \quad (7.18f)$$

$$C'_{26} = n^3 m C_{11} + nm(m^2 - n^2) C_{12} - nm^3 C_{22} - 2nm(m^2 - n^2) C_{66} \quad (7.18g)$$

$$C'_{33} = C_{33} \quad (7.18h)$$

$$C'_{36} = nm C_{13} - nm C_{23} \quad (7.18i)$$

$$C'_{44} = m^2 C_{44} + n^2 C_{55} \quad (7.18j)$$

$$C'_{45} = -nm C_{44} + nm C_{55} \quad (7.18k)$$

$$C'_{55} = n^2 C_{44} + m^2 C_{55} \quad (7.18l)$$

$$C'_{66} = n^2 m^2 C_{11} - 2 n^2 m^2 C_{12} + n^2 m^2 C_{22} + (m^2 - n^2)^2 C_{66} \quad (7.18m)$$

$$S'_{11} = m^4 S_{11} + 2 n^2 m^2 S_{12} + n^4 S_{22} + n^2 m^2 S_{66} \quad (7.19a)$$

$$S'_{12} = n^2 m^2 S_{11} + (n^4 + m^4) S_{12} + n^2 m^2 S_{22} - n^2 m^2 S_{66} \quad (7.19b)$$

$$S'_{13} = m^2 S_{13} + n^2 S_{23} \quad (7.19c)$$

$$S'_{16} = 2 n m^3 S_{11} + 2 n m (n^2 - m^2) S_{12} - 2 n^3 m S_{22} + n m (n^2 - m^2) S_{66} \quad (7.19d)$$

$$S'_{22} = n^4 S_{11} + 2 n^2 m^2 S_{12} + m^4 S_{22} + n^2 m^2 S_{66} \quad (7.19e)$$

$$S'_{23} = n^2 S_{13} + m^2 S_{23} \quad (7.19f)$$

$$S'_{26} = 2 n^3 m S_{11} + 2 n m (m^2 - n^2) S_{12} - 2 n m^3 S_{22} + n m (m^2 - n^2) S_{66} \quad (7.19g)$$

$$S'_{33} = S_{33} \quad (7.19h)$$

$$S'_{36} = 2 n m S_{13} - 2 n m S_{23} \quad (7.19i)$$

$$S'_{44} = m^2 S_{44} + n^2 S_{55} \quad (7.19j)$$

$$S'_{45} = -n m S_{44} + n m S_{55} \quad (7.19k)$$

$$S'_{55} = n^2 S_{44} + m^2 S_{55} \quad (7.19l)$$

$$S'_{66} = 4 n^2 m^2 S_{11} - 8 n^2 m^2 S_{12} + 4 n^2 m^2 S_{22} + (m^2 - n^2)^2 S_{66} \quad (7.19m)$$

7.4. Ortotropik Tabakalı Çubuklar İçin Elastik Sabitler

Klasik çubuk teorilerinden benimsenen

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0 \quad (7.20)$$

kabulü yapılmaktadır. Buna göre şekil değiştirme-gerilme ilişkisi, matris notasyonunda

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7.21)$$

olup matris ayrıklaştırılırsa (7.22) ve (7.23) ifadeleri yazılabilmektedir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{15} & S_{16} \\ S_{15} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{45} & S_{46} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

(7.22) ifadesinin gerilme-şekil değiştirme cinsinden kapalı formu

$$\sigma_i = S_{ij}^{-1} \varepsilon_j \quad (i, j=1,5,6) \quad (7.24)$$

şeklindedir. (7.24) ifadesi (7.23) eşitliğinde yerine konulduğunda

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{45} & S_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{15} & S_{16} \\ S_{15} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

ve kapalı formda

$$\varepsilon_\beta = S_{\beta j} \alpha_{jk} \varepsilon_k \quad (j, k=1,5,6 ; \beta=2,3,4) \quad (7.26)$$

halini alır (Yıldırım, 1999b). Burada

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = S_{ij}^{-1} \quad (i, j=1,5,6) \quad (7.27)$$

ve

$$d = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{15} & S_{16} \\ S_{15} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{56} & S_{66} \end{vmatrix} \quad (7.28)$$

olmak üzere α_{ij} matrisinin bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$\alpha_{11} = \frac{S_{55} S_{66} - S_{56}^2}{d} \quad \alpha_{15} = \frac{S_{16} S_{56} - S_{15} S_{66}}{d} \quad (7.29a)$$

$$\alpha_{16} = \frac{S_{15} S_{56} - S_{16} S_{55}}{d} \quad \alpha_{55} = \frac{S_{11} S_{66} - S_{16}^2}{d} \quad (7.29b)$$

$$\alpha_{56} = \frac{S_{15} S_{16} - S_{11} S_{56}}{d} \quad \alpha_{66} = \frac{S_{11} S_{55} - S_{15}^2}{d} \quad (7.29c)$$

Ortotropik tabaka için fiber doğrultularının 0° ve 90° olması halinde $\alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{56} = 0$ olmaktadır.

Böylece lineer elastik genelleştirilmiş Hooke bağıntısı indirgenmiş olur.

$$\sigma_i = Q_{ij} \varepsilon_j \quad (i, j=1,5,6) \quad (7.30)$$

Burada Q_{ij} indirgenmiş rijitlik matrisi olup

$$Q_{ij} = C_{ij} + C_{i\beta} S_{\beta k} \alpha_{kj} \quad (i, j, k=1,5,6 ; \beta=2,3,4) \quad (7.31)$$

şeklinde hesaplanmaktadır (Yıldırım, 1999b). İndirgenmiş matrisler için kısaltılmış notasyon kullanılabilir.

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma_6 \quad \tilde{\sigma}_3 = \sigma_5 \quad (7.32a)$$

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_6 \quad \tilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_5 \quad (7.32b)$$

$$\tilde{Q}_{11} = Q_{11} \quad \tilde{Q}_{12} = Q_{16} \quad \tilde{Q}_{13} = Q_{15} \quad (7.33a)$$

$$\tilde{Q}_{21} = Q_{61} \quad \tilde{Q}_{22} = Q_{66} \quad \tilde{Q}_{23} = Q_{65} \quad (7.33b)$$

$$\tilde{Q}_{31} = Q_{51} \quad \tilde{Q}_{32} = Q_{56} \quad \tilde{Q}_{33} = Q_{55} \quad (7.33c)$$

(7.30) ifadesinde tanımlanan indirgenmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntısı (7.32a-b) ve (7.33a-c) eşitlikleri yardımı ile kısaltılmış notasyon cinsinden

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{Q}_{ij} \tilde{\epsilon}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (7.34)$$

elde edilir ve transformasyon uygulanırsa, dönüştürülmüş ve indirgenmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntısı

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{Q}'_{ij} \tilde{\epsilon}_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (7.35)$$

halini alır.

Ortotropik tabakalı çubuk için dönüştürülmüş ve indirgenmiş rijitlik matrisinin sıfırdan farklı elemanları aşağıda verilmektedir.

$$\tilde{Q}'_{11} = C'_{11} + (C'_{12} S'_{12} + C'_{13} S'_{31})\alpha'_{11} + (C'_{12} S'_{26} + C'_{13} S'_{36})\alpha'_{61} \quad (7.36a)$$

$$\tilde{Q}'_{12} = C'_{16} + (C'_{12} S'_{21} + C'_{13} S'_{31})\alpha'_{16} + (C'_{12} S'_{26} + C'_{13} S'_{36})\alpha'_{66} \quad (7.36b)$$

$$\tilde{Q}'_{22} = C'_{66} + (C'_{62} S'_{21} + C'_{63} S'_{31})\alpha'_{16} + (C'_{62} S'_{26} + C'_{63} S'_{36})\alpha'_{66} \quad (7.36c)$$

$$\tilde{Q}'_{33} = C'_{55} \quad (7.36d)$$

Burada

$$\alpha'_{11} = \frac{S'_{66}}{S'_{11}S'_{66} - S'^2_{16}}, \quad \alpha'_{16} = \alpha'_{61} = \frac{-S'_{16}}{S'_{11}S'_{66} - S'^2_{16}}, \quad \alpha'_{66} = \frac{S'_{11}}{S'_{11}S'_{66} - S'^2_{16}} \quad (7.37)$$

7.5. Kompozit Çubuklar İçin Bünye Denklemleri

Kuvvet ve moment ifadeleri rölatif birim uzama ve dönme cinsinden ifade edilebilir. (3.10a-d) eşitliklerinde verilen şekil değiştirme tansörü e_{mn} , kesit çarpılması ihmal edilirse kısaltılmış notasyon cinsinden

$$e_1 = \gamma_1^0 - x_2 \omega_3^0 + x_3 \omega_2^0 \quad (7.38a)$$

$$e_5 = \gamma_5^0 + x_2 \omega_1^0 \quad (7.38b)$$

$$e_6 = \gamma_6^0 - x_3 \omega_1^0 \quad (7.38c)$$

olarak elde edilir. (7.32) ve (7.33) ifadeleri yardımı ile (7.38) eşitliklerinin indirgenmiş notasyon cinsinden kapalı formda

$$\tilde{\epsilon}_i = \tilde{\gamma}_i^0 + \epsilon_{ijk} \tilde{\omega}_j^0 x_k \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (7.39)$$

gösterilir (Yıldırım, 1999b). Gerilme bileşkeleri olan $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{M}$ vektörlerinin kesit üzerinde x_i dik koordinat takımındaki bileşenleri olan (3.18) ve (3.19a-c) ifadeleri kapalı formda düzenlenebilir.

$$T_i = \int_A \tilde{\sigma}_i dA \quad M_i = \epsilon_{ijk} \int_A x_j \tilde{\sigma}_k dA \quad (7.40)$$

(7.35), (7.39) ve (7.40) ifadelerinden yararlanarak kuvvet ve momentler, rölatif birim uzama ve dönme cinsinden ifade edilirler.

$$T_i = A_{ij} \tilde{\gamma}_j^0 + B_{ij} \tilde{\omega}_j^0 \quad (i, j=1,2,3) \quad (7.41a)$$

$$M_i = F_{ij} \tilde{\gamma}_j^0 + D_{ij} \tilde{\omega}_j^0 \quad (i, j=1,2,3) \quad (7.41b)$$

Burada

$$A_{ij} = \int_A \tilde{Q}_{ij} dA \quad B_{ij} = \varepsilon_{mjk} \int_A \tilde{Q}_{im} x_k dA \quad (7.42a)$$

$$F_{ij} = \varepsilon_{ikm} \int_A x_k \tilde{Q}_{mj} dA \quad D_{ij} = \varepsilon_{ihk} \varepsilon_{mjp} \int_A x_h x_p \tilde{Q}_{km} dA \quad (7.42b)$$

olmak üzere **A**, **B**, **F**, **D** matrisleri (3×3) boyutunda olup kesit geometrisi ve malzeme özelliklerine bağlıdır (Yıldırım, 1999b). (7.41) eşitliklerinin tersini alarak bünye denklemleri

$$\tilde{\gamma}_i^0 = A'_{ij} T_j + B'_{ij} M_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (7.43a)$$

$$\tilde{\omega}_i^0 = F'_{ij} T_j + D'_{ij} M_j \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (7.43b)$$

yazılabilir. Burada

$$A' = A^* - B^* D^{*-1} F^*, \quad B' = B^* D^{*-1}, \quad F' = -D^{*-1} F^*, \quad D' = D^{*-1} \quad (7.44a)$$

$$A^* = A^{-1}, \quad B^* = -A^{-1} B, \quad F^* = F A^{-1}, \quad D^* = D - F A^{-1} B \quad (7.44b)$$

(7.43a-b) ifadeleri ile elde edilen bünye denklemleri, geometrik uygunluk denklemlerinde yerine konulduğunda

$$\frac{\partial U^0}{\partial s} = A' T + B' M + t \times \Omega^0 \quad (7.45a)$$

$$\frac{\partial \Omega^0}{\partial s} = F' T + D' M \quad (7.45b)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak en genel halde N adet anizotrop tabakadan oluşan x_i dik koordinat takımında uzaysal eğri eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial U_1^0}{\partial s} = \chi_3 U_2^0 - \chi_2 U_3^0 + A'_{1j} T_j^0 + B'_{1j} M_j^0 \quad (7.46a)$$

$$\frac{\partial U_2^0}{\partial s} = -\chi_3 U_1^0 + \chi_1 U_3^0 + \Omega_3^0 + A'_{2j} T_j^0 + B'_{2j} M_j^0 \quad (7.46b)$$

$$\frac{\partial U_3^0}{\partial s} = -\chi_1 U_2^0 + \chi_2 U_1^0 - \Omega_2^0 + A'_{3j} T_j^0 + B'_{3j} M_j^0 \quad (7.46c)$$

$$\frac{\partial \Omega_1^0}{\partial s} = \chi_3 \Omega_2^0 - \chi_2 \Omega_3^0 + F'_{1j} T_j^0 + D'_{1j} M_j^0 \quad (7.46d)$$

$$\frac{\partial \Omega_2^0}{\partial s} = -\chi_3 \Omega_1^0 + \chi_1 \Omega_3^0 + F'_{2j} T_j^0 + D'_{2j} M_j^0 \quad (7.46e)$$

$$\frac{\partial \Omega_3^0}{\partial s} = -\chi_1 \Omega_2^0 + \chi_2 \Omega_1^0 + F'_{3j} T_j^0 + D'_{3j} M_j^0 \quad (7.46f)$$

$$\frac{\partial T_1^0}{\partial s} = \tilde{A} \frac{\partial^2 U_1^0}{\partial t^2} - \tilde{S}_3 \frac{\partial^2 \Omega_3^0}{\partial t^2} + \tilde{S}_2 \frac{\partial^2 \Omega_2^0}{\partial t^2} + \chi_3 T_2^0 - \chi_2 T_3^0 - p_1^{(ex)} \quad (7.46g)$$

$$\frac{\partial T_2^0}{\partial s} = \tilde{A} \frac{\partial^2 U_2^0}{\partial t^2} - \tilde{S}_2 \frac{\partial^2 \Omega_1^0}{\partial t^2} + \chi_1 T_3^0 - \chi_3 T_1^0 - p_2^{(ex)} \quad (7.46h)$$

$$\frac{\partial T_3^0}{\partial s} = \tilde{A} \frac{\partial^2 U_3^0}{\partial t^2} + \tilde{S}_3 \frac{\partial^2 \Omega_1^0}{\partial t^2} + \chi_2 T_1^0 - \chi_1 T_2^0 - p_3^{(ex)} \quad (7.46i)$$

$$\frac{\partial M_1^0}{\partial s} = \tilde{I}_1 \frac{\partial^2 \Omega_1^0}{\partial t^2} - \tilde{S}_2 \frac{\partial^2 U_2^0}{\partial t^2} + \tilde{S}_3 \frac{\partial^2 U_3^0}{\partial t^2} + \chi_3 M_2^0 - \chi_2 M_3^0 - m_1^{(ex)} \quad (7.46j)$$

$$\frac{\partial M_2^0}{\partial s} = \tilde{I}_2 \frac{\partial^2 \Omega_2^0}{\partial t^2} + \tilde{S}_2 \frac{\partial^2 U_1^0}{\partial t^2} - \tilde{I}_{23} \frac{\partial^2 \Omega_3^0}{\partial t^2} + \chi_1 M_3^0 - \chi_3 M_1^0 + T_3^0 - m_2^{(ex)} \quad (7.46k)$$

$$\frac{\partial M_3^0}{\partial s} = \tilde{I}_3 \frac{\partial^2 \Omega_3^0}{\partial t^2} - \tilde{S}_3 \frac{\partial^2 U_1^0}{\partial t^2} - \tilde{I}_{23} \frac{\partial^2 \Omega_2^0}{\partial t^2} + \chi_2 M_1^0 - \chi_1 M_2^0 - T_2^0 - m_3^{(ex)} \quad (7.46l)$$

Burada

$$\tilde{A} = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} A^{(k)}, \quad \tilde{S}_2 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} x_3 dA \quad (7.47a)$$

$$\tilde{S}_3 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} x_2 dA, \quad \tilde{I}_2 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_3)^2 dA \quad (7.47b)$$

$$\tilde{I}_3 = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} (x_2)^2 dA, \quad \tilde{I}_{23} = \sum_{k=1}^N \rho^{(k)} \int_{A^{(k)}} x_2 x_3 dA \quad (7.47c)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{ij}^{(k)} A^{(k)}, \quad B_{ij} = \epsilon_{mj p} \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{im}^{(k)} \int_{A^{(k)}} x_p dA \quad (7.47d)$$

$$F_{ij} = \epsilon_{inm} \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{mj}^{(k)} \int_{A^{(k)}} x_n dA, \quad D_{ij} = \epsilon_{ihn} \epsilon_{mj p} \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{nm}^{(k)} \int_{A^{(k)}} x_p x_h dA \quad (7.47e)$$

olur. **A**, **B**, **F** ve **D** matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitleri cinsinden elde edilmektedir (Yıldırım, 1999b). Daire kesit için burulma rijitliği

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 \quad (7.48)$$

ve dikdörtgen kesit için burulma rijitliği ise

$$\tilde{I}_1 \cong \frac{1}{40} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\rho^{(k)} (A^4)^{(k)}}{I_2^{(k)} + I_3^{(k)}} \right] \quad (7.49)$$

olarak hesaplanmaktadır (Yıldırım, 1999c). x_2 ve x_3 eksenleri asal eksenler olup, kesit bu eksenlere göre geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse

$$\tilde{I}_{23} = \tilde{S}_2 = \tilde{S}_3 = 0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} = 0 \quad (7.50)$$

olur. Böylece **A** ve **D** matrislerinin sıfırdan farklı elemanları, indirgenmiş rijitlik matrisi cinsinden

$$A_{11} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{11}^{(k)} A^{(k)} \quad A_{12} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{12}^{(k)} A^{(k)} \quad (7.51a)$$

$$A_{22} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{22}^{(k)} A^{(k)} \quad A_{33} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{33}^{(k)} A^{(k)} \quad (7.51b)$$

$$D_{11} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{33}^{(k)} I_3^{(k)} + \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{22}^{(k)} I_2^{(k)} \quad D_{12} = - \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{21}^{(k)} I_2^{(k)} \quad (7.51c)$$

$$D_{22} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{11}^{(k)} I_2^{(k)} \quad D_{33} = \sum_{k=1}^N \tilde{Q}_{11}^{(k)} I_3^{(k)} \quad (7.51d)$$

ifade edilirler. Dönüştürülmüş A' ve D' matrisleri (7.44a) eşitlikleri yardımı ile aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$A'_{11} = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad A'_{12} = - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad (7.52a)$$

$$A'_{22} = \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad A'_{33} = \frac{1}{A_{33}} \quad (7.52b)$$

$$D'_{11} = \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2} \quad D'_{12} = - \frac{D_{12}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2} \quad (7.52c)$$

$$D'_{22} = \frac{D_{11}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2} \quad D'_{33} = \frac{1}{D_{33}} \quad (7.52d)$$

Kesitin kayma merkezi ile ağırlık merkezinin üst üste düştüğü ve kesit çarpılmasının ihmal edildiği kabul edilirse n , b eksenleri asal eksenler olmaktadır. Seçilen kesitin geometri ve malzeme bakımından simetrik olduğu düşünülürse, hareketli koordinat takımında N adet kompozit tabakadan oluşan dairesel silindirik helisel çubukların dinamik davranışını idare eden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı Laplace uzayında kanonik formda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\bar{U}_n + cA'_{11}\bar{T}_t + cA'_{12}\bar{T}_n \quad (7.53a)$$

$$\frac{d\bar{U}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\bar{U}_t + \frac{h}{c}\bar{U}_b + c\bar{\Omega}_b + c\alpha_n A'_{22}\bar{T}_n + cA'_{21}\bar{T}_t \quad (7.53b)$$

$$\frac{d\bar{U}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\bar{U}_n - c\bar{\Omega}_n + c\alpha_b A'_{33}\bar{T}_b \quad (7.53c)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_t}{d\phi} = \frac{a}{c}\bar{\Omega}_n + cD'_{11}\bar{M}_t + cD'_{12}\bar{M}_n \quad (7.53d)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_n}{d\phi} = -\frac{a}{c}\bar{\Omega}_t + \frac{h}{c}\bar{\Omega}_b + cD'_{22}\bar{M}_n + cD'_{21}\bar{M}_t \quad (7.53e)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_b}{d\phi} = -\frac{h}{c}\bar{\Omega}_n + cD'_{33}\bar{M}_b \quad (7.53f)$$

$$\frac{d\bar{T}_t}{d\phi} = cz^2 \tilde{A}\bar{U}_t + \frac{a}{c}\bar{T}_n + c\bar{B}_7 \quad (7.53g)$$

$$\frac{d\bar{T}_n}{d\phi} = cz^2 \tilde{A}\bar{U}_n + \frac{h}{c}\bar{T}_b - \frac{a}{c}\bar{T}_t + c\bar{B}_8 \quad (7.53h)$$

$$\frac{d\bar{T}_b}{d\phi} = cz^2 \tilde{A}\bar{U}_b - \frac{h}{c}\bar{T}_n + c\bar{B}_9 \quad (7.53i)$$

$$\frac{d\bar{M}_t}{d\phi} = cz^2 \tilde{I}_1 \bar{\Omega}_t + \frac{a}{c}\bar{M}_n + c\bar{B}_{10} \quad (7.53j)$$

$$\frac{d\bar{M}_n}{d\phi} = cz^2 \tilde{I}_2 \bar{\Omega}_n + \frac{h}{c}\bar{M}_b - \frac{a}{c}\bar{M}_t + c\bar{T}_b + c\bar{B}_{11} \quad (7.53k)$$

$$\frac{d\bar{M}_b}{d\phi} = cz^2 \tilde{I}_3 \bar{\Omega}_b - \frac{h}{c}\bar{M}_n - c\bar{T}_n + c\bar{B}_{12} \quad (7.53l)$$

$\bar{\mathbf{B}}(\phi, z)$ kolon matrisinin elemanları (7.54) denkleminde verilmiştir. Laplace dönüşümünden gelen başlangıç şartları, $\bar{\mathbf{B}}(\phi, z)$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

$$\begin{aligned} \bar{B}_i(\phi, z) &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6) \\ \bar{B}_{6+j}(\phi, z) &= -\left(\bar{p}_j^{(ex)}\right) - \rho \tilde{A} \left[zU_j^\circ(\phi, 0) + \frac{\partial U_j^\circ(\phi, 0)}{\partial t} \right] \quad (j=1, 2, 3) \\ \bar{B}_{9+j}(\phi, z) &= -\left(\bar{m}_j^{(ex)}\right) - \rho \tilde{I}_j \left[z\Omega_j^\circ(\phi, 0) + \frac{\partial \Omega_j^\circ(\phi, 0)}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (7.54)$$

8. SAYISAL UYGULAMALAR

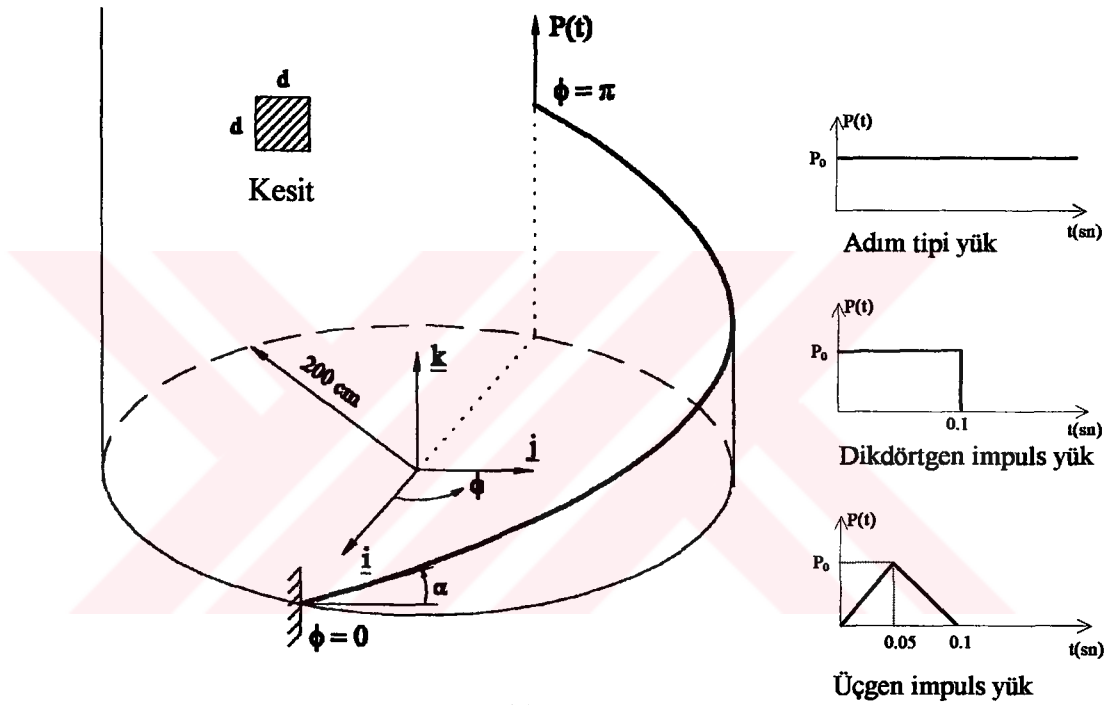
Bu bölümde, lineer elastik, viskoelastik ve anizotropik çubuk malzemesi halleri için sayısal uygulamalar üç grup halinde ayrı ayrı incelenecektir. Her bir malzeme halini içeren, zamanla keyfi değişen yükler altında silindirik helisel çubukların zorlanmış titreşimini analiz etmek için FORTRAN77 dilinde genel amaçlı bilgisayar programları hazırlanmıştır. Bu programlarda, sistem dinamik rijitlik matrisleri ve sistem yük vektörleri Laplace uzayında tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi (TFY) yardımı ile elde edilmektedir. Sistem matrisleri, kanonik formda verilen, lineer elastik-izotropik malzemeler için (4.18a-l), viskoelastik malzemeler için (6.27a-l) ve anizotropik malzemeler için (7.53a-l) numaralı diferansiyel denklemlerin çözümlerinden elde edilmektedir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için beşinci mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması (EK-A'ya bakınız) adapte edilmiştir. Özel olarak, helisel çubukların serbest titreşim frekansları, sistem yük vektörü sıfıra eşitlenip sistem dinamik rijitlik matrisindeki Laplace parametresi “z” yerine “i ω ” konularak hesaplanmaktadır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır.

8.1. Konsol Helis

Bu konsol helis problemi ilk olarak, elastik malzeme için Kırıl ve Ural (1975), viskoelastik malzeme için Kırıl ve ark. (1976)'da adım tipi ve dikdörtgen impuls tipi yükler altında Laplace uzayında taşıma matrisi yöntemi ile çözülmüş, zaman uzayındaki gerçek çözümlere geçmek için 'Maximum Degree of Precision' ters Laplace tekniği uygulanmıştır. Aynı problem Haktanır (1990)'da Laplace uzayında taşıma matrisi metodu ve ters dönüşüm metodu için 'Maximum Degree of Precision' tekniğini kullanarak tekrar çözülmüştür. Bu ters dönüşüm tekniğinin çok kısa zaman aralığı için geçerli olduğu ve uzun süreli çözümlerde dinamik davranışın bozulduğu ilgili kaynakta (Haktanır, 1990) belirtilmiştir. Önceki çalışmalarda bu problem etkin olarak çözülememiştir. Bunun için iyi bir ters dönüşüm tekniğine ihtiyaç olup en iyi

sayısal ters Laplace dönüşüm tekniğinin Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace tekniği olduğu EK-B.2'de gösterilmiştir.

Şekil 8.1'de görülen kare kesitli konsol helis $d=12\text{cm}$, helisin sarıldığı dairenin yarıçapı $a=200\text{ cm}$, yükselme açısı $\alpha=25.52^\circ$ ve malzeme özellikleri; $E=2.06 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$, $\rho=7850\text{ kg/m}^3$ ve $\nu=0.3$ olarak verilmektedir. Konsol helisin serbest titreşim frekansları, bu çalışmada önerilen yöntem ile ANSYS sonuçları Çizelge 8.1'de karşılaştırılmıştır.



Şekil 8.1. Konsol helis ve dinamik yük tipleri

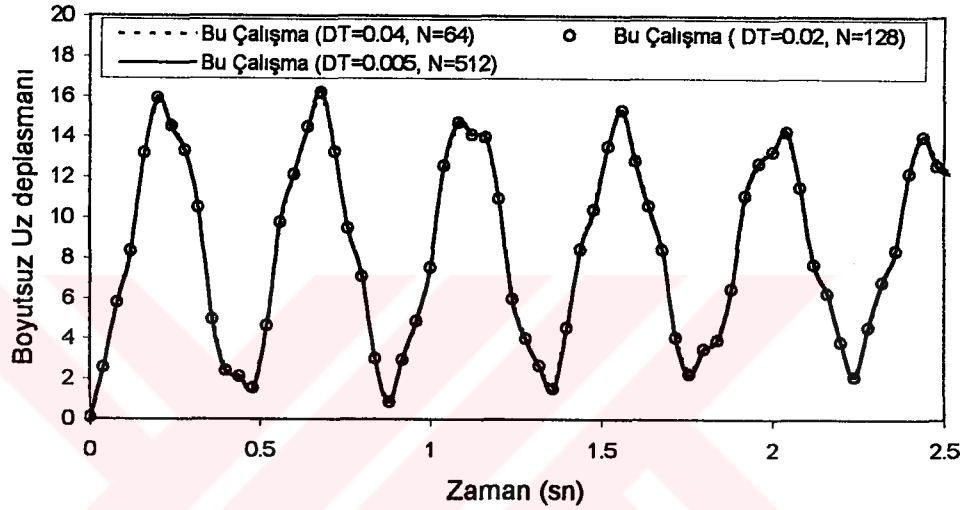
Çizelge 8.1. Doğal Frekanslar (Hertz)

(SEY: Sonlu elemanlar yöntemi, TFY: Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi)

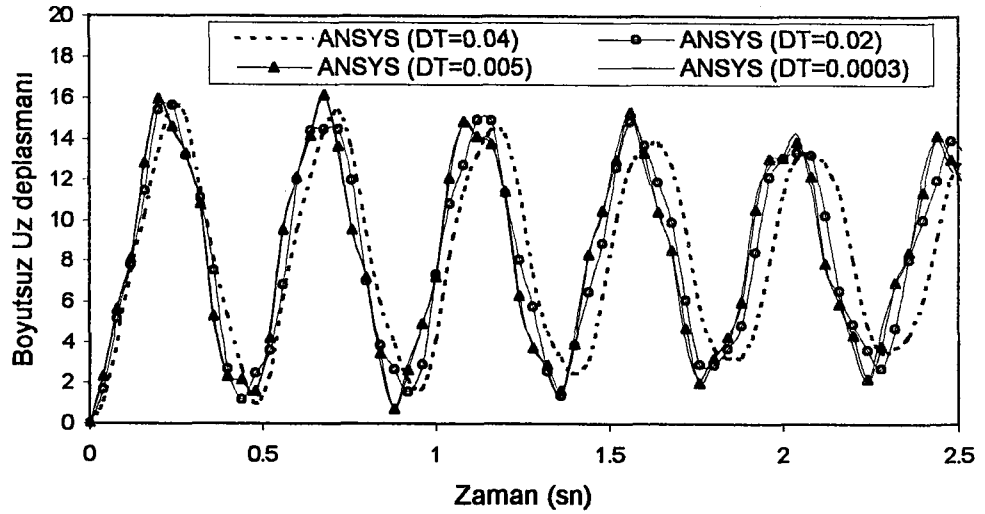
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ANSYS (21 eleman) SEY	2.232	2.398	8.067	8.403	25.714	29.945	58.016	63.773	102.018	108.84
ANSYS (41 eleman) SEY	2.229	2.395	8.055	8.389	25.678	29.899	57.935	63.679	101.862	108.67
ANSYS (61 eleman) SEY	2.228	2.395	8.052	8.387	25.671	29.899	57.920	63.661	101.832	108.63
ANSYS (81 eleman) SEY	2.228	2.394	8.052	8.387	25.669	29.887	57.914	63.654	101.822	108.62
ANSYS (101 eleman) SEY	2.228	2.394	8.051	8.386	25.667	29.885	57.911	63.651	101.817	108.62
ANSYS (121 eleman) SEY	2.228	2.394	8.051	8.386	25.667	29.884	57.910	63.649	101.814	108.61
Bu Çalışma ^{TFY}	2.227	2.394	8.051	8.385	25.665	29.883	57.907	63.645	101.808	108.61

Çizelge 8.1 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile çok fazla sayıda eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmektedir.

Bu çalışmada önerilen modelin geçerliliğini test etmek amacıyla Laplace dönüşüm parametresi ve zaman artımı etkilerini göstermek için elastik konsol helisin parametrik analizleri yapılmıştır. $P_0=10^6$ N şiddetinde adım tipi yük altında helisin serbest ucundaki düşey deplasman hesaplanmış ve Şekil 8.2-8.3’de verilmiştir.



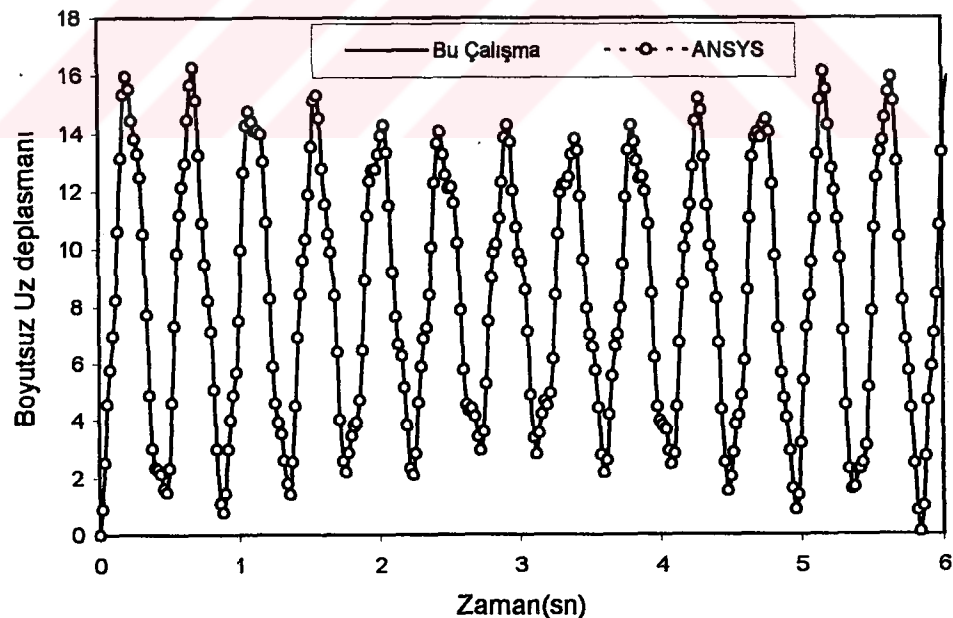
Şekil 8.2. Bu çalışmada bulunan konsol helisin serbest ucundaki düşey deplasman



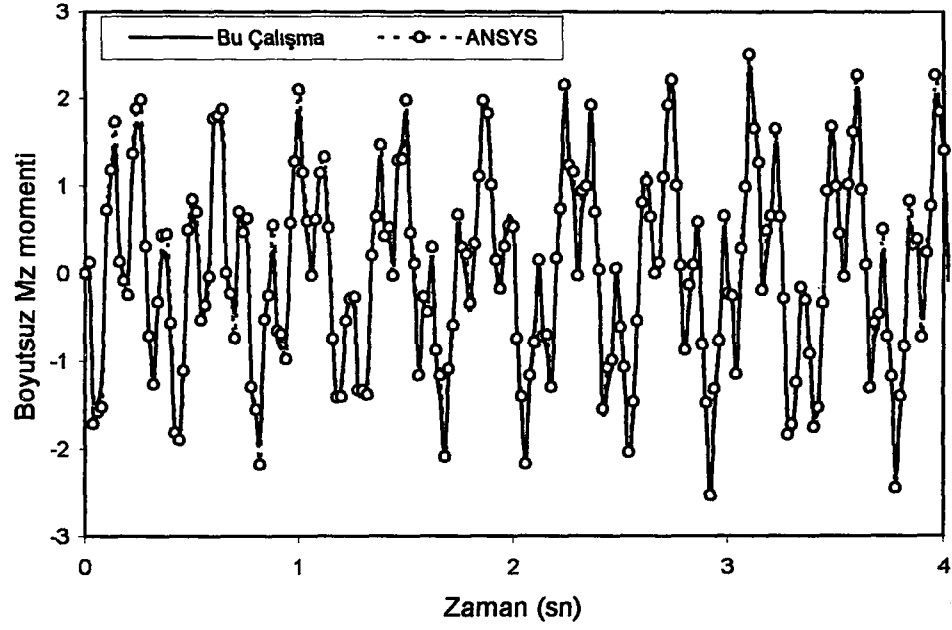
Şekil 8.3. ANSYS programı ile bulunan konsol helisin serbest ucundaki düşey deplasman

Şekil 8.2 incelendiğinde, kaba zaman artımı ($DT=0.04$ sn) ile birlikte az sayıda Laplace parametresi kullanarak bulunan sonuçlar ile çok küçük zaman artımı ve fazla sayıda Laplace parametresi kullanarak bulunan sonuçların üst üste düştüğü görülmektedir ki bu, önerilen modelin etkinliğini göstermektedir. Şekil 8.3, 81 adet doğru eksenli çubuk elemanı kullanarak sonlu elemanlara dayalı ANSYS programı ile bulunan deplasmanları göstermektedir. ANSYS programı ile tutarlı sonuçlar elde edebilmek için $DT=0.005$ sn ve çok daha küçük zaman artımları alınması gerekmektedir.

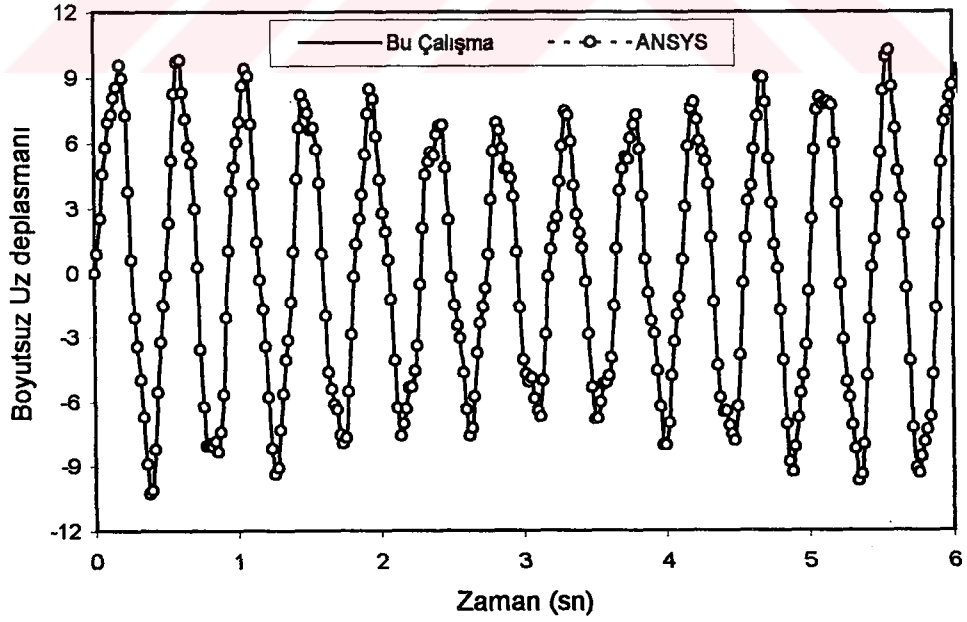
Çeşitli yüklemeler altında serbest uçtaki düzey deplasman ve ankastre uçtaki momentin zamanla değişimleri ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmış ve grafik formda gösterilmiştir (Şekil 8.4-8.9). Yeterli hassasiyette çözüm elde edebilmek için, bu çalışmada problem tek eleman ve 0.02 sn zaman artımı kullanarak modellenmesine karşın, ANSYS ile 81 doğru eksenli eleman ve çok küçük zaman artımı (DT=0.005 sn) alınmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca, bu çalışmada hazırlanan bilgisayar programının işlem süresi ANSYS'in işlem süresinin yaklaşık beşte biridir.



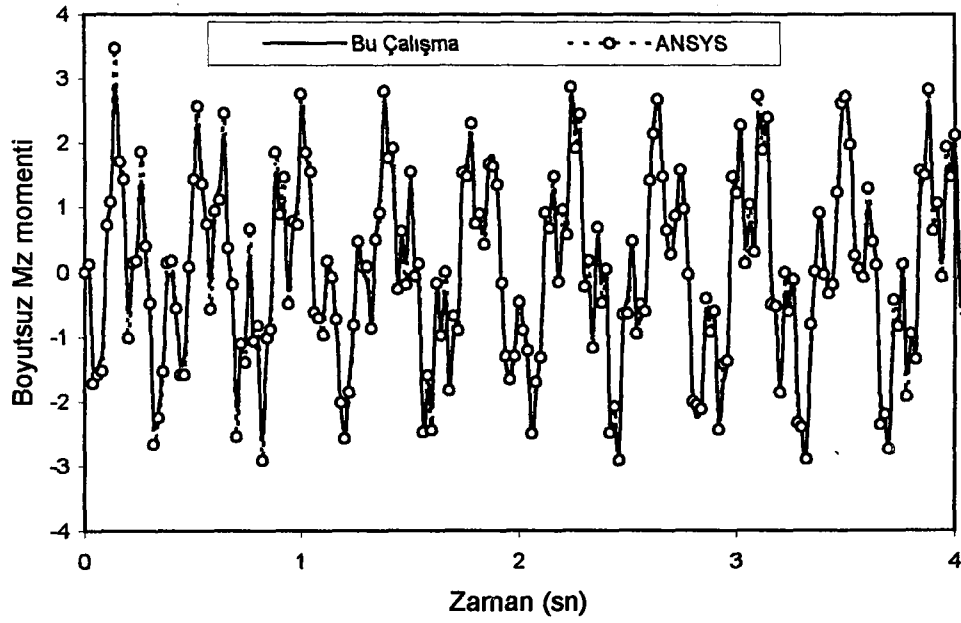
Şekil 8.4. Adım tipi yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi



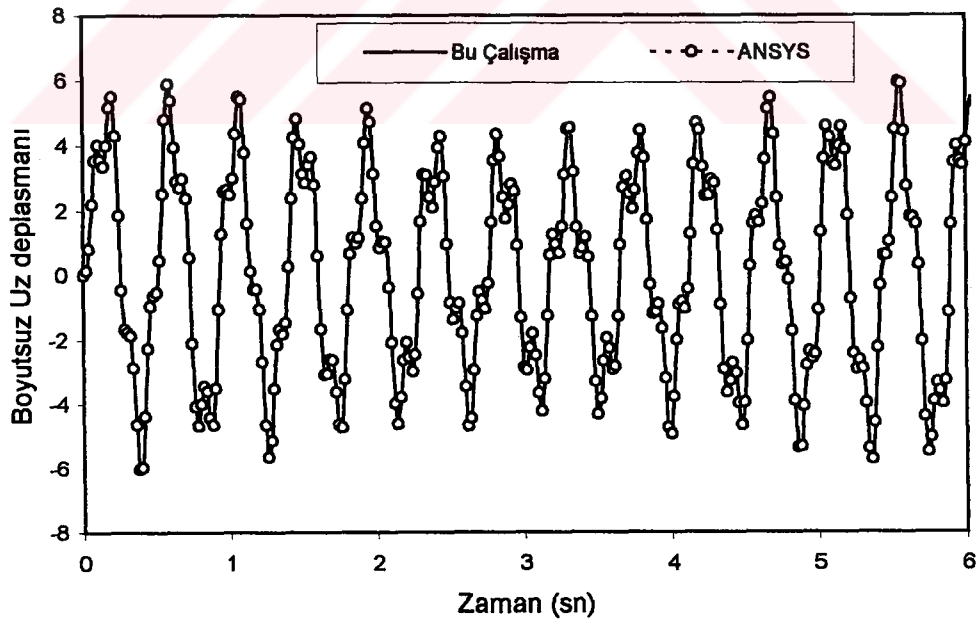
Şekil 8.5. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki momentinin zamanla değişimi



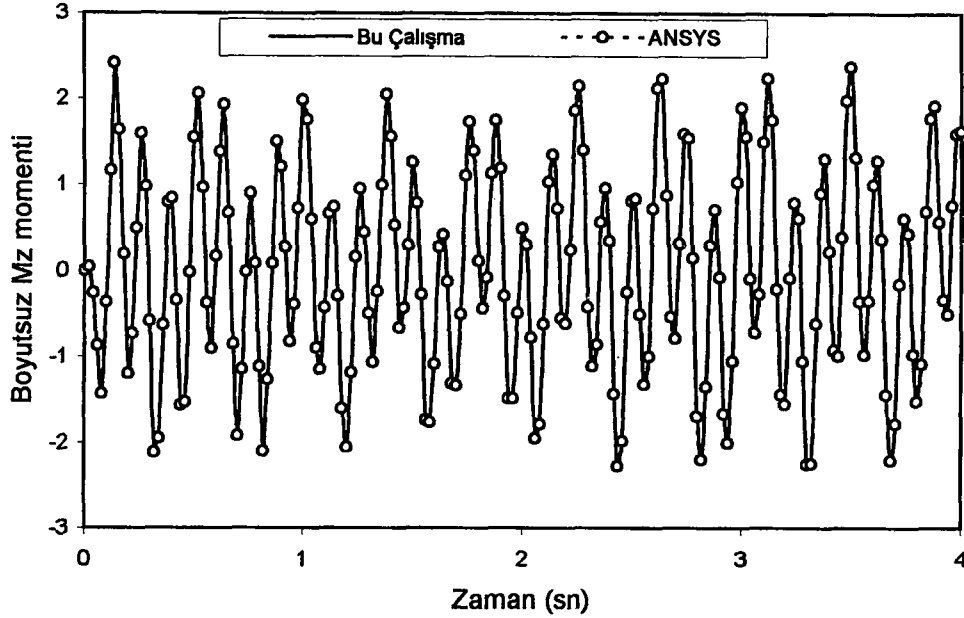
Şekil 8.6. Dikdörtgen impulsif yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 8.7. Dikdörtgen impulsif yük altında ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi



Şekil 8.8. Üçgen impulsif yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi

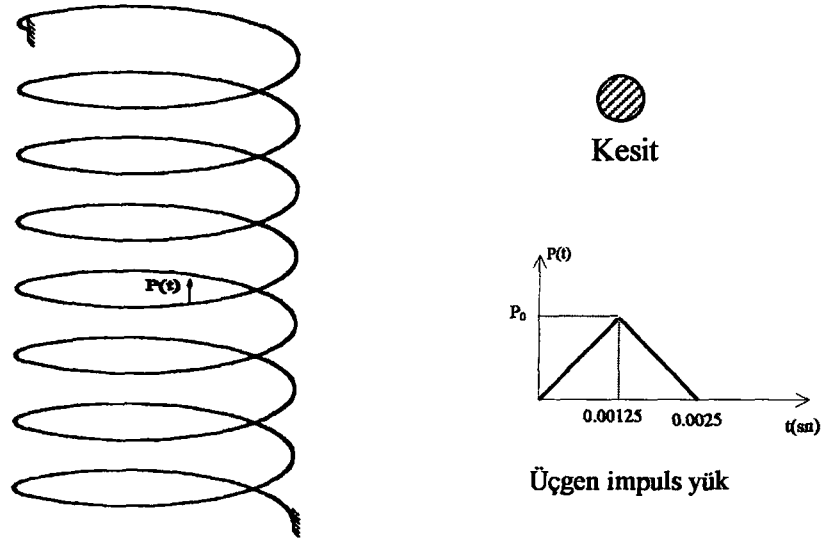


Şekil 8.9. Üçgen impulsif yük altında ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi

8.2. İki Ucu Ankastre 7.6 Sarımlık Helisel Yay

Bu tezde önerilen modelin geçerliliğini göstermek için, literatürde verilmiş iki ucu ankastre 7.6 sarımlık helisel yayın serbest ve zorlanmış titreşim analizleri yapılmıştır. Bu örneğe ait serbest titreşim frekansları ilk defa Mottershead (1980) tarafından deneysel olarak bulunmuştur. Mottershead ayrıca, sonlu elemanlar ile titreşim frekanslarını hesaplayıp, bunları kendi deneysel sonuçları ile karşılaştırmıştır. Aynı örnek Pearson (1982), Haktanır (1990), Yıldırım (1996), Yıldırım (1999a) tarafından kendi sayısal sonuçlarının doğruluğunu göstermek amacıyla serbest titreşim problemi olarak çözülmüştür.

Çelik malzemeden yapılmış iki ucu ankastre helisel yay daire kesitli olup çapı $d=1$ mm, yükselme açısı $\alpha=8.5744^\circ$, helisin sarıldığı dairenin yarıçapı $a=5$ mm ve aktif sarım sayısı $n=7.6$ seçilmiştir. Malzeme özellikleri: $E=2.06 \times 10^{11}$ N/m², $\rho=7900$ kg/m³ ve $\nu=0.3$. Helisin serbest titreşim frekansları, literatürde verilen teorik ve deneysel sonuçlar ile Çizelge 8.2’de karşılaştırılmıştır.



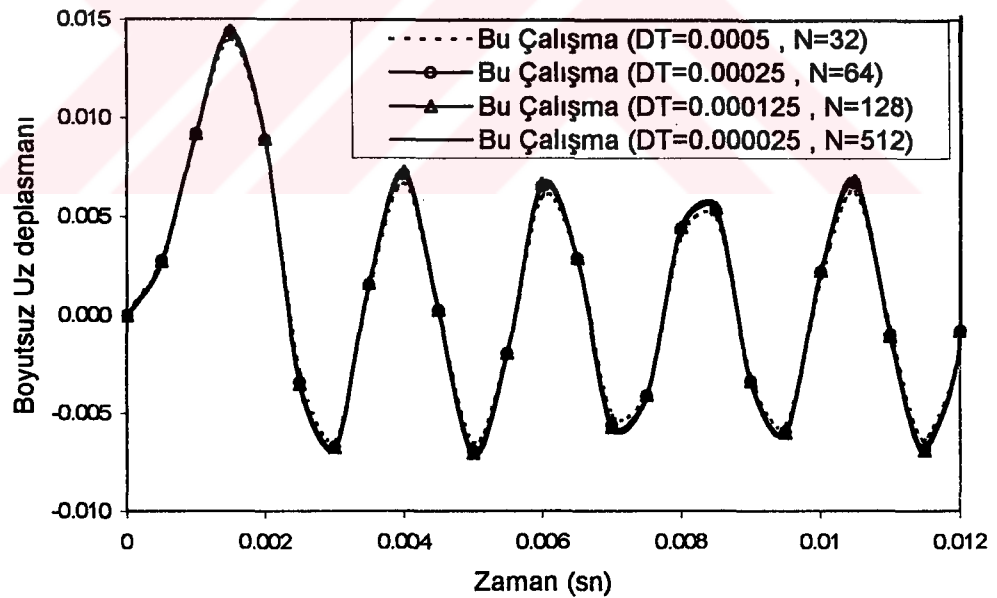
Şekil 8.10. Silindirik helisel yay ve dinamik yük tipi

Çizelge 8.2. Doğal Frekanslar (Hertz), (SEY: Sonlu elemanlar yöntemi, TMM: Taşıma matrisi metodu, TFY: Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi)

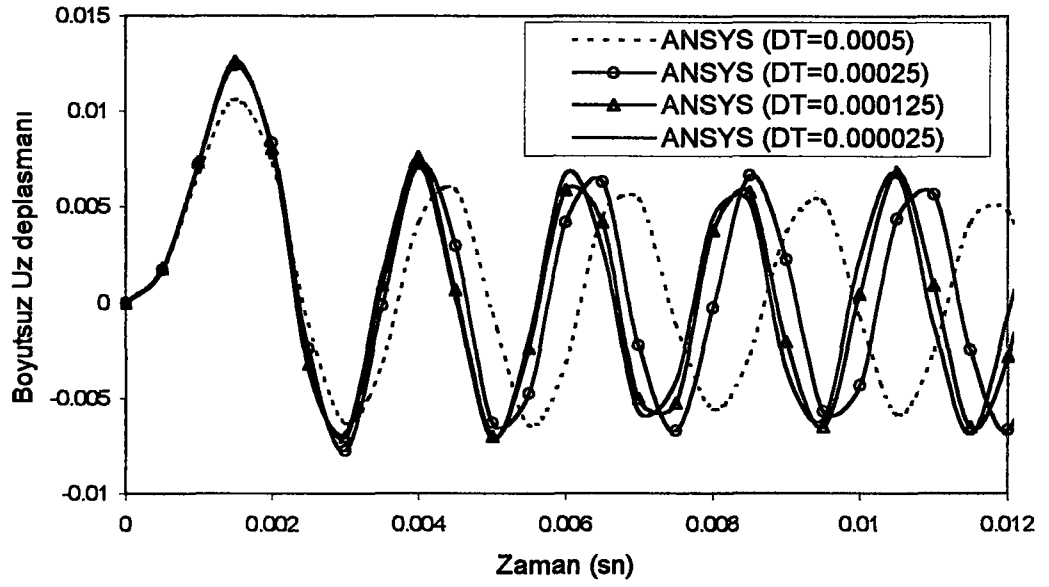
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Mottershead (1980) ^{Deneysel}	391.0	391.0	459.0	528.0	878.0	878.0	906.0	-	1282.0	1386.0
Mottershead (1980) ^{SEY}	396.0	397.0	469.0	532.0	887.0	900.0	-	-	-	-
Pearson (1982) ^{TMM}	394.9	397.6	456.4	518.3	859.7	874.7	902.2	1023.7	1293.4	1351.9
Yıldırım (1996) ^{TMM}	393.5	395.9	462.8	525.5	864.0	876.8	914.3	1037.0	1310.5	1363.8
Yıldırım (1999a)	393.4	396.0	462.7	525.6	863.7	876.6	-	-	-	-
ANSYS (80 eleman) SEY	400.2	402.9	481.5	545.2	886.3	898.1	949.3	1075.2	1360.7	1408.8
ANSYS (200 eleman) SEY	394.5	397.1	465.7	528.7	867.3	880.2	919.1	1043.2	1318.4	1371.3
ANSYS (500 eleman) SEY	393.6	396.2	463.2	526.1	864.2	877.3	914.4	1038.2	1311.4	1365.4
Bu Çalışma ^{TFY}	393.4	395.9	462.7	525.6	863.6	876.8	913.5	1037.2	1310.4	1364.3

Bu çalışmada bulunan sonuçların literatürdeki sonuçlar ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Çizelge 8.2 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir.

Bu tezde sunulan modelin serbest titreşim problemi üzerinde geçerliliğini test ettikten sonra, zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Bu problemin zorlanmış titreşim analizi ilk defa burada yapılmıştır. Yayın orta noktasına düşey doğrultuda, $P_0=0.25$ N şiddetinde üçgen impulsif bir yük uygulanmıştır. Hesaplamalarda zaman artımı $DT=25 \mu s$ seçilmiştir. Konsol helis örneğinde olduğu gibi, Laplace parametresi ve zaman artımı etkilerini göstermek için 7.6 sarımlık elastik helisin parametrik analizleri yapılmıştır. 7.6 sarımlık helisin orta noktasındaki düşey deplasmanlara ait bu tezde bulunan sonuçlar Şekil 8.11’de, ANSYS ile bulunan sonuçlar 8.12’de gösterilmiştir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi (TFY) ile Laplace uzayında yapılan çözümlerde kaba zaman artımı ve az sayıda Laplace parametresi kullanarak bulunan sonuçlar ile çok küçük zaman artımı ve fazla sayıda Laplace parametresi kullanarak bulunan sonuçların çakıştığı görülmektedir. ANSYS ile yapılan çözümlerde ise, 500 doğru eksenli eleman ve çok çok küçük zaman artımı alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmektedir.

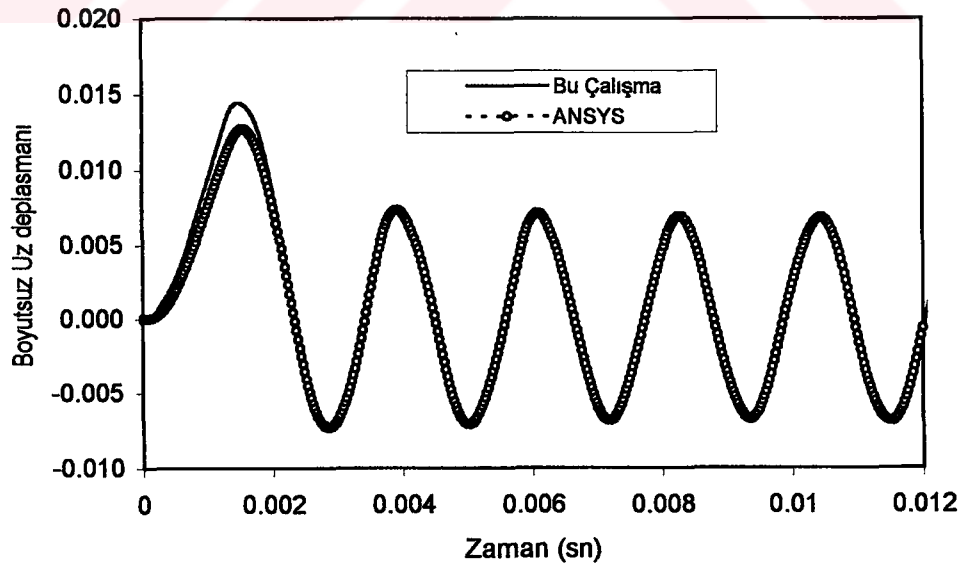


Şekil 8.11. 7.6 sarımlık helisin orta noktasındaki düşey deplasman

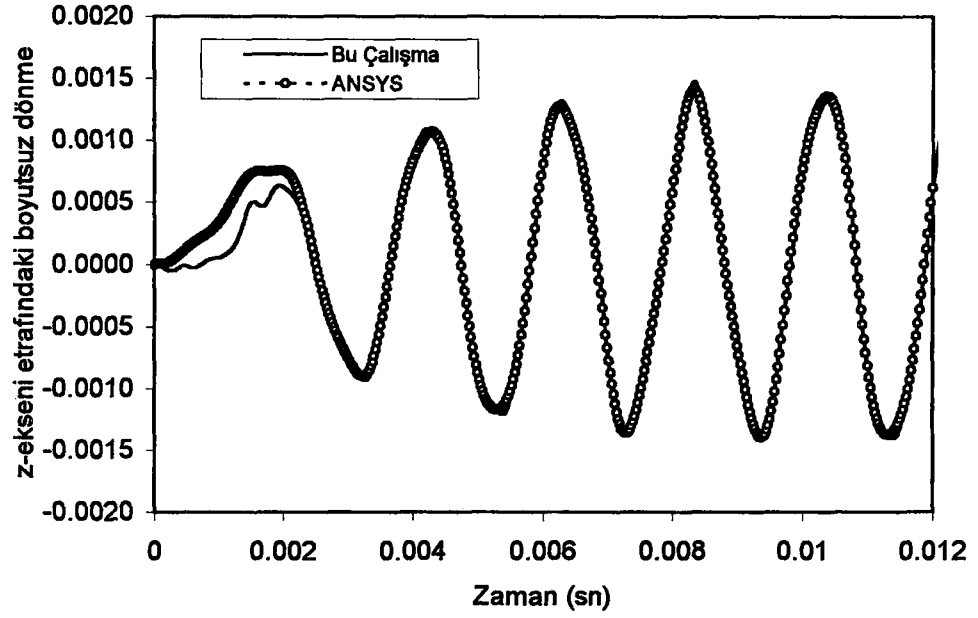


Şekil 8.12. 7.6 sarımlık helisin orta noktasındaki düşey deplasman

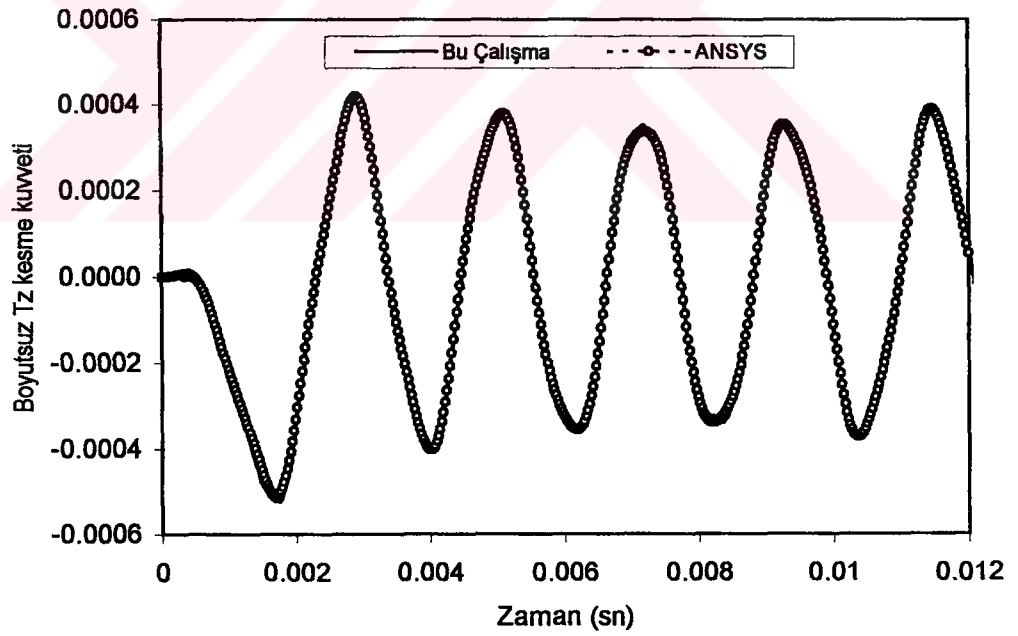
Yayın orta noktasındaki düşey deplasman ile z- eksenine göre dönmesi ve ankastre ucundaki düşey kesme kuvveti ile M_z momentinin zamanla değişimleri ANSYS programı ile karşılaştırılmıştır (Şekil 8.13-8.16).



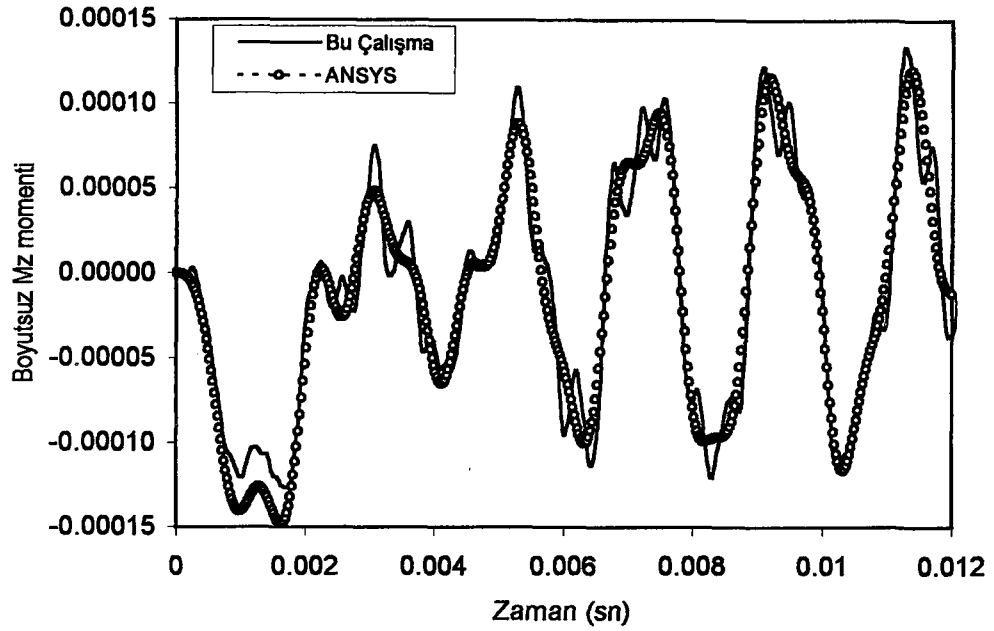
Şekil 8.13. Yayın orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 8.14. Yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi



Şekil 8.15. Ankastre uçtaki düşey kesme kuvvetinin zamanla değişimi

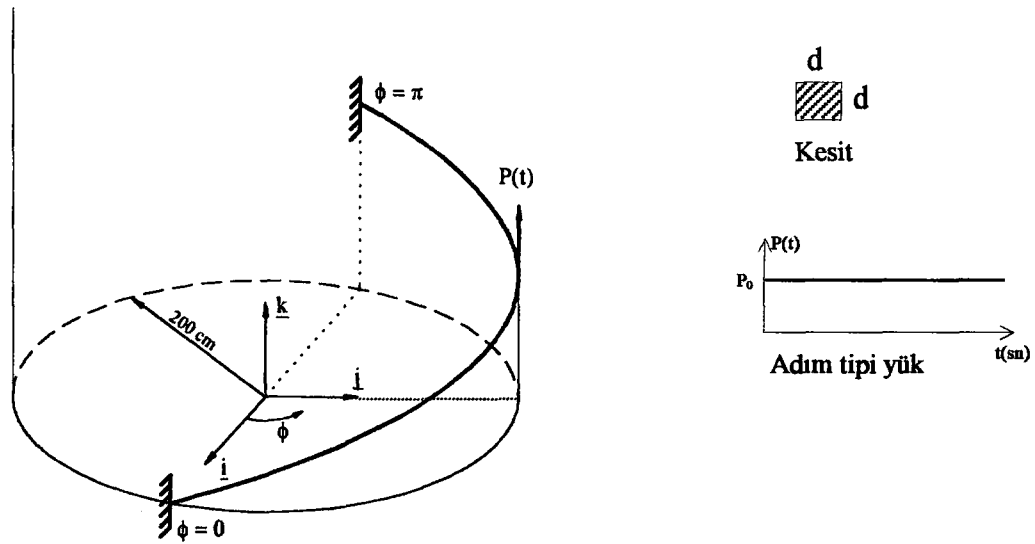


Şekil 8.16. Ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi

Grafiklerden de görüleceği gibi, TFY sonuçları ile sonlu elemanlar yöntemi sonuçları uyum içindedirler. İstenilen hassasiyette çözüm elde edebilmek için, problem sadece iki eleman ile modellenmesi yeterli iken ANSYS ile 500 doğru eksenli çubuk eleman ile modellenmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca, bu çalışmada hazırlanan bilgisayar programının işlem süresi ANSYS'in işlem süresinin yaklaşık onda biri kadardır.

8.3. İki Ucu Ankastre Yarım Sarımlık Helis

İki ucu ankastre yarım sarımlık helisel bir çubuk burada gözönüne alınmıştır (Şekil 8.17). İki ucu ankastre helisel çubuk kare kesitli olup $d=12$ cm, helisin sarıldığı dairenin çapı $a=200$ cm, yükselme açısı $\alpha=25.52^\circ$ ve malzeme özellikleri; $\rho=7850$ kg/m³, $\nu=0.3$ ve $E=2.06 \times 10^{11}$ N/m² olarak seçilmiştir. Serbest titreşim frekansları, bu çalışmada önerilen yöntem ile ANSYS sonuçları Çizelge 8.3'de karşılaştırılmıştır. ANSYS programı ile yüzlerce elemanla modellenmesi halinde yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilebilmektedir.



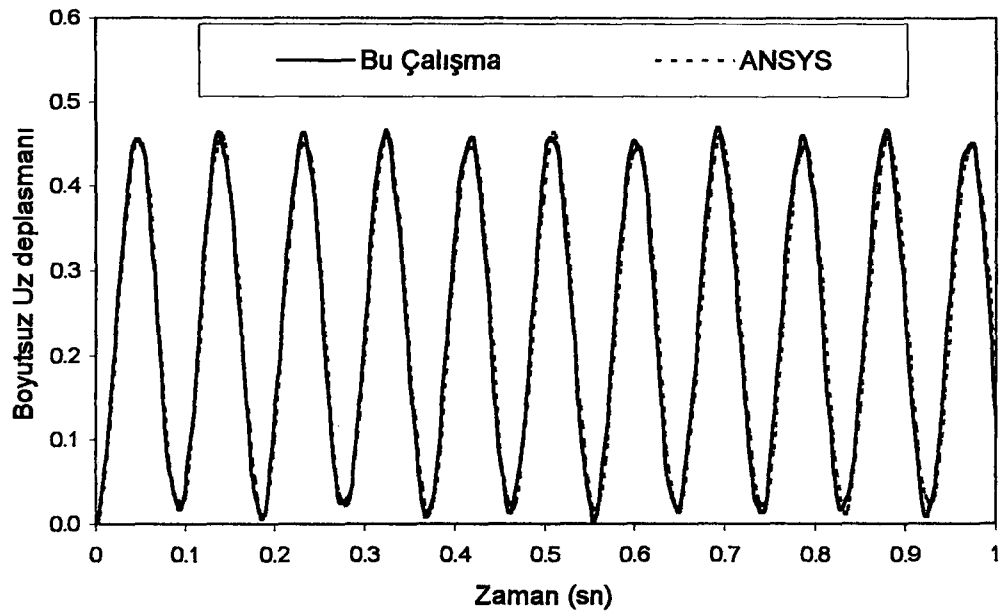
Şekil 8.17. Ara tekil yüklü iki ucu ankastre helis ve dinamik yük tipi

Çizelge 8.3. Doğal Frekanslar (Hertz)

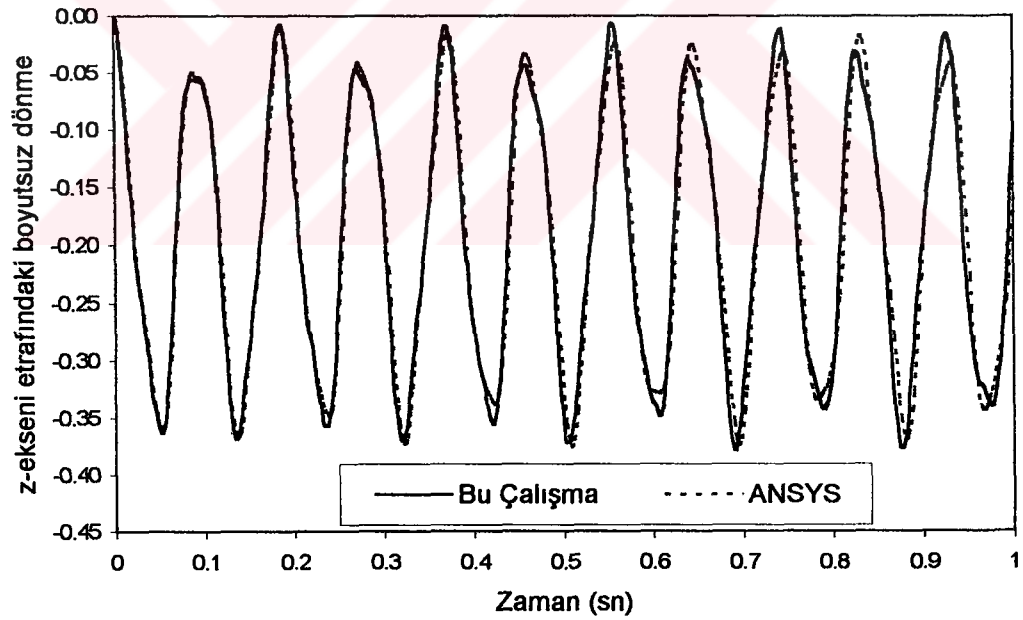
(SEY: Sonlu elemanlar yöntemi, TFY: Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ANSYS (100 eleman) SEY	10.825	26.867	29.947	57.724	62.996	104.725	106.472	157.660	162.522	225.90
ANSYS (500 eleman) SEY	10.824	26.865	29.944	57.718	62.991	104.715	106.463	157.643	162.507	225.88
Bu Çalışma ^{TFY}	10.824	26.865	29.944	57.718	62.991	104.715	106.463	157.643	162.506	225.87

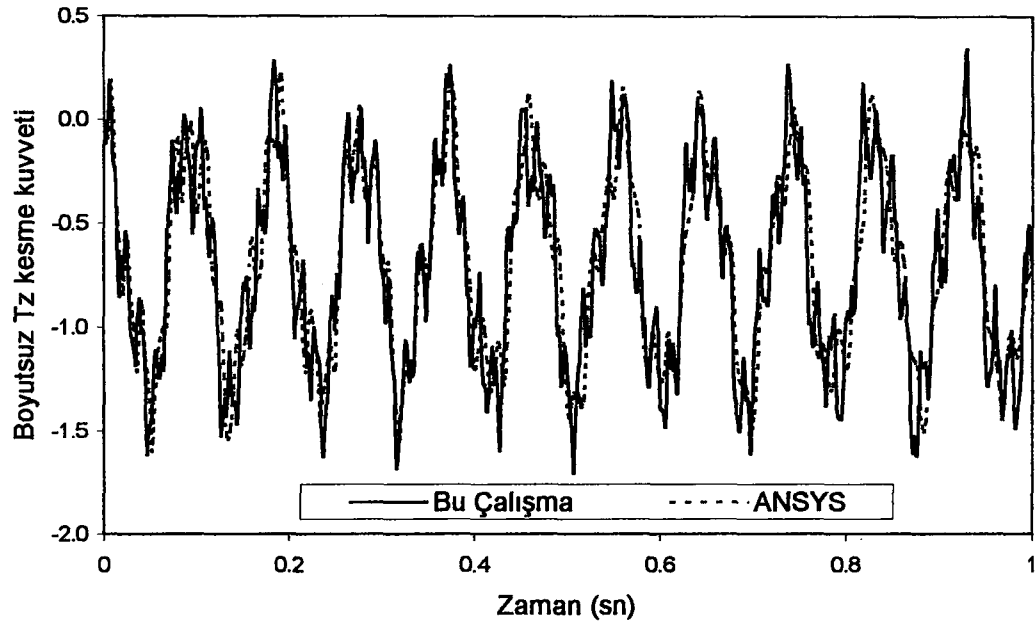
Yayın orta noktasına düşey doğrultuda $P_0=10^6$ N şiddetinde adım tipi dinamik tekil yük uygulanmıştır. Yayın orta noktasındaki düşey deplasman, z-ekseni etrafındaki dönme ile ankastre uçtaki düşey kesme kuvveti ve moment değerleri ANSYS programının sonuçları ile karşılaştırılmıştır (Şekil 8.18-8.21). Hesaplamalarda zaman artımı $DT=0.002$ sn olarak alınmıştır.



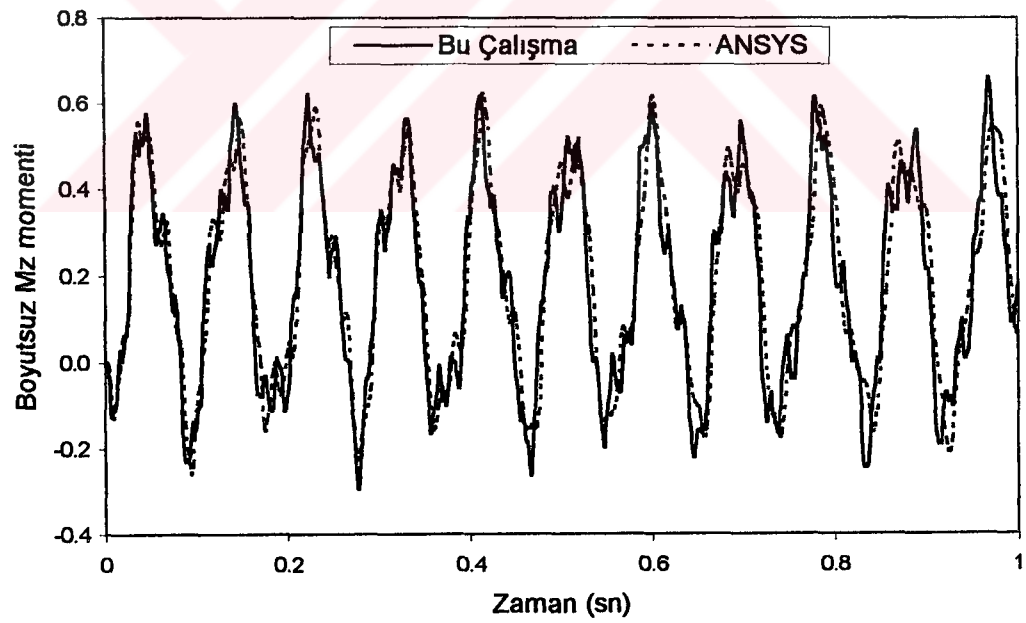
Şekil 8.18. Helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



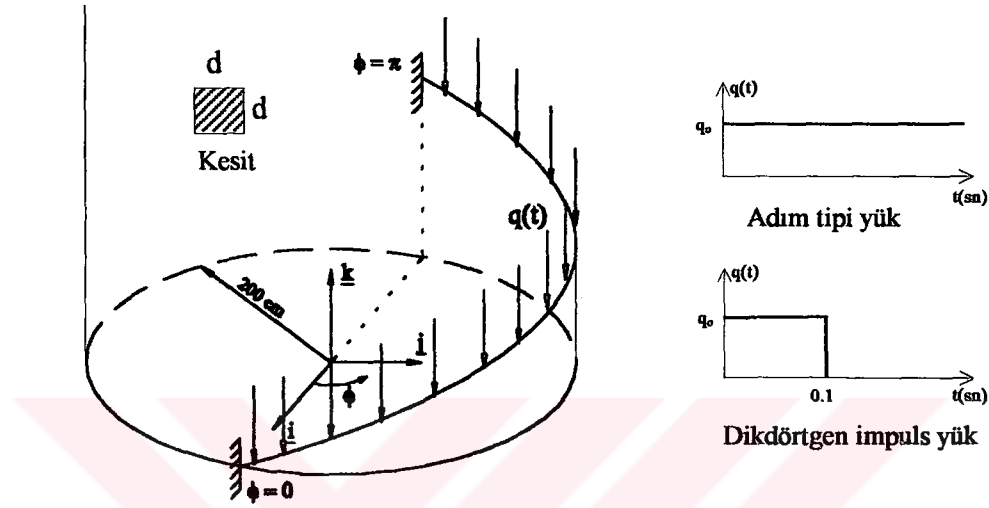
Şekil 8.19. Helisin orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi



Şekil 8.20. Ankastre uçtaki düşey kesme kuvvetinin zamanla değişimi

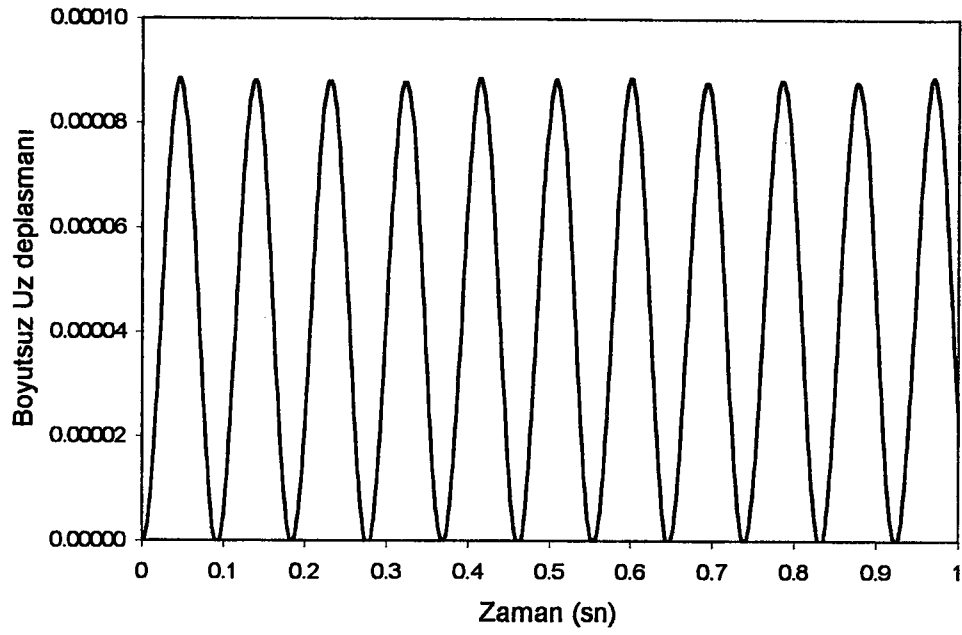
Şekil 8.21. Ankastre uçtaki M_z momentinin zamanla değişimi

İki ucu ankastre yarım sarımlık helisin bir kez de üniform dinamik yük altında zorlanmış titreşim analizi yapılacaktır. Helisel çubuğa düşey doğrultuda $q_0=100$ N/m şiddetinde üniform yük uygulanmıştır (Şekil 8.22).

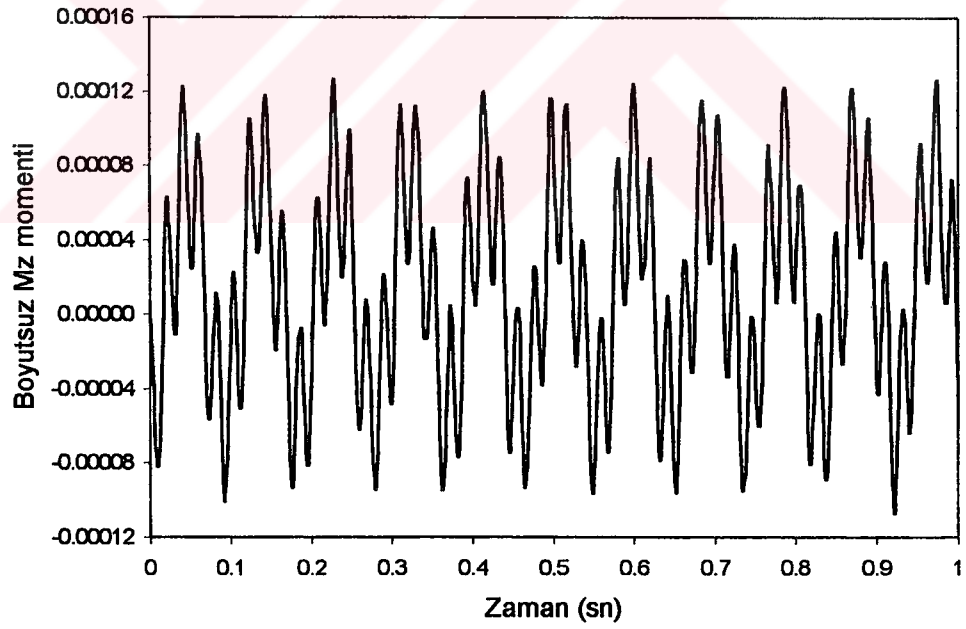


Şekil 8.22. Üniform yüklü helisel çubuk ve dinamik yük tipleri

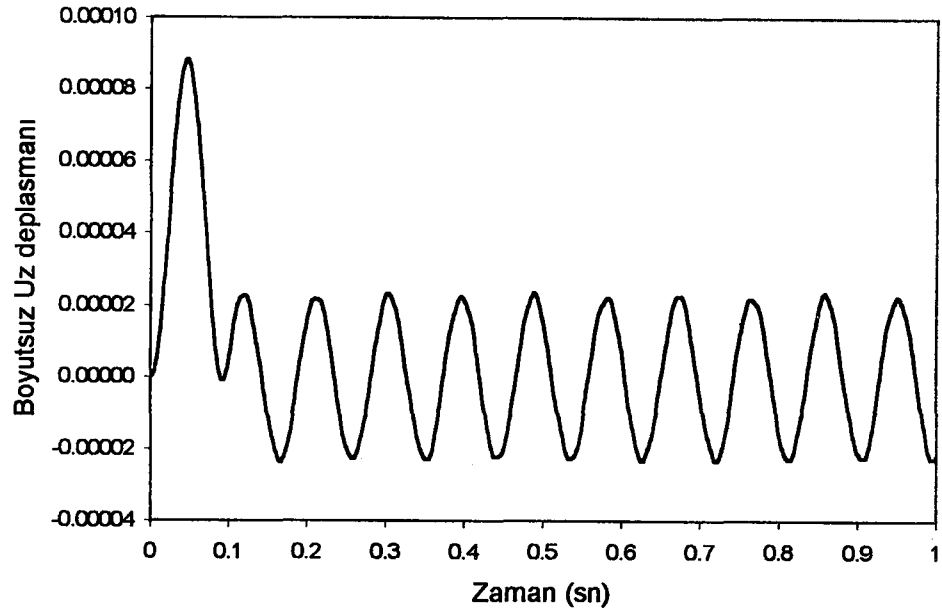
Adım tipi ve dikdörtgen impulsif yük altında iki ucu ankastre helisel çubuğun orta noktasındaki boyutsuz düşey deplasman ve ankastre ucundaki boyutsuz momentin zamanla değişimleri grafik formda gösterilmektedir (Şekil 8.23-8.26). Hesaplamalarda zaman artımı olarak 0.002 sn seçilmiştir.



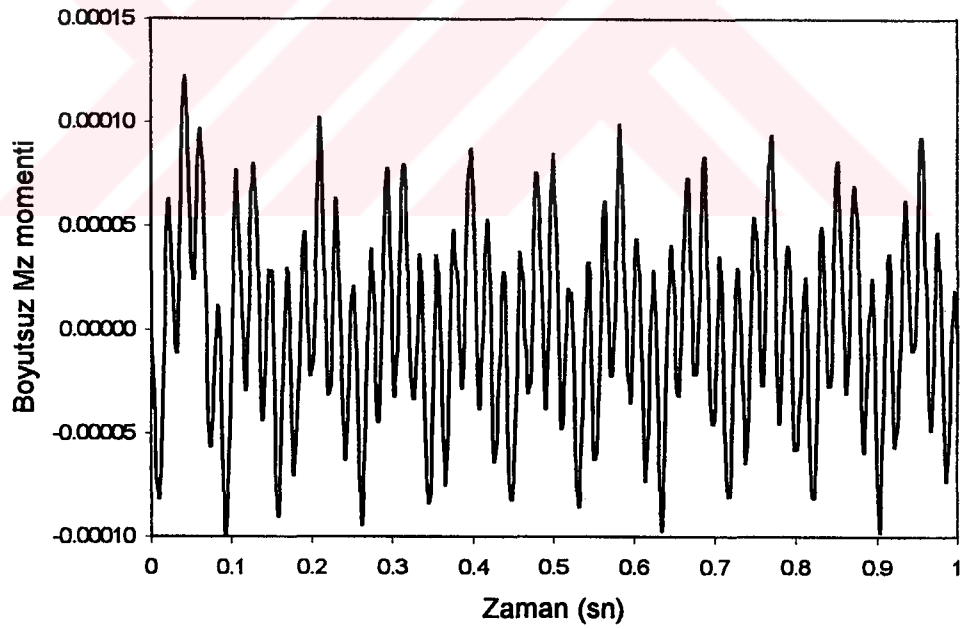
Şekil 8.23. Adım tipi yük etkisinde helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 8.24. Adım tipi yük etkisinde helisin ankastre ucundaki momentin zamanla değişimi



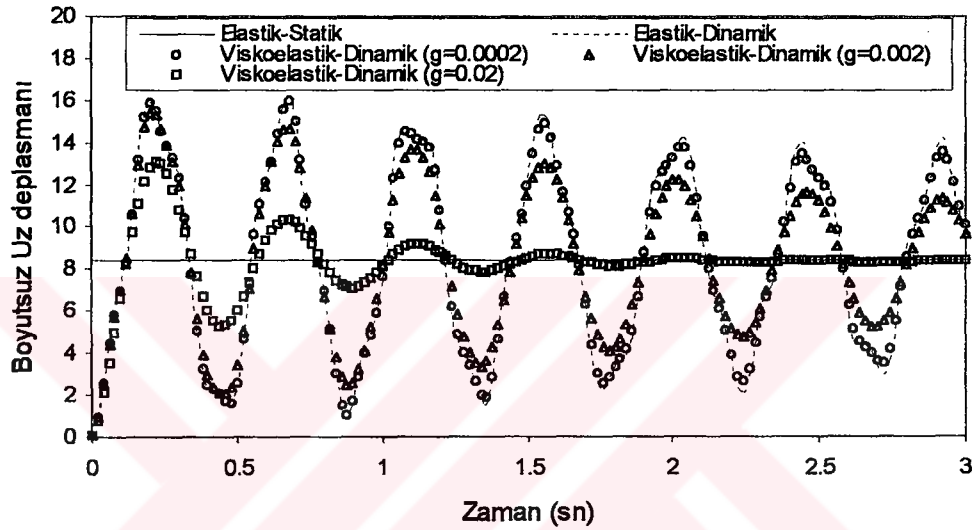
Şekil 8.25. Dikdörtgen impulsif yük etkisinde helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



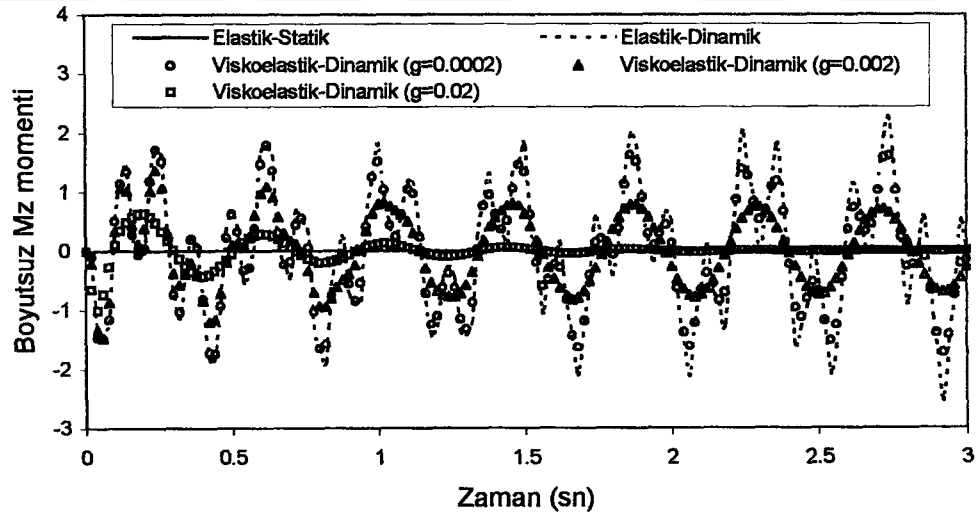
Şekil 8.26. Dikdörtgen impulsif yük etkisinde helisin ankastre ucundaki momentin zamanla değişimi

8.4. Viskoelastik Malzemeli Konsol Helis

Kısım 8.1’de elastik malzeme için ele alınan konsol helis, burada viskoelastik malzemenin helis davranışına etkisini incelemek için tekrar çözülmüştür. Adım tipi yük altında çeşitli sönüm oranları için serbest uçtaki deplasman ve ankastre uçtaki momentin zamanla değişimleri hesaplanmış ve Şekil 8.27-8.28’de grafik formda gösterilmiştir.



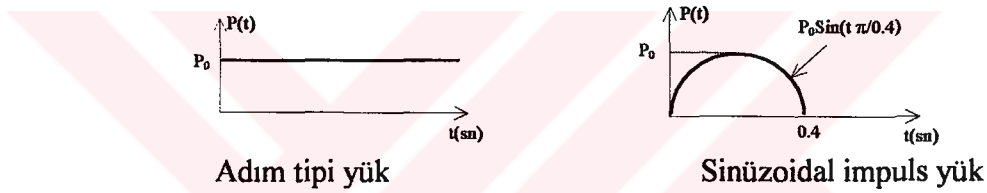
Şekil 8.27. Adım tipi yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi



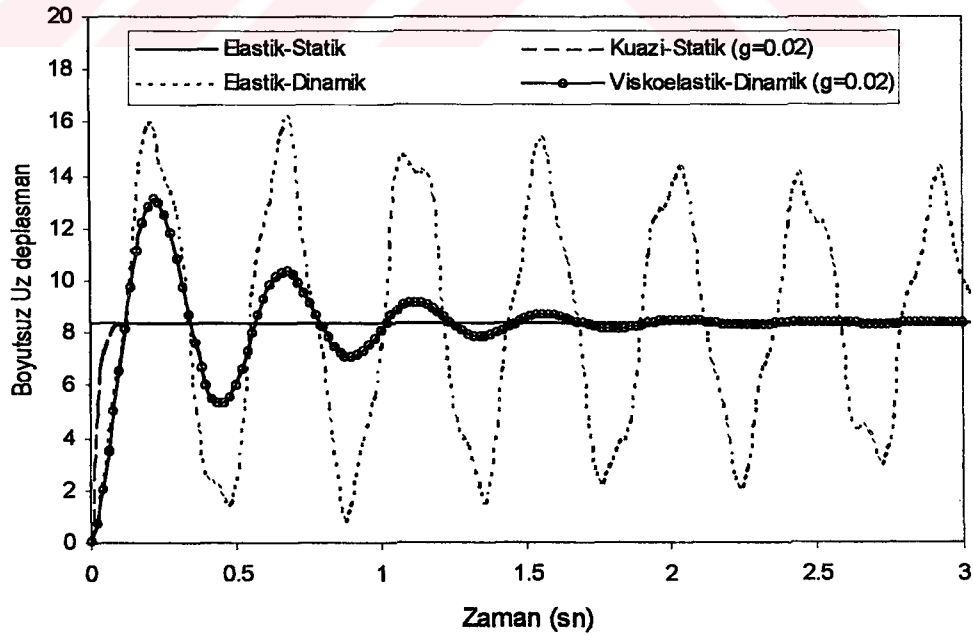
Şekil 8.28. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi

Bu grafikler, elastik-statik, elastik-dinamik ve çeşitli sönüm oranları için viskoelastik-dinamik durumları içermektedir. Viskoelastik malzeme durumunda dinamik davranış belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerine yaklaşmaktadır. Statik davranışa erişme zamanı sönüm oranı ile orantılıdır. Sönüm oranı arttıkça hem dinamik davranışın genliği azalmakta hem de davranış daha hızlı statik değerine ulaşmaktadır. Viskoelastik malzeme halinde sönüm etkisi dinamik davranışın pik değerini azaltmaktadır.

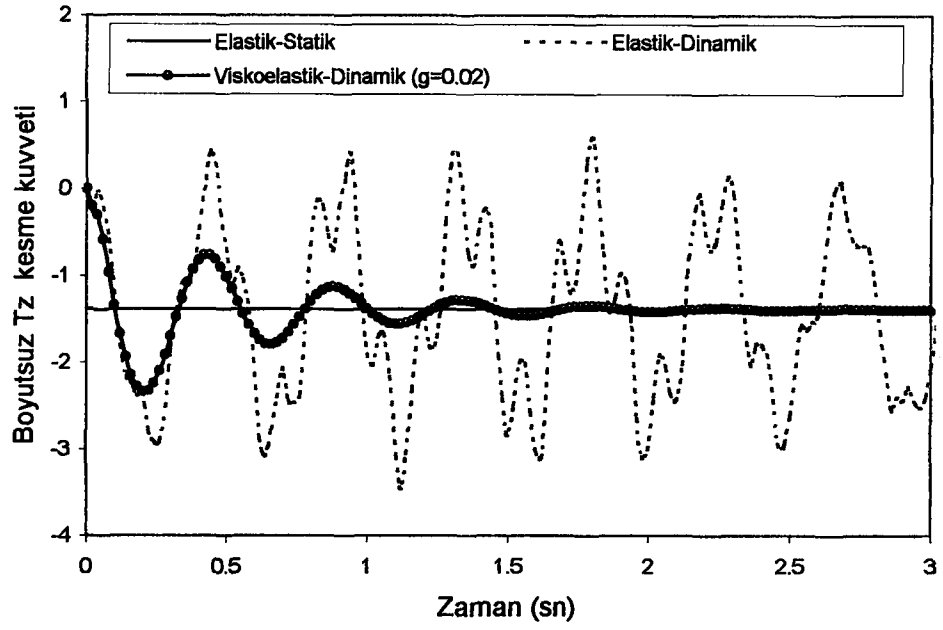
Adım tipi ve sinüs impuls tipi yüklemeler için (Şekil 8.29), serbest uçtaki deplasman, ankastre uçtaki kesme kuvveti, M_y ve M_z eğilme momentleri hesaplanmıştır (Şekil 8.30-8.37). Bu grafiklerde $g=0.02$ sönüm oranı için viskoelastik-dinamik ve kuazi-statik davranışlar ile elastik-statik ve elastik-dinamik davranışlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.



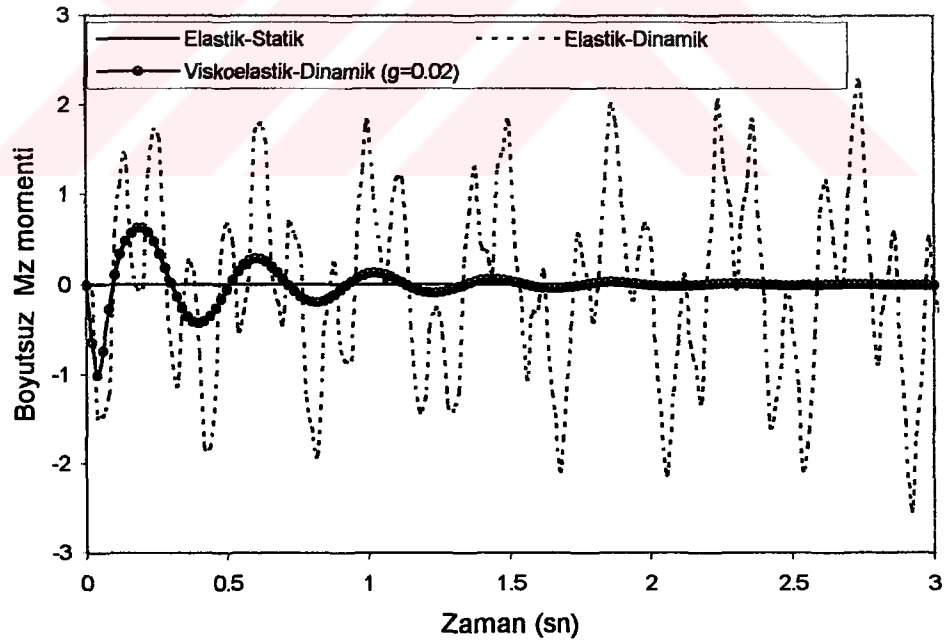
Şekil 8.29. Viskoelastik malzemeli konsol helis için uygulanan dinamik yük tipleri



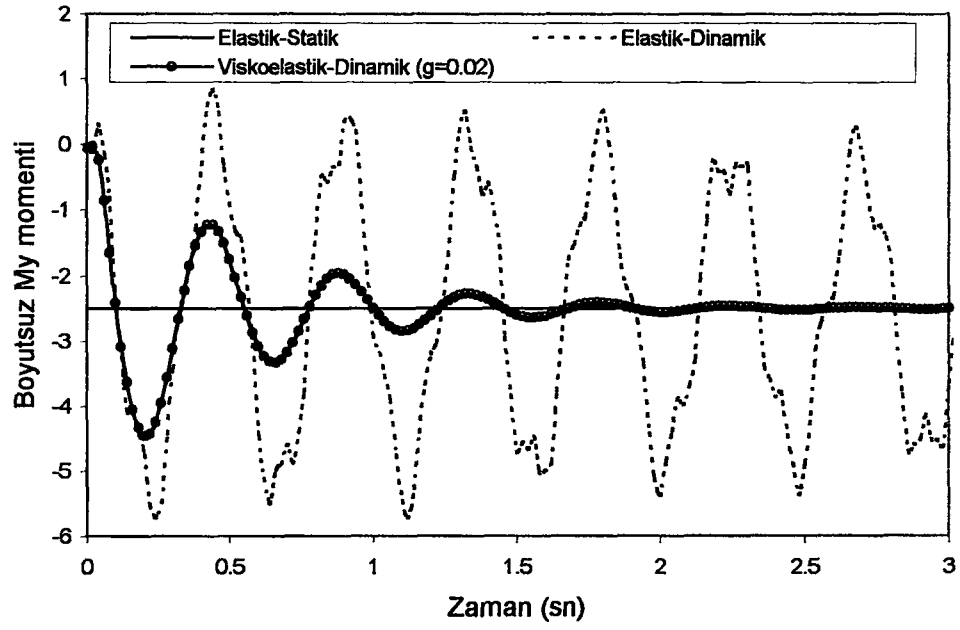
Şekil 8.30. Adım tipi yük altında serbest uçtaki deplasmanın zamanla değişimi



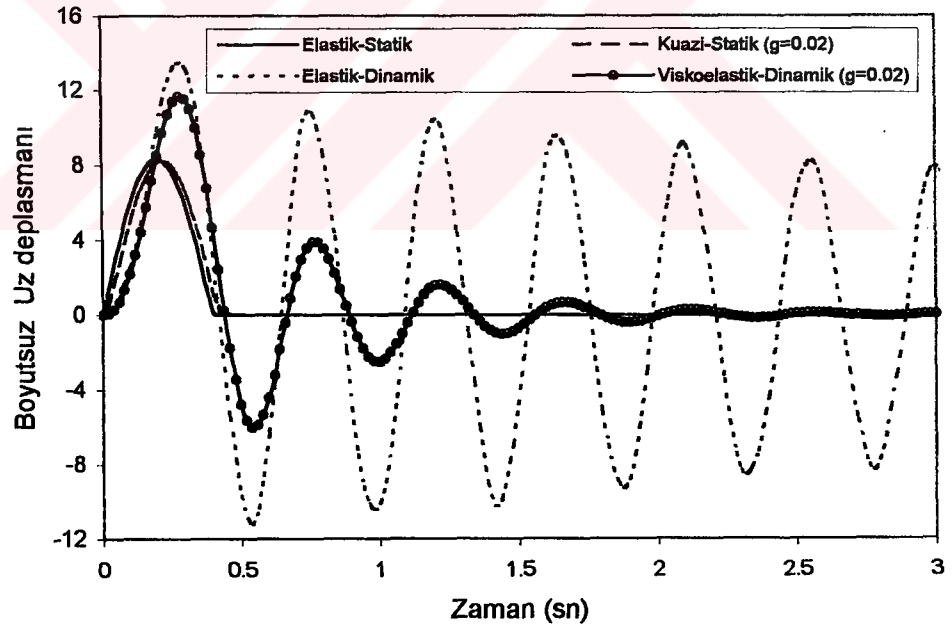
Şekil 8.31. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi



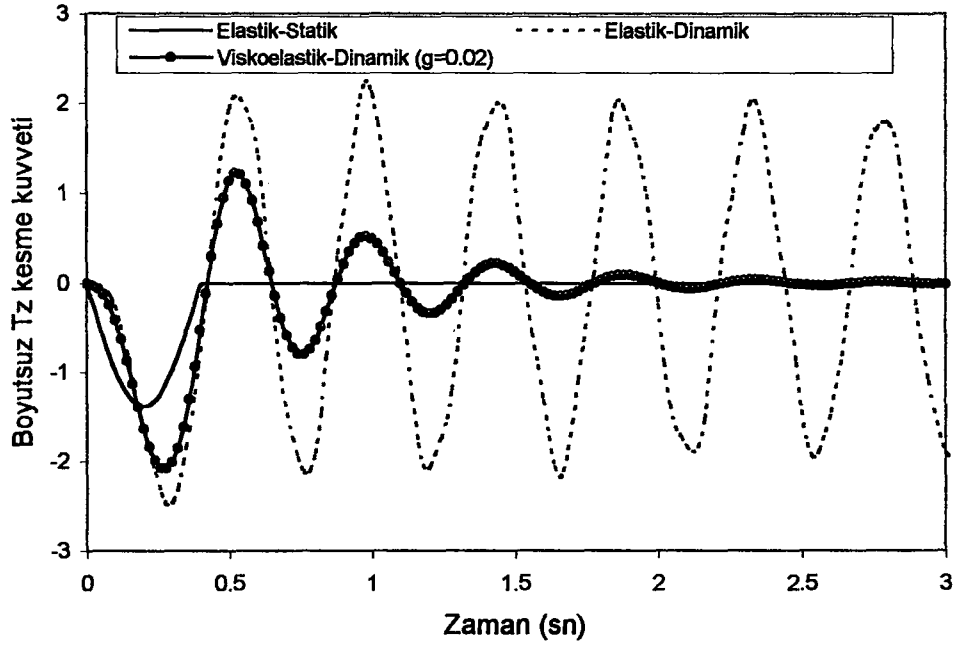
Şekil 8.32. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki M_z momentinin zamanla değişimi



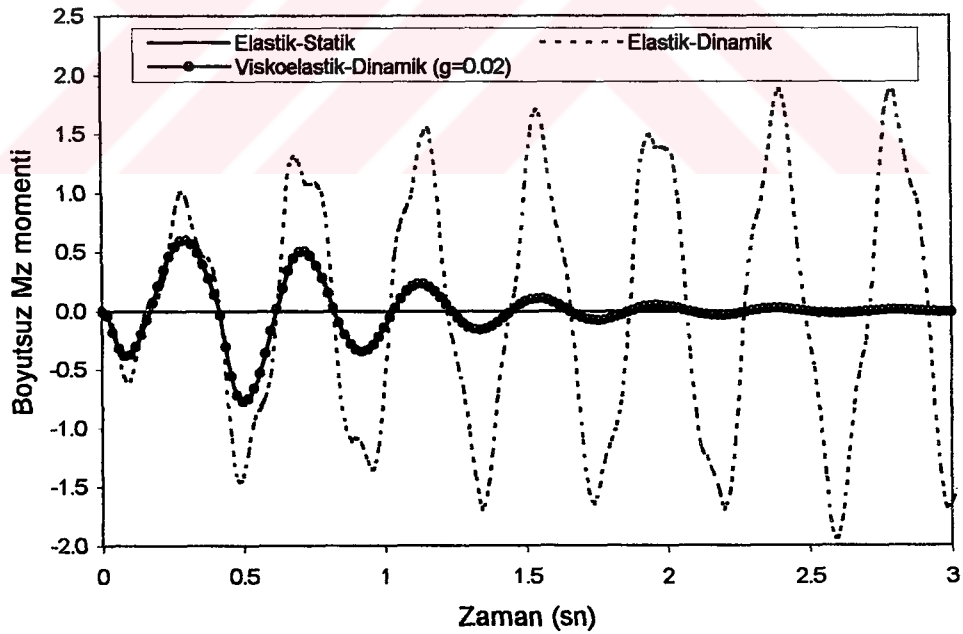
Şekil 8.33. Adım tipi yük altında ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi



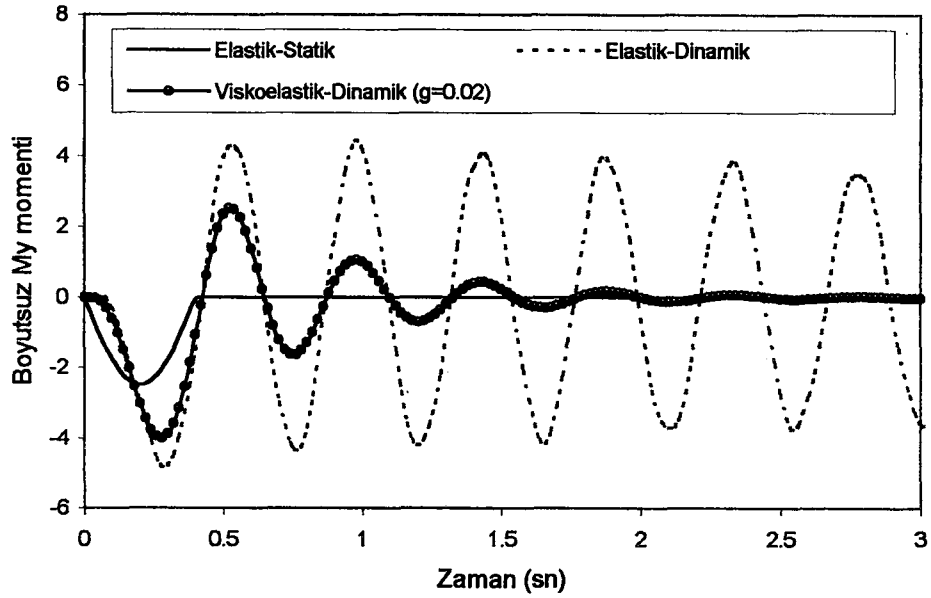
Şekil 8.34. Sinüzoidal impulsif yük altında serbest uçtaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 8.35. Sinüzoidal impulsif yük altında ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi



Şekil 8.36. Sinüzoidal impulsif yük altında ankastre uçtaki M_z momentinin zamanla değişimi

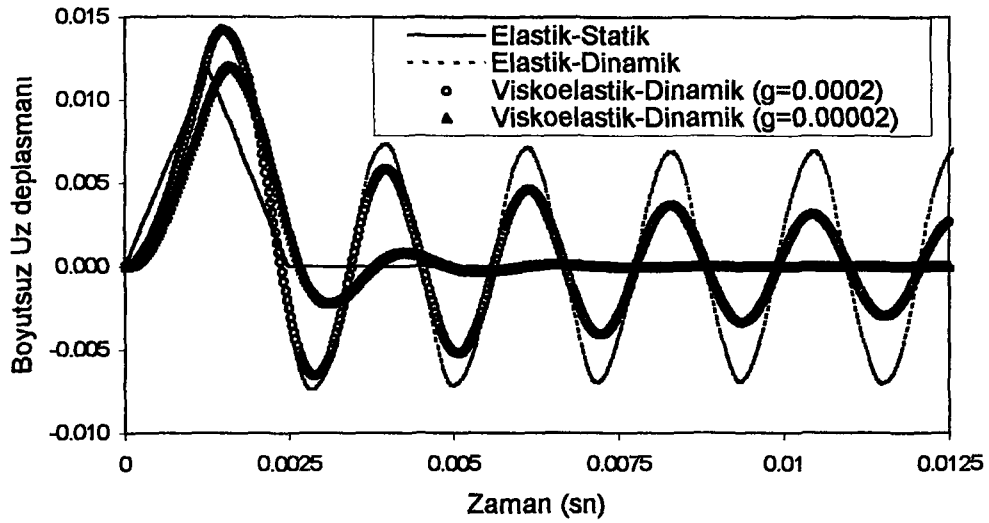


Şekil 8.37. Sinüzoidal impulsif yük altında ankastre uçtaki My momentinin zamanla değişimi

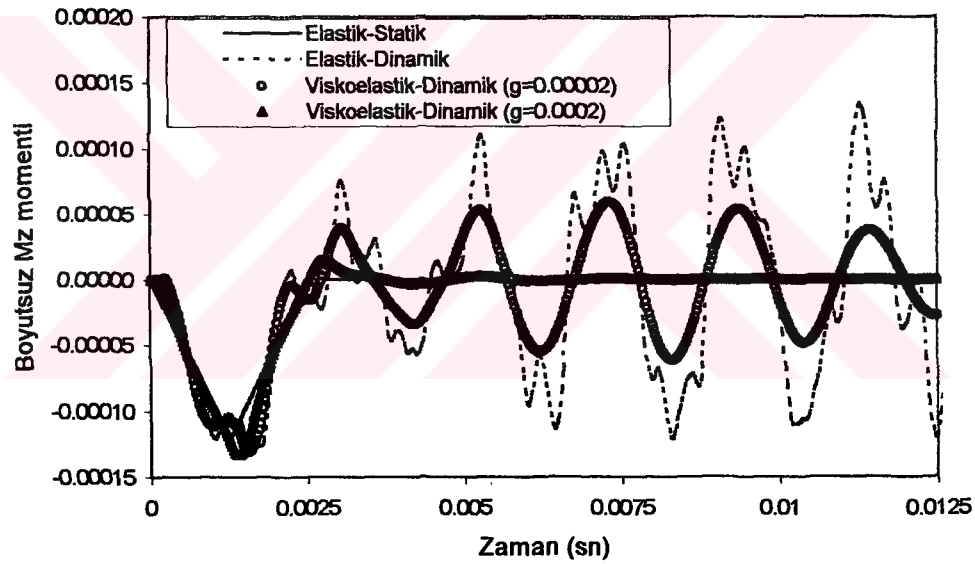
Sinüzoidal impulsif yük etkisinde grafiklerde görülen statik değerler, herbir t anı için o andaki yükün sistem üzerine statik olarak etki ettirilmesi durumunda elde edilen büyüklüklerdir. Kuazi-statik davranış, sadece deplasman grafiklerinde görülmekte olup kesme kuvveti ve moment grafiklerinde ise statik davranışla üst üste düşmektedir. Viskoelastik malzeme halinde dinamik davranış belli bir süre sonra sönümlenmekte ve davranış statik değerine yaklaşmaktadır. Statik yükleme altında ankastre uçtaki M_z momenti sıfırdır. Bununla birlikte dinamik yük altında M_z momenti, atalet kuvvetleri etkisiyle sıfırdan farklı değerler almaktadır (Şekil 8.32, Şekil 8.36).

8.5. Viskoelastik Malzemeli 7.6 Sarımlık İki Ucu Ankastre Helis

Kısım 8.2’de elastik malzeme için çözülen 7.6 sarımlık iki ucu ankastre helis, burada viskoelastik malzemenin dinamik davranışa etkisini incelemek için tekrar çözülmüştür. Helisel yayın orta noktasına etkiyen üçgen impulsif yük altında çeşitli sönüm oranları için serbest uçtaki deplasman ve ankastre uçtaki momentin zamanla değişimleri hesaplanmış ve Şekil 8.38-8.39’da grafik formda gösterilmiştir.



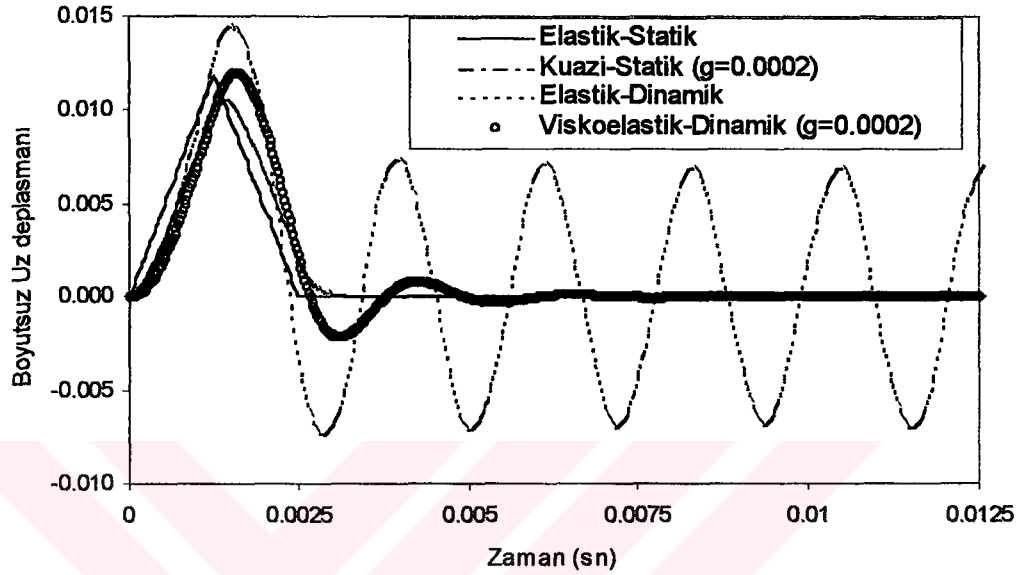
Şekil 8.38. Yayın orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



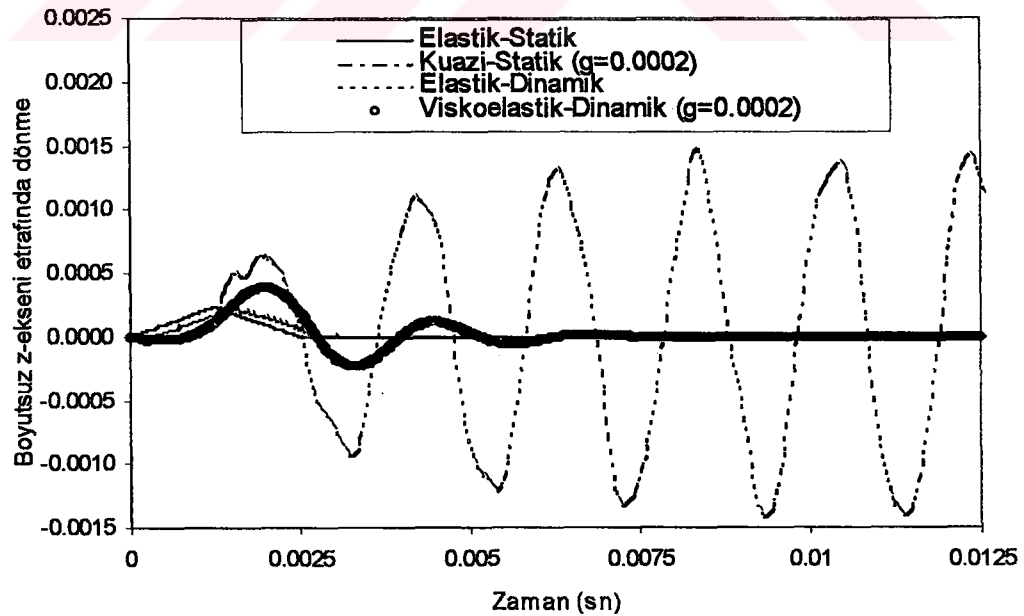
Şekil 8.39. Ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi

Üçgen impulsif yük etkisinde grafiklerde görülen statik değerler, her bir t anı için o andaki yükün sistem üzerine statik olarak etki ettirilmesi durumunda elde edilen büyüklüklerdir. Viskoelastik malzeme durumunda dinamik davranış belli bir süre sonra sönümlenmektedir. Sönüm oranı arttıkça dinamik davranışın pik değerlerinde hızlı bir şekilde azalma olmaktadır.

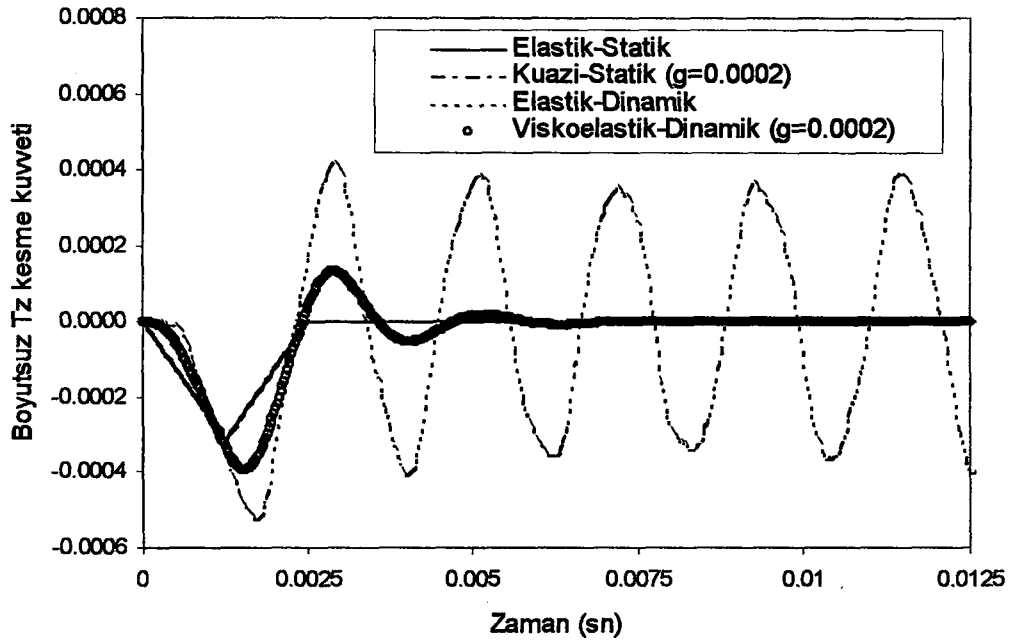
Üçgen impulsif yük altında serbest uçtaki deplasman ve dönme ile ankastre uçtaki kesme kuvveti ve moment grafik formda gösterilmiştir (Şekil 8.40-8.43). Bu grafiklerde $g=0.0002$ sönüm oranı için viskoelastik ve kuazi-statik davranışlar ile statik ve elastik-dinamik davranışlar arasındaki ilişki incelenmiştir.



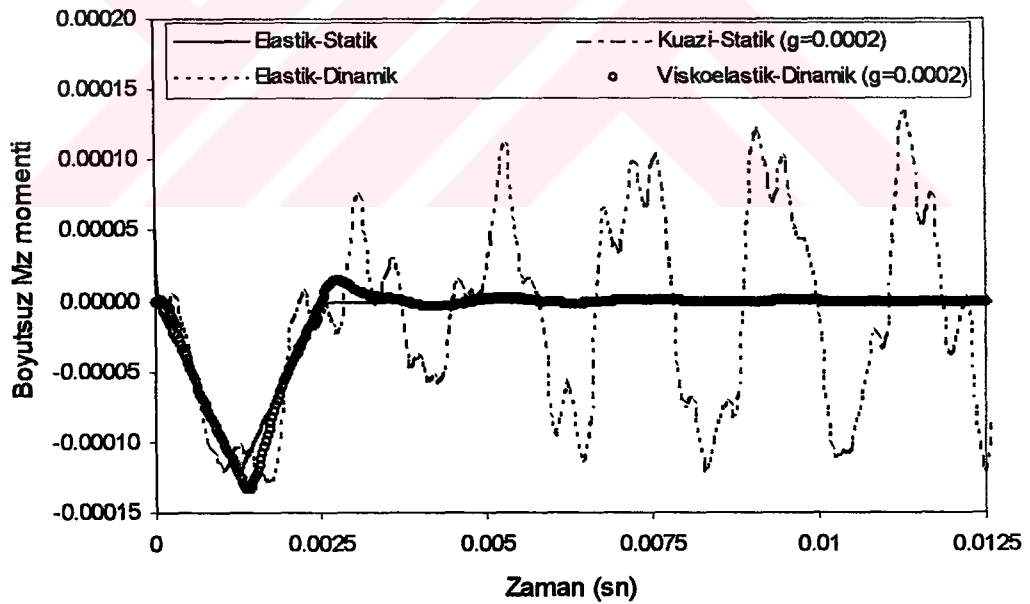
Şekil 8.40. Helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 8.41. Helisin orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi



Şekil 8.42. Ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi

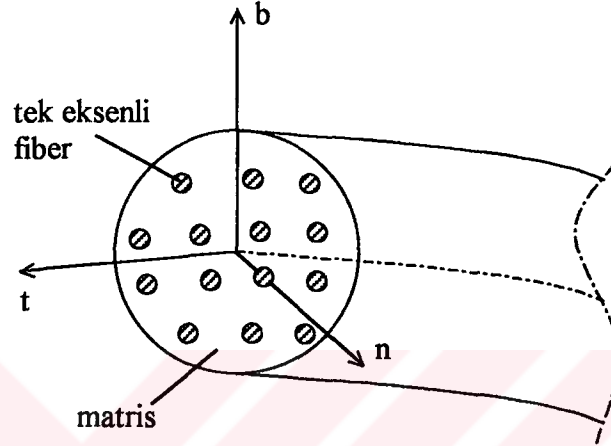


Şekil 8.43. Ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi

Kuazi-statik davranış, deplasman ve dönme grafiklerinde görülmekte olup kesme kuvveti ve moment grafiklerinde ise statik davranışla üst üste düşmektedir.

8.6. Kompozit Helisel Çubuk

Kısım 8.2’de izotrop malzemeden yapılmış iki ucu ankastre helisel çubuk problemi tek eksenli kompozit helisel çubuk olarak tekrar ele alınacaktır (Şekil 8.44). Bu örnek Yıldırım (2001) tarafından ele alınmış, aktif sarım sayısı, helisin yükselme açısı ve silindirin sarıldığı daire çapının tel çapına oranının (D/d) serbest titreşim frekanslarına etkisi incelenmiştir.



Şekil 8.44. Tek eksenli kompozit helisel çubuk kesiti

Çizelge 8.4’de verilen Carbon-epoxy² malzemesinden yapılmış iki ucu ankastre helisel yayın (D/d) oranının ve aktif sarım sayısının dinamik davranışa etkisi araştırılmıştır. Helisel yay daire kesitli olup çapı $d=1$ mm’dir. Helisin yükselme açısı $\alpha=5^\circ$ olup, $D/d=5$ ve $D/d=10$ oranları için serbest titreşim frekansları sırasıyla Çizelge 8.5 ve Çizelge 8.6’da gösterilmiştir.

Çizelge 8.4. Enine izotrop malzeme özellikleri

	Kevlar 49-epoxy	Carbon-epoxy ¹ (AS4/3501-6)	Carbon-epoxy ² (T300/N5208)
E_1 (N/m ²)	76×10^9	144.8×10^9	181×10^9
$E_2=E_3$ (N/m ²)	5.56×10^9	9.65×10^9	10.3×10^9
$G_{12}=G_{13}$ (N/m ²)	2.3×10^9	4.14×10^9	7.17×10^9
G_{23} (N/m ²)	1.618×10^9	3.45×10^9	3.433×10^9
$\nu_{12}=\nu_{13}$	0.34	0.3	0.28
ν_{23}	0.718	0.399	0.5
ρ (kg/m ³)	1460	1389.23	1600

Çizelge 8.5. Carbon-epoxy² malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz)
(D/d=5)

Frekans No	Aktif Sarım Sayısı (n)	Yıldırım (2001) (TMM)	ANSYS (100 eleman)	ANSYS (500 eleman)	Bu Çalışma (TFY)
1	1	13344.82	13296.52	13287.50	13287.17
2		31418.87	31226.90	31217.20	31216.87
3		36954.71	36952.20	36927.17	36926.24
4		68439.02	68213.95	68195.48	68194.80
5		78187.39	77590.02	77547.84	77546.27
6		127977.00	127609.08	127558.75	127556.80
7			130211.55	130157.76	130155.76
8			189541.16	189465.41	189462.48
9			194672.00	194554.37	194549.66
10			253465.31	253323.57	253317.93
1	4	2321.33	2341.81	2322.23	2321.43
2		4470.94	4510.24	4472.84	4471.31
3		5158.32	5191.32	5160.69	5159.43
4		5594.30	5611.99	5580.29	5578.99
5		6277.12	6328.51	6280.12	6278.14
6		6916.74	6967.71	6917.38	6915.31
7			8037.11	7986.15	7984.06
8			9325.49	9263.59	9261.05
9			9611.80	9535.66	9532.54
10			11654.96	11549.27	11544.92
1	8	1167.39	1209.14	1169.02	1167.39
2		2097.16	2123.25	2097.24	2096.17
3		2104.31	2125.24	2100.40	2099.37
4		2320.17	2403.44	2323.47	2320.23
5		3431.79	3553.59	3436.72	3431.98
6		4044.55	4137.35	4050.02	4046.38
7			4220.66	4122.16	4118.09
8			4405.79	4315.92	4312.24
9			4681.93	4540.42	4534.72
10			5454.37	5284.70	5277.79
1	12	777.67	841.18	780.08	777.66
2		1043.70	1063.40	1042.80	1041.95
3		1049.48	1072.87	1049.78	1048.85
4		1554.69	1684.17	1559.61	1554.72
5		2316.11	2454.62	2323.14	2316.02
6		2375.42	2472.47	2378.85	2375.71
7			2521.96	2410.58	2407.29
8			2954.61	2793.85	2787.35
9			3319.50	3076.73	3067.19
10			3855.95	3653.93	3645.05

Çizelge 8.6. Carbon-epoxy² malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz)
(D/d=10)

Frekans No	Aktif Sarım Sayısı (n)	Yıldırım (2001) (TMM)	ANSYS (100 eleman)	ANSYS (500 eleman)	Bu Çalışma (TFY)
1	1	3456.36	3446.39	3443.96	3443.87
2		8986.25	8918.99	8915.63	8915.52
3		9883.83	9864.95	9857.71	9857.44
4		22561.67	22460.11	22446.00	22445.49
5		23154.79	23012.54	23004.38	23004.10
6		41444.57	41153.79	41134.93	41134.27
7			45695.73	45677.65	45677.00
8			64763.44	64741.85	64741.11
9			72810.32	72773.35	72711.96
10			92109.42	92080.13	92079.08
1	4	584.97	590.17	585.17	584.97
2		1126.87	1136.71	1127.18	1126.79
3		1305.87	1313.46	1305.51	1305.19
4		1425.17	1430.93	1422.56	1422.22
5		1581.20	1593.72	1581.43	1580.93
6		1750.18	1762.32	1749.48	1748.97
7			2029.19	2016.26	2015.73
8			2455.81	2438.71	2438.01
9			2606.68	2583.81	2582.87
10			3173.96	3141.88	3140.56
1	8	294.18	304.84	294.59	294.18
2		531.22	537.64	530.90	530.62
3		532.54	538.31	531.89	531.62
4		584.72	605.97	585.54	584.71
5		864.85	895.85	866.02	864.81
6		1024.57	1047.87	1024.98	1024.03
7			1063.29	1037.75	1036.70
8			1117.39	1094.52	1093.58
9			1181.79	1145.96	1144.52
10			1376.01	1332.56	1330.79

Yıldırım (2001) tarafından yapılan çalışmada ilk altı frekans değeri hesaplanmıştır. Çizelge 8.5-8.6 incelenirse serbest titreşim frekanslarının literatür ile uyum içinde olduğu görülür. ANSYS programı ile çözüm yapılırken aktif sarım sayısı ile orantılı olarak problemi daha fazla sayıda elemana bölerek modellemek gerekmektedir. D/d oranı ve aktif sarım sayısı arttıkça frekans değeri küçülmektedir.

Çizelge 8.4'de verilen Carbon-epoxy¹ ve Kevlar malzemeleri için serbest titreşim frekansları Çizelge 8.7-8.8'de gösterilmektedir.

Çizelge 8.7. Carbon-epoxy¹ malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz)

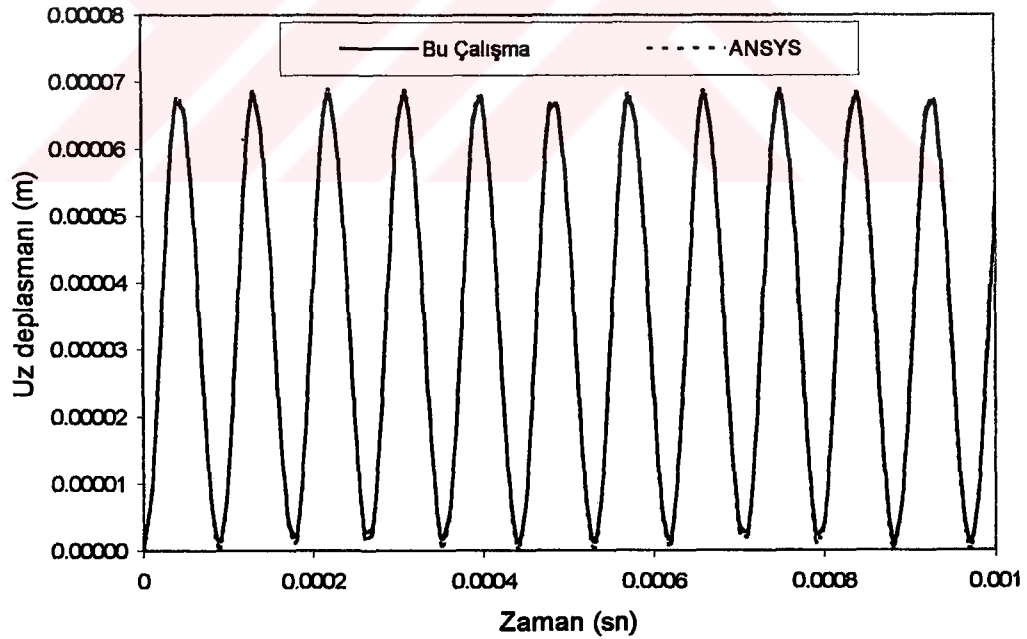
Frekans No	Aktif Sarım Sayısı (n)	D/d=5		D/d=10	
		ANSYS (500 eleman)	Bu Çalışma	ANSYS (500 eleman)	Bu Çalışma
1	1	11337.20	11336.91	2976.60	2976.52
2		28514.74	28514.46	8367.61	8367.51
3		31517.08	31516.25	8475.18	8474.94
4		59082.49	59081.92	19372.29	19371.80
5		65984.43	65982.98	21014.39	21014.14
6		109640.47	109594.67	35506.77	35506.10
7		109891.79	109889.93	41181.53	41180.93
8		158636.24	158633.65	55684.61	55683.85
9		166074.37	166070.13	64919.49	64918.15
10		210872.68	210867.84	78792.76	78791.72
1	4	1894.60	1893.94	477.42	477.25
2		3654.52	3653.27	920.98	920.66
3		4260.95	4259.90	1077.58	1077.30
4		4681.96	4680.86	1193.21	1192.91
5		5144.70	5143.08	1295.55	1295.14
6		5710.43	5708.74	1446.79	1446.35
7		7553.10	7551.11	1922.37	1921.86
8		8329.29	8327.13	2194.70	2194.10
9		8559.45	8556.69	2373.65	2372.78
10		10267.87	10263.96	2858.65	2857.41
1	8	953.50	952.16	240.28	239.94
2		1747.17	1746.28	442.39	442.16
3		1753.62	1752.77	444.22	444.00
4		1895.82	1893.16	477.79	477.11
5		2805.95	2802.06	707.09	706.10
6		3347.73	3344.59	846.76	845.94
7		3566.87	3563.99	906.19	905.44
8		3726.34	3721.79	940.87	939.72
9		3998.17	3994.04	1005.02	1003.97
10		4328.27	4322.57	1091.47	1090.02
1	12	636.34	634.35	160.35	159.84
2		866.20	865.51	218.28	218.10
3		871.33	870.58	219.61	219.41
4		1272.16	1268.14	320.59	319.57
5		1896.09	1890.17	477.81	476.29
6		1976.54	1973.94	500.00	499.33
7		2009.52	2006.90	508.78	508.10
8		2511.98	2504.17	633.08	631.09
9		2678.46	2672.22	673.01	671.43
10		3000.05	2992.22	756.77	754.74

Çizelge 8.8. Kevlar 49-epoxy malzemesi için serbest titreşim frekansları (Hertz)

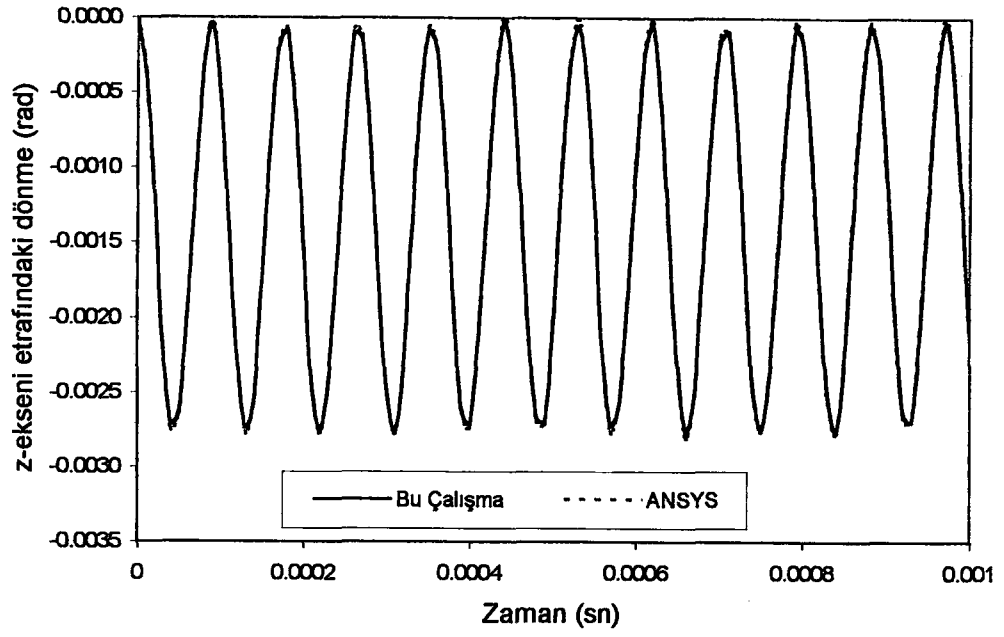
Frekans No	Aktif Sarım Sayısı (n)	D/d=5		D/d=10	
		ANSYS (500 eleman)	Bu Çalışma	ANSYS (500 eleman)	Bu Çalışma
1	1	8179.43	8179.22	2141.95	2141.89
2		20336.54	20336.34	5939.02	5938.95
3		22748.66	22748.06	6109.26	6109.08
4		42544.15	42543.06	13957.40	13957.05
5		47654.10	47653.06	14991.97	14991.79
6		79019.91	79018.66	25581.14	25580.67
7		79643.53	79642.21	29448.54	29448.12
8		114867.42	114865.56	40142.64	40142.11
9		119871.07	119868.03	46509.03	46508.08
10		152835.84	152832.35	56851.67	56850.91
1	4	1377.41	1376.93	347.09	346.97
2		2656.30	2655.38	669.41	669.18
3		3092.29	3091.52	782.06	781.86
4		3389.46	3388.66	863.88	863.67
5		3737.92	3736.74	941.29	940.99
6		4143.48	4142.25	1049.46	1049.15
7		5357.47	5356.05	1360.58	1360.22
8		5954.38	5952.82	1570.17	1569.73
9		6123.35	6121.37	1690.71	1690.09
10		7356.15	7353.35	2038.93	2038.05
1	8	693.24	692.27	174.70	174.45
2		1266.15	1265.51	320.58	320.42
3		1270.38	1269.77	321.79	321.63
4		1378.26	1376.33	347.35	346.86
5		2039.73	2036.91	514.01	513.29
6		2429.22	2426.96	614.49	613.90
7		2581.49	2579.40	655.77	655.23
8		2706.47	2703.15	683.32	682.48
9		2828.63	2825.72	711.07	710.33
10		3144.64	3140.50	792.99	791.93
1	12	462.64	461.20	116.58	116.21
2		628.00	627.50	158.25	158.12
3		631.80	631.25	159.23	159.09
4		924.91	921.99	233.08	232.33
5		1378.43	1374.14	347.36	346.26
6		1432.97	1431.09	362.49	362.00
7		1456.13	1454.22	368.65	368.16
8		1826.04	1820.36	460.20	458.76
9		1893.22	1888.81	475.67	474.55
10		2179.21	2173.57	549.75	548.28

Çizelge 8.7-8.8 incelendiğinde ANSYS sonuçları ile bu çalışmada sunulan modelin sonuçları birbirleri ile uyum içinde olduğu görülmektedir. D/d oranı ve aktif sarım sayısı arttıkça frekans değeri azalmaktadır. Çizelge 8.4’de verilen malzemeler içinde Carbon-epoxy² malzemesi en büyük frekans değerini vermektedir.

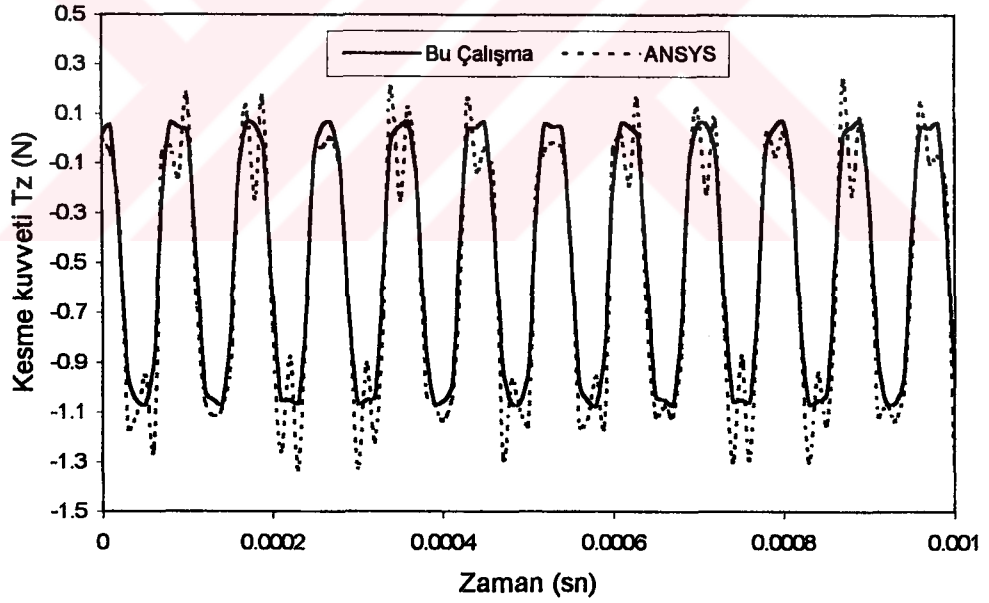
Çizelge 8.4’de verilen üç ayrı malzeme, çeşitli D/d oranları ve aktif sarım sayıları için serbest titreşim analizi yapıldıktan sonra zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Helisel yayın orta noktasına $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulanmıştır. Çeşitli enine izotrop malzemeler için aktif sarım sayısı ve D/d oranının dinamik davranışa etkisi incelenmiştir. Carbon-epoxy¹ malzemesinden yapılmış çubuk, aktif sarım sayısı $n=1$, D/d=5 ve D/d=10 oranları için helisel yayın orta noktasındaki deplasman ve dönme ile ankastre uçtaki kesme kuvveti ve momentin zamanla değişimleri Şekil 8.45-8.52’de gösterilmektedir. Hesaplamalarda D/d=5 oranı için zaman artımı $DT=1 \times 10^{-5}$ sn ve D/d=10 oranı için $DT=2.5 \times 10^{-5}$ sn seçilmiştir.



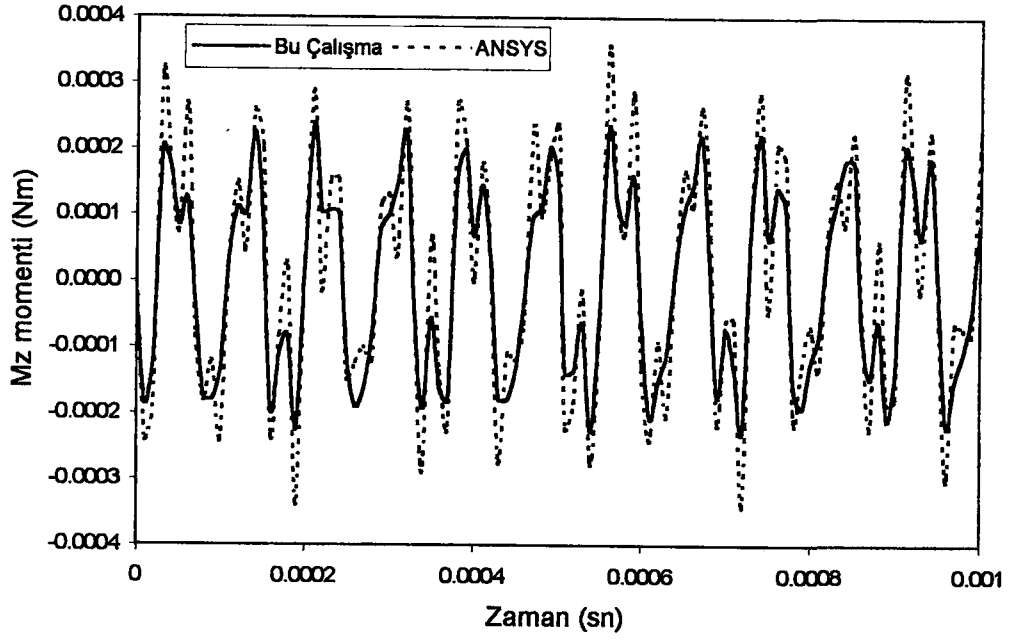
Şekil 8.45. D/d=5 ve n=1 için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



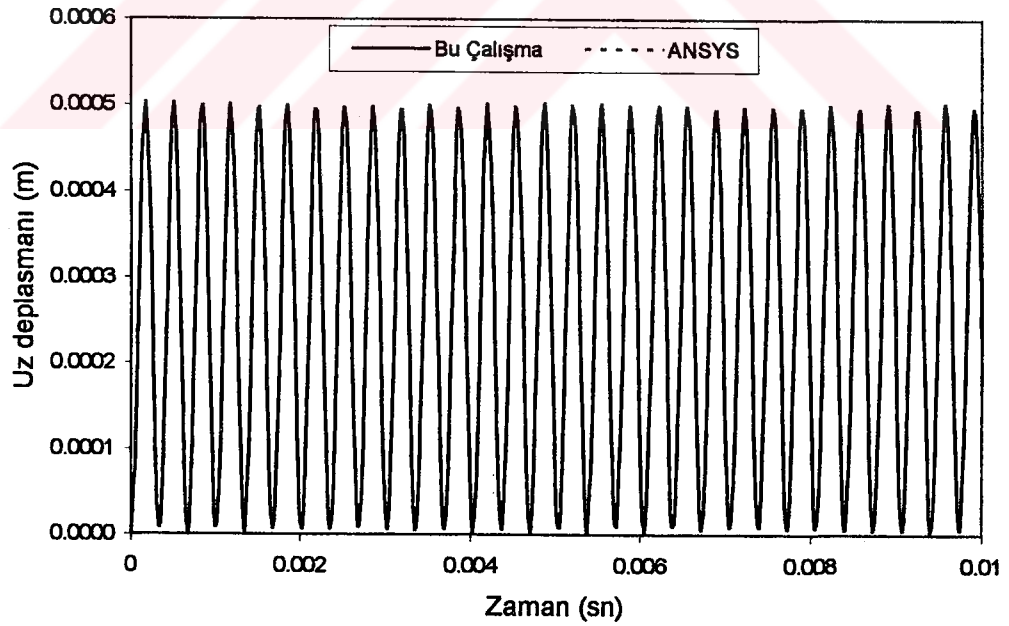
Şekil 8.46. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



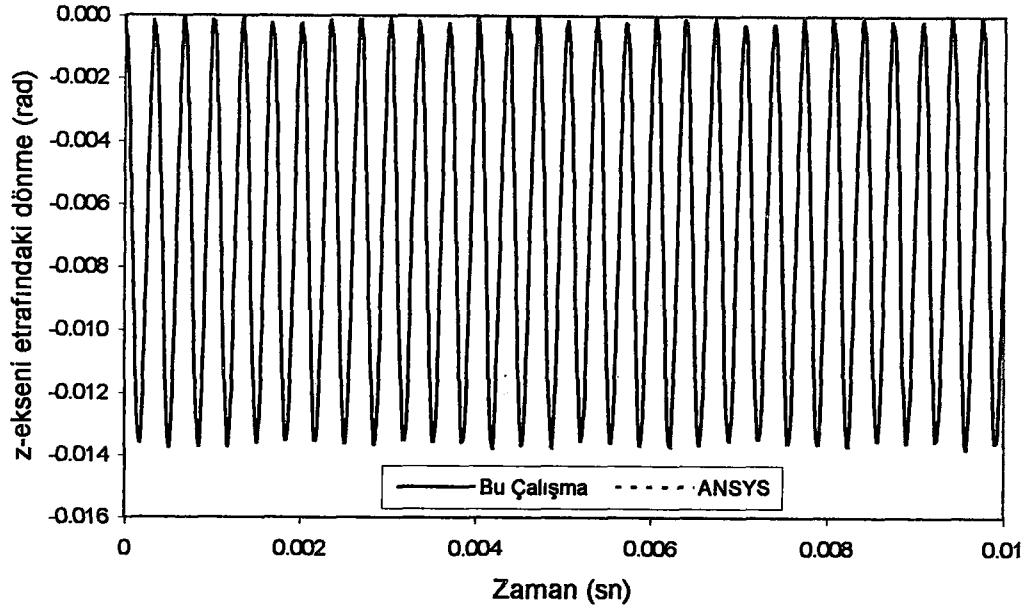
Şekil 8.47. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



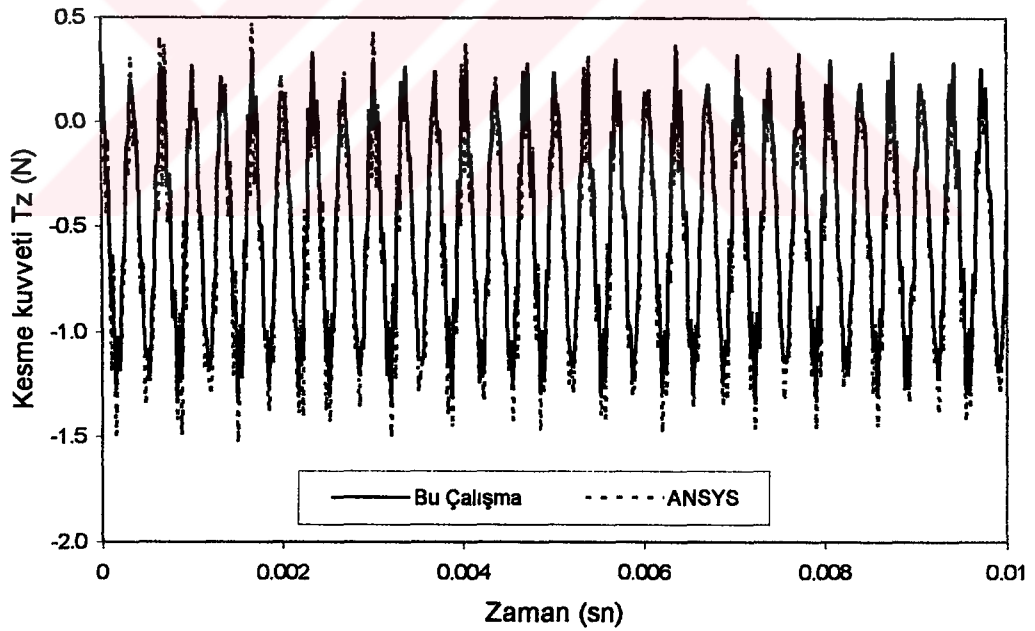
Şekil 8.48. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



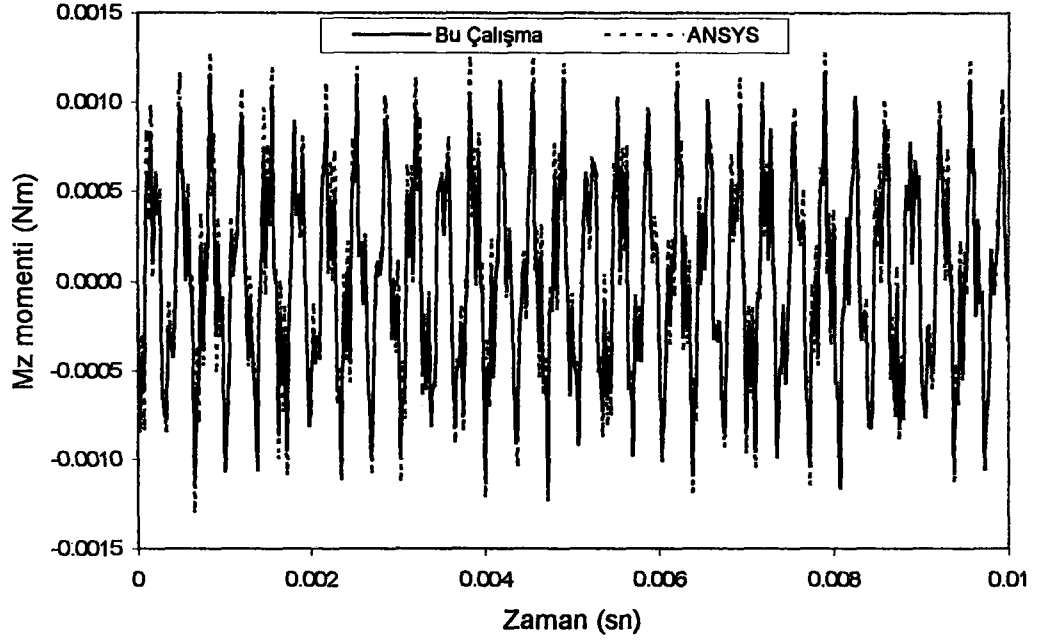
Şekil 8.49. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



Şekil 8.50. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



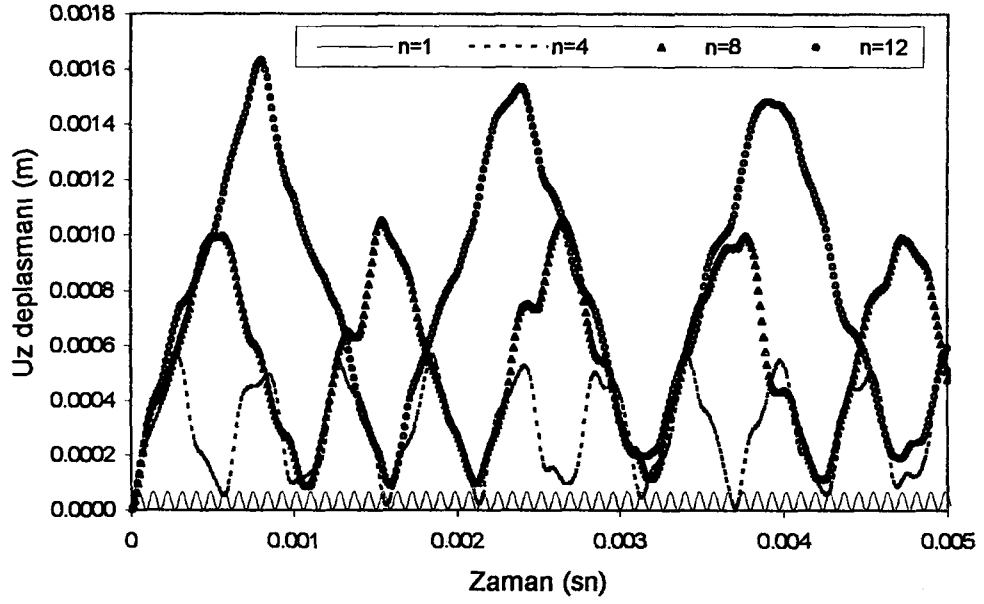
Şekil 8.51. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



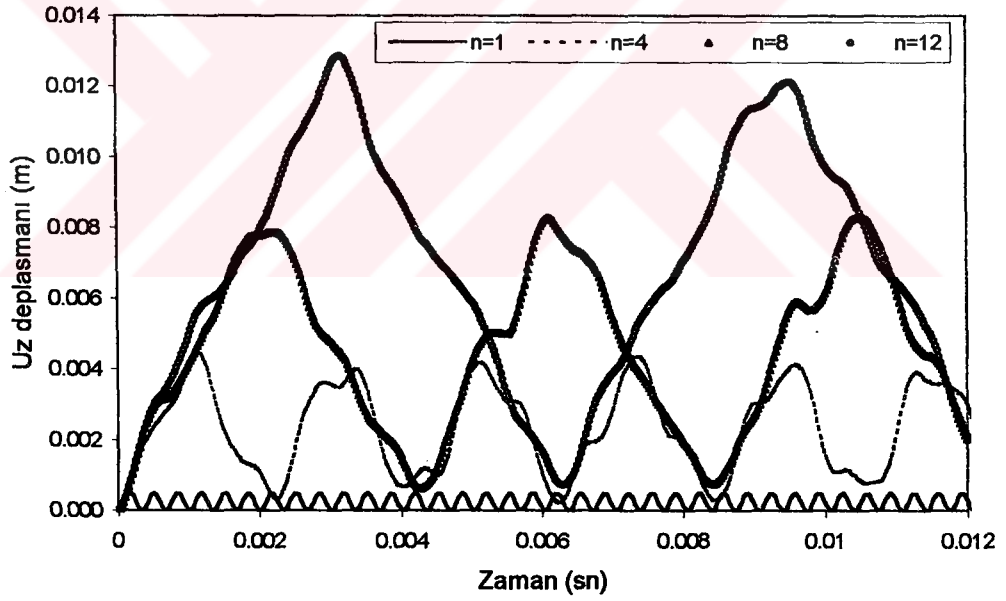
Şekil 8.52. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)

Carbon-epoxy¹ malzemesi ve $D/d=5$, $D/d=10$ oranları için iki ucu ankastre helisel çubuğun deplasman ve kesit tesirleri Şekil 8.45-8.52 grafiklerinde ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmış ve iki farklı yöntemle bulunan sonuçların uyum içinde olduğu görülmüştür. Şekil 8.45 ve Şekil 8.49 incelendiğinde, D/d oranı arttıkça deplasman genlikleri ve titreşim periyotları da artmaktadır.

Carbon-epoxy¹ malzemesi için $D/d=5$, $D/d=10$ oranları ve aktif sarım sayısının $n=1, 4, 8, 12$ olması hallerinde helisel yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri Şekil 8.53-8.54'de gösterilmektedir.



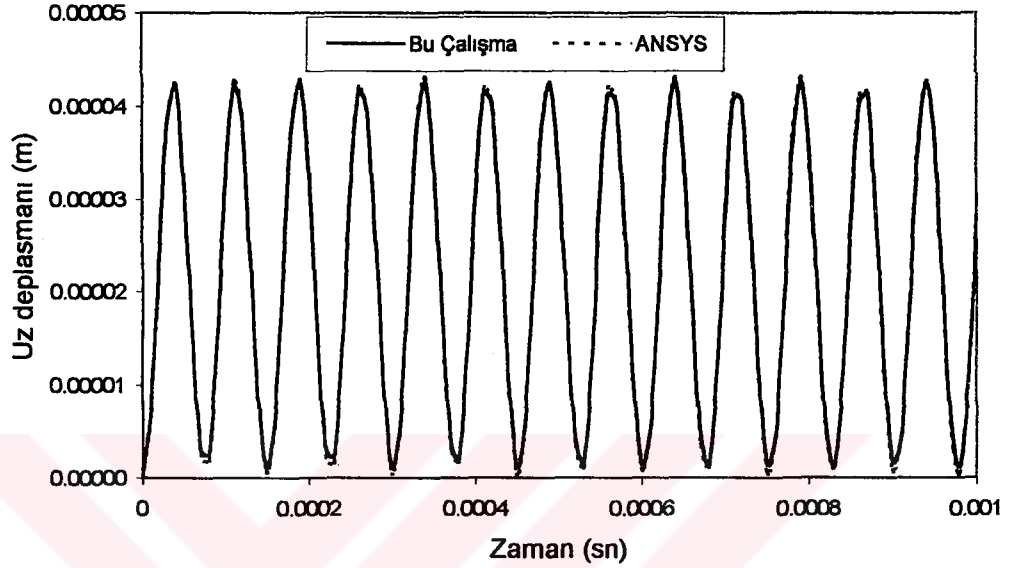
Şekil 8.53. D/d=5 için farklı sarım sayıları içeren helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)



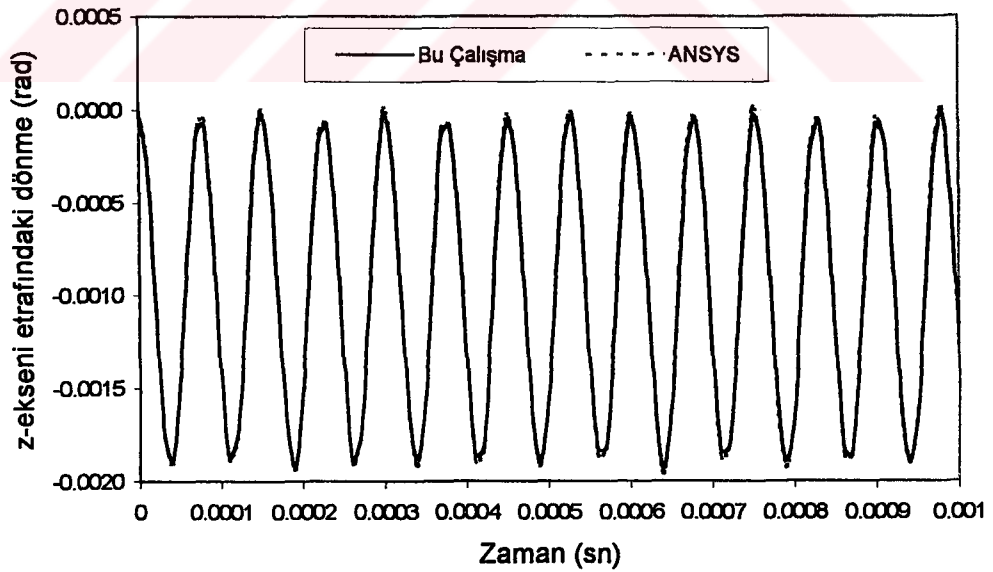
Şekil 8.54. D/d=10 için farklı sarım sayıları içeren helisin orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy¹)

Yukarıdaki grafiklerden görüldüğü gibi aktif sarım sayısı ve D/d oranı arttıkça hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyotları artmaktadır. D/d oranı arttıkça helisin rijitliği azalmaktadır.

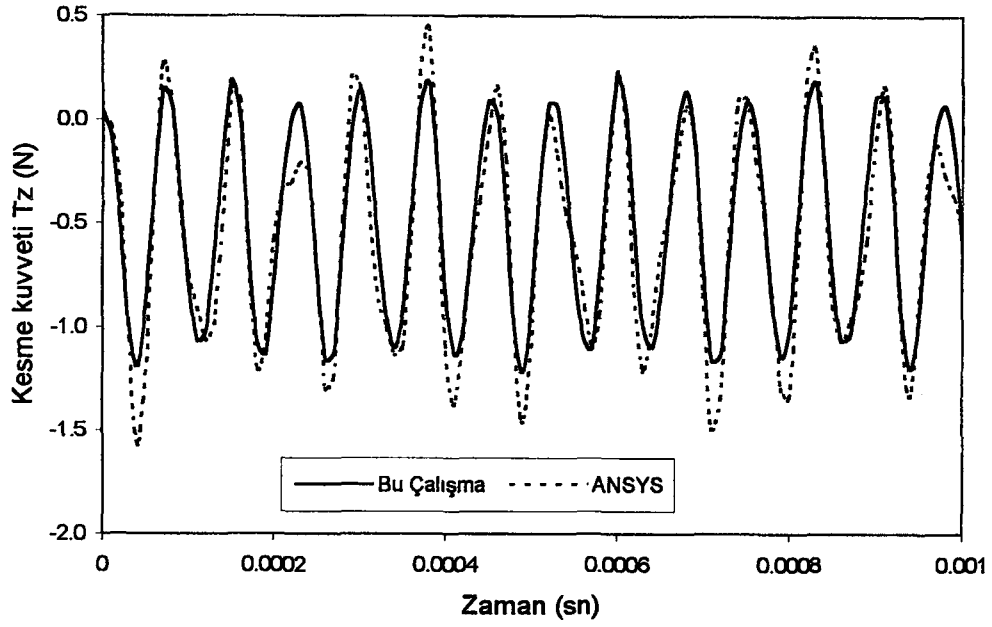
Benzer şekilde Carbon-epoxy² malzemesi için iki ucu ankastre helisel çubuğun $n=1$ aktif sarım sayısı ve $D/d=5$ ile $D/d=10$ oranları için yayın orta noktasındaki deplasman ve dönme ile ankastre uçtaki kesme kuvveti ile momentin zamanla değişimleri grafik formda Şekil 8.55-8.62’de gösterilmektedir.



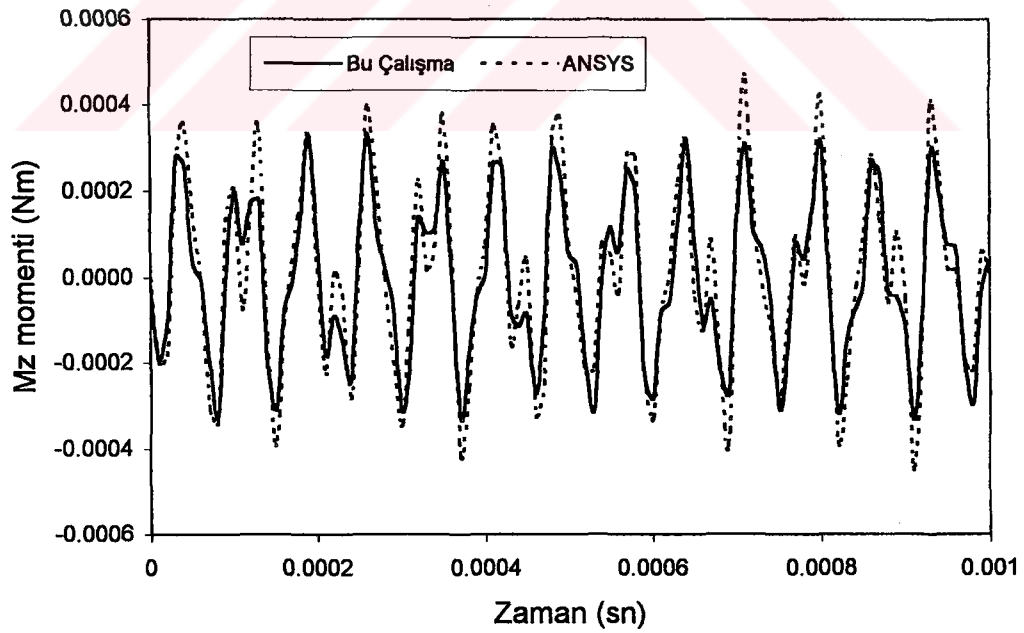
Şekil 8.55. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)



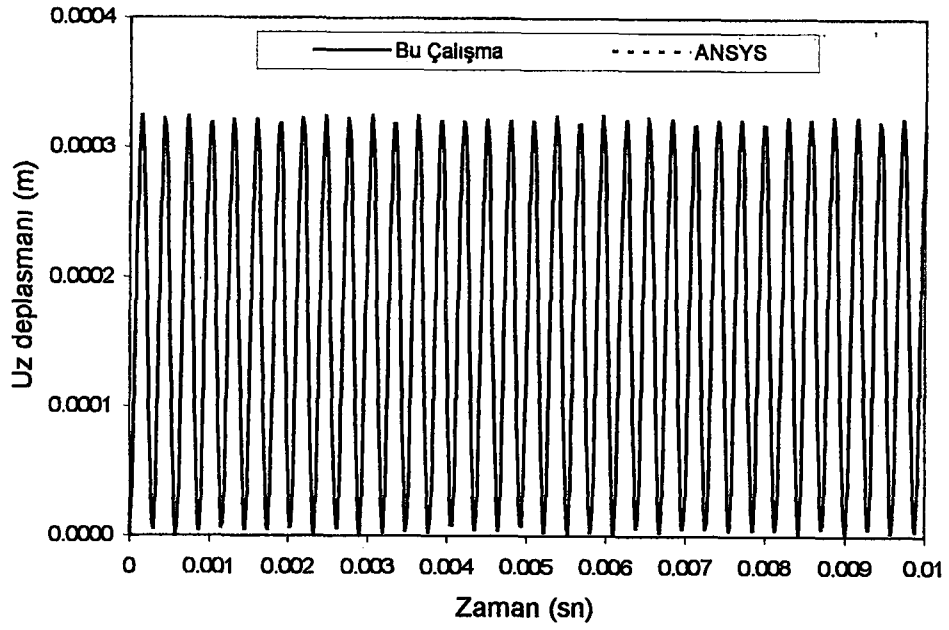
Şekil 8.56. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)



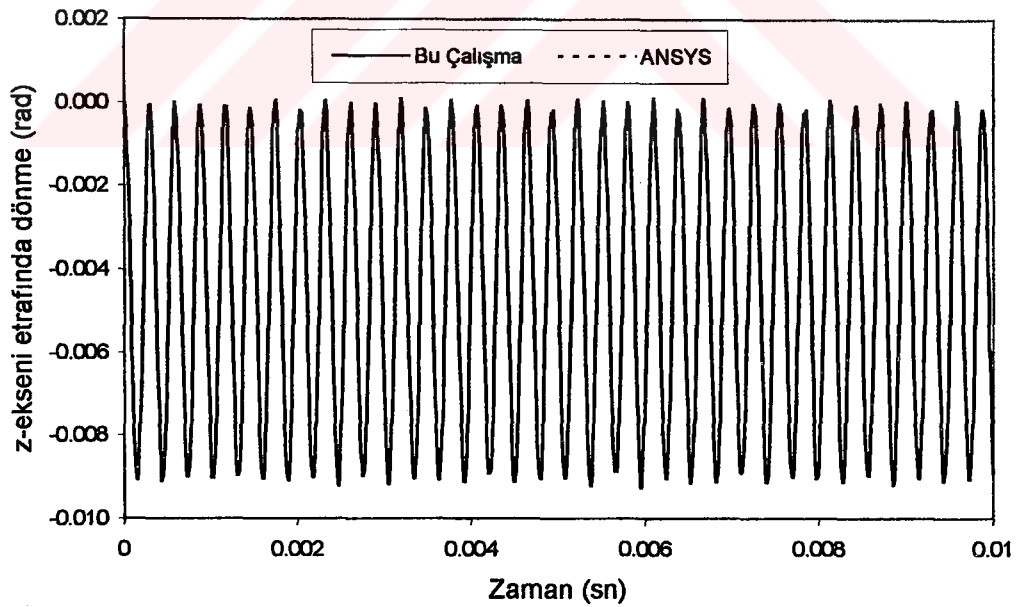
Şekil 8.57. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)



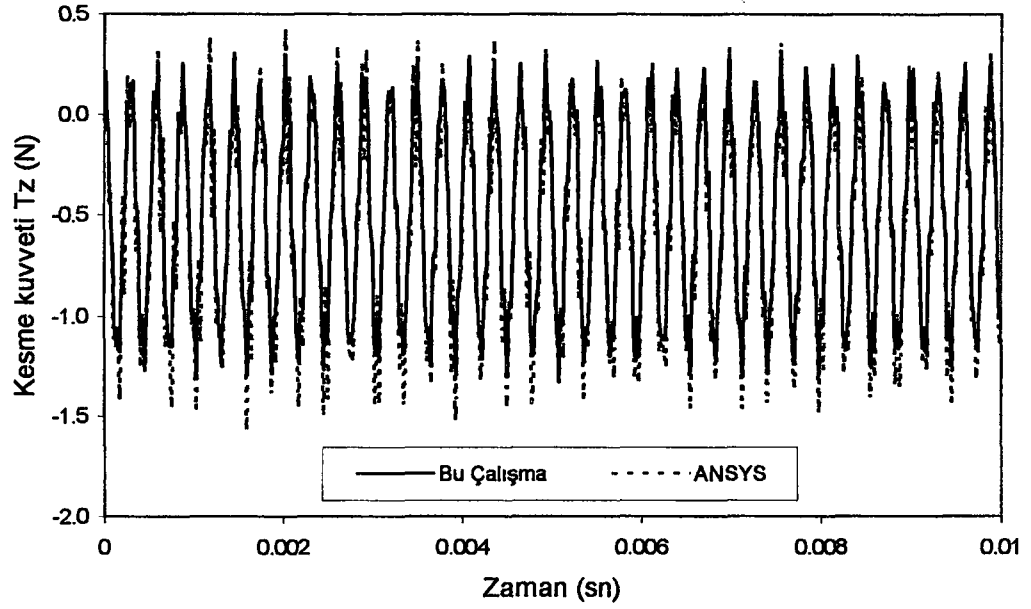
Şekil 8.58. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)



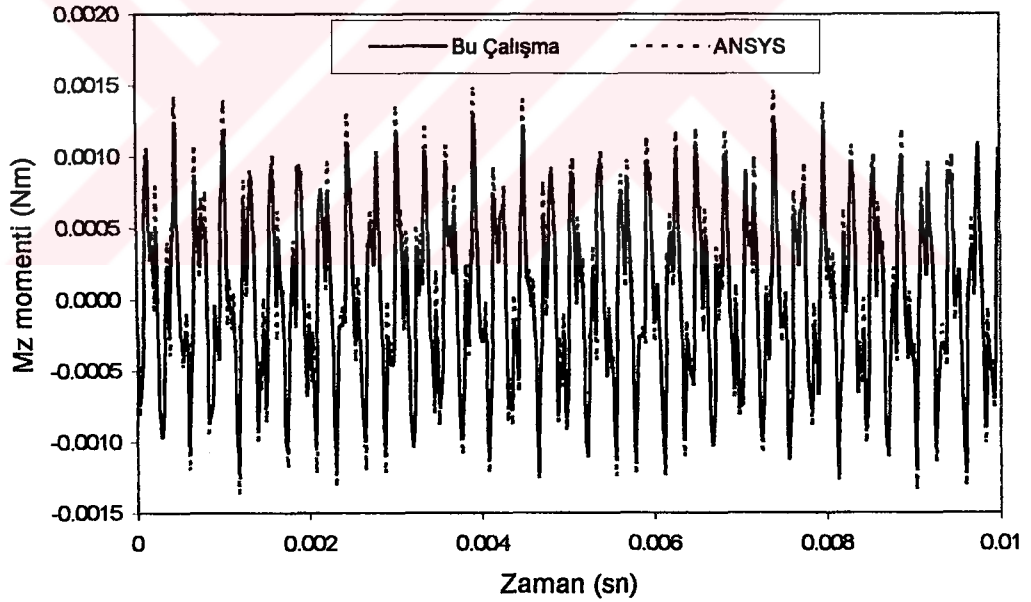
Şekil 8.59. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)



Şekil 8.60. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)

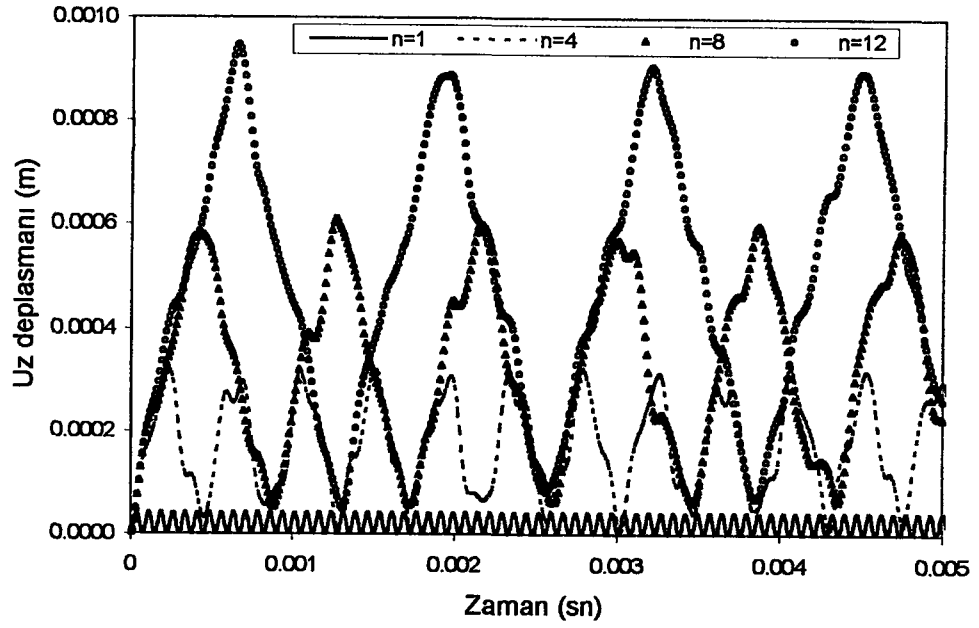


Şekil 8.61. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)

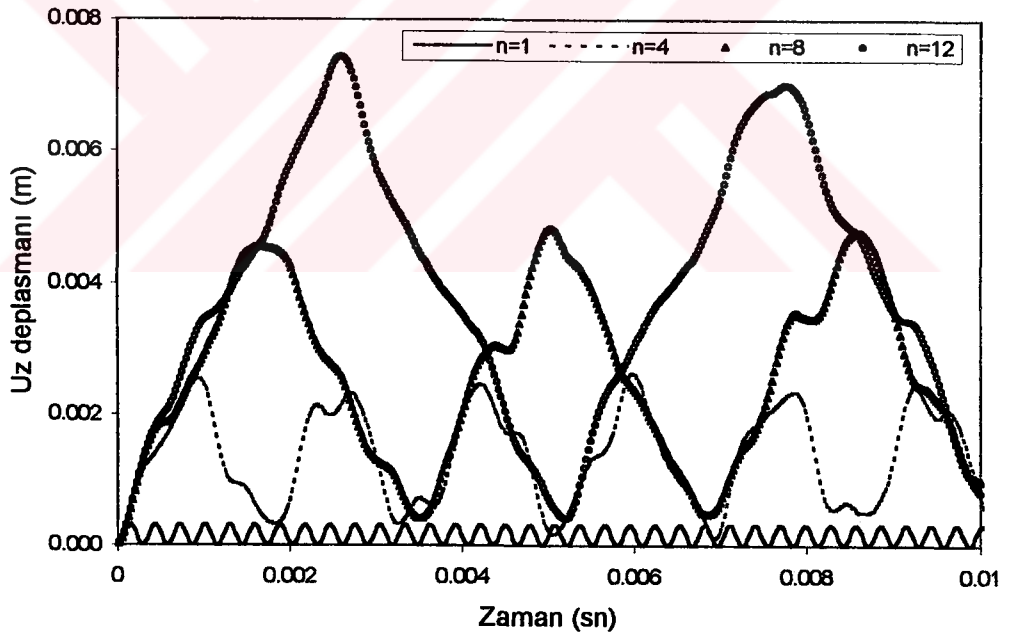


Şekil 8.62. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)

Carbon-epoxy² malzemesi için $D/d=5$, $D/d=10$ oranları ve aktif sarım sayısının $n=1, 4, 8, 12$ olması hallerinde yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri Şekil 8.63-8.64'de gösterilmektedir.



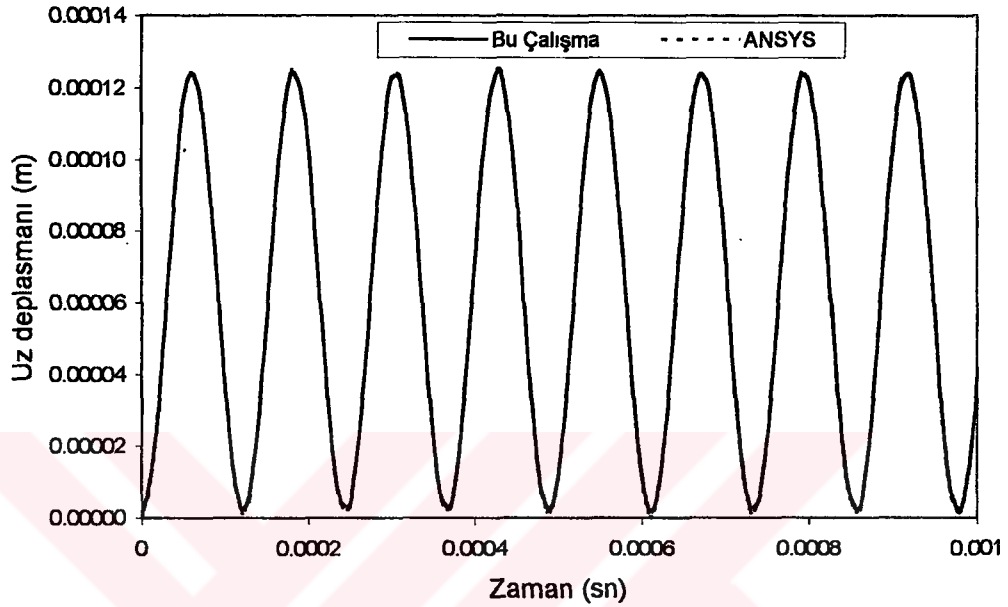
Şekil 8.63. D/d=5 için farklı sarım sayıları içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)



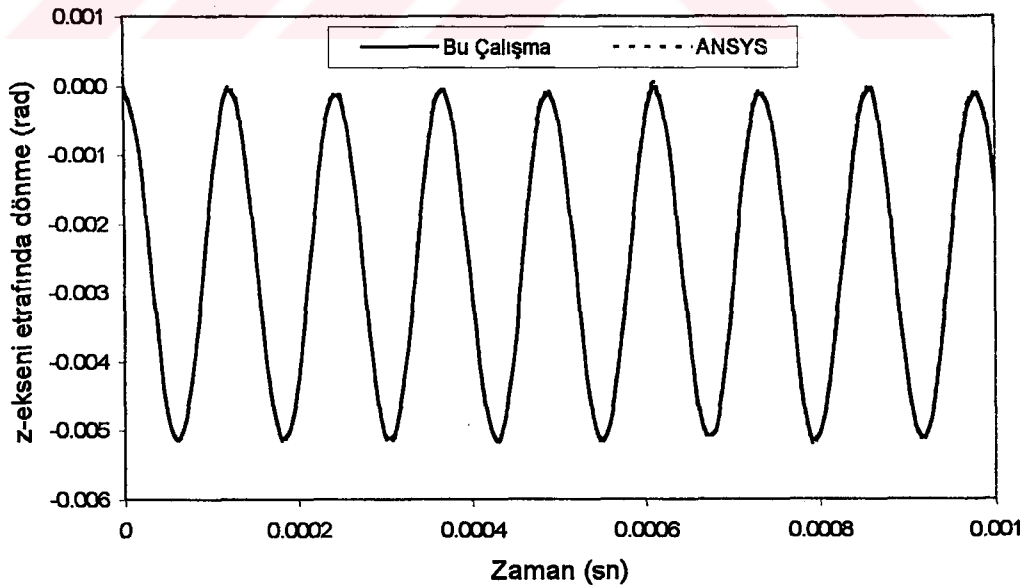
Şekil 8.64. D/d=10 için farklı sarım sayıları içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Carbon-epoxy²)

Şekil 8.63-8.64'de görüldüğü gibi aktif sarım sayısı ve D/d oranı arttıkça hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyotları artmaktadır.

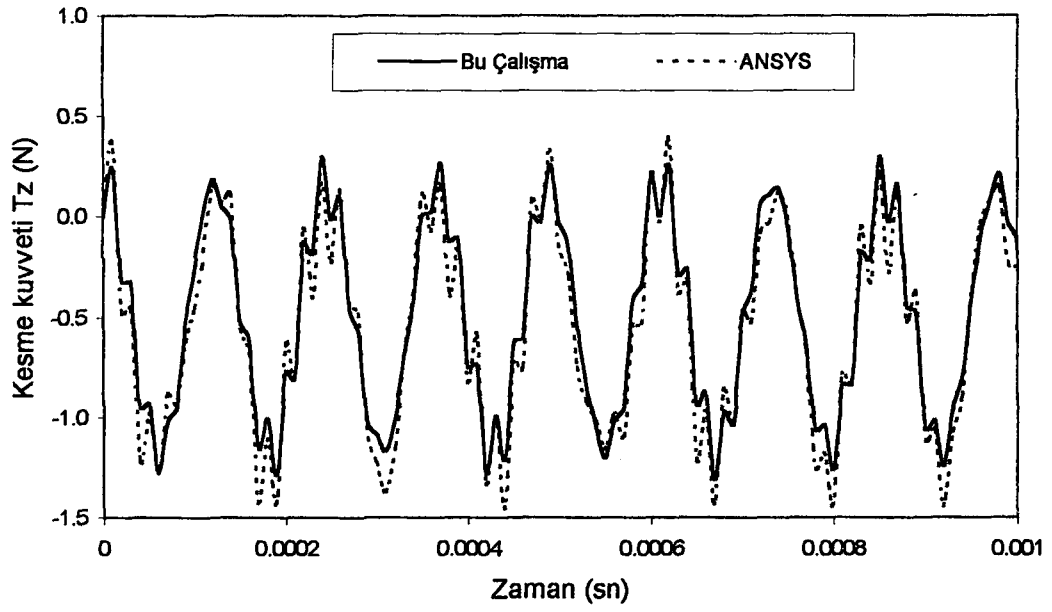
Çizelge 8.4’de verilen Kevlar-epoxy malzemesi için iki ucu ankastre helisel çubuğun aktif sarım sayısı $n=1$ ve $D/d=5$ ile $D/d=10$ oranları için yayın orta noktasındaki deplasman ve dönme ile ankastre ucundaki kesme kuvveti ve momentin zamanla değişimleri grafik formda aşağıda verilmektedir.



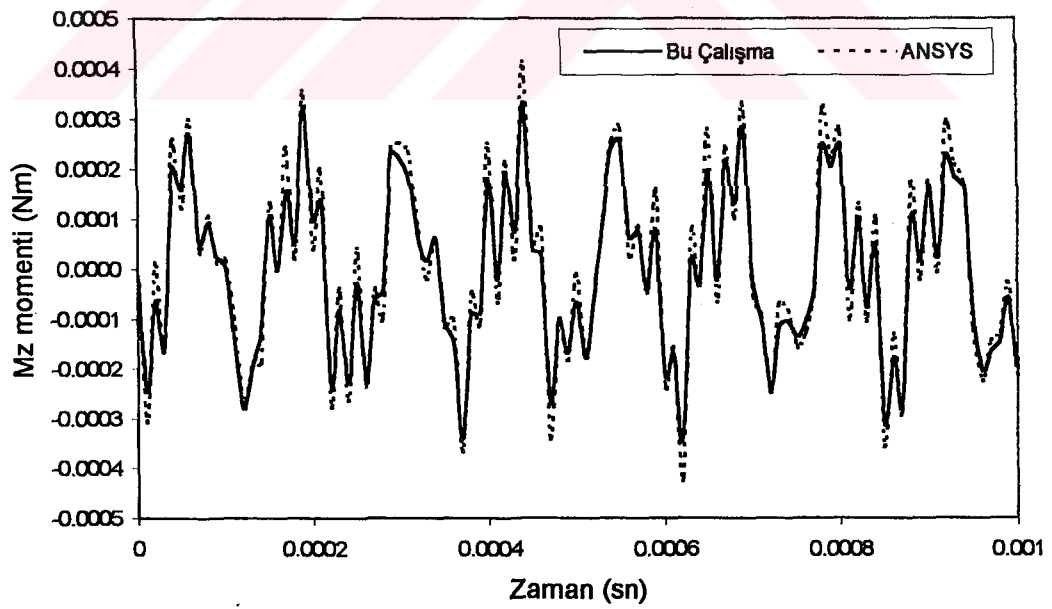
Şekil 8.65. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



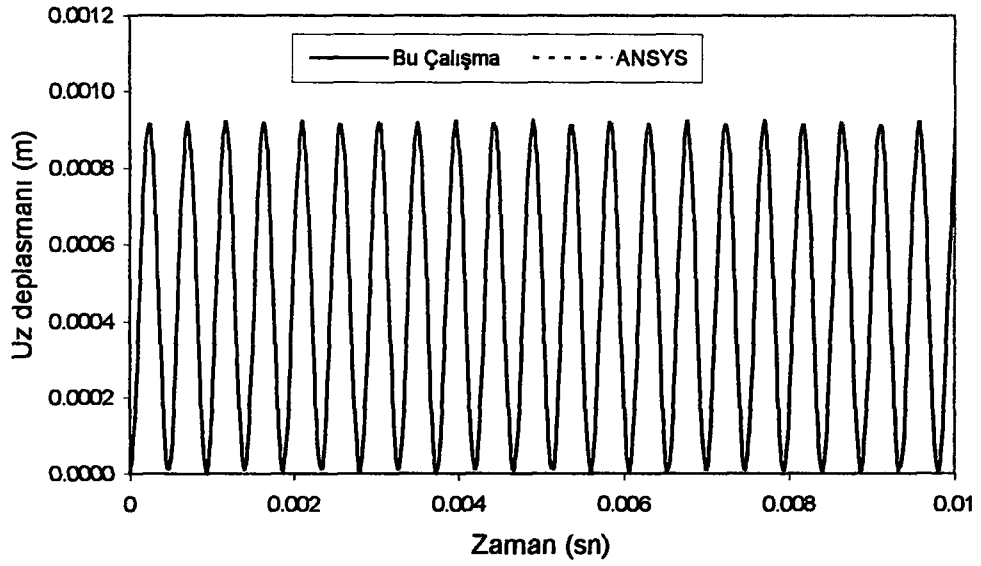
Şekil 8.66. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



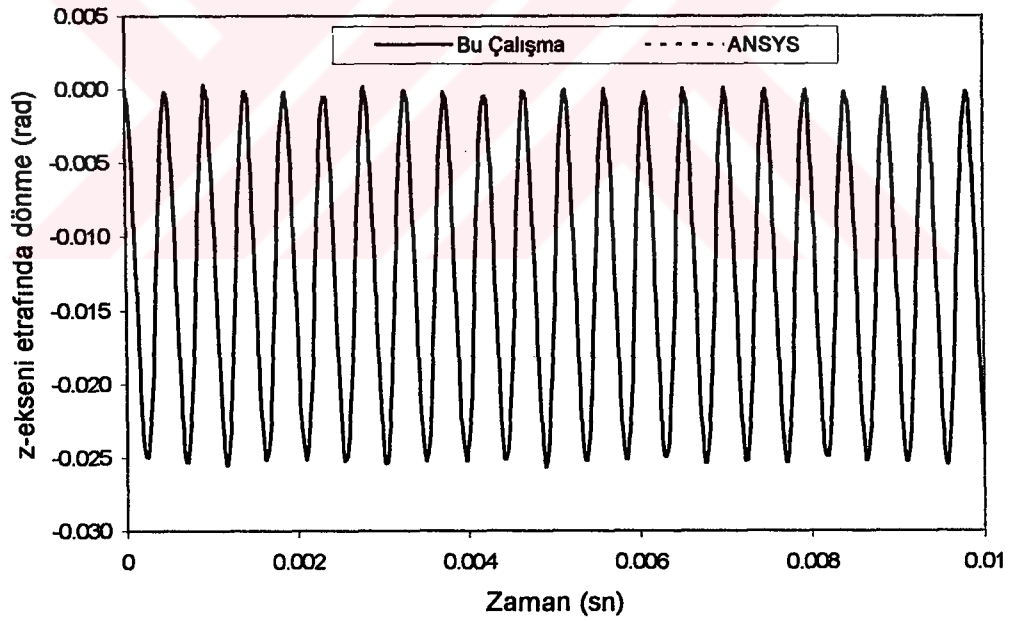
Şekil 8.67. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



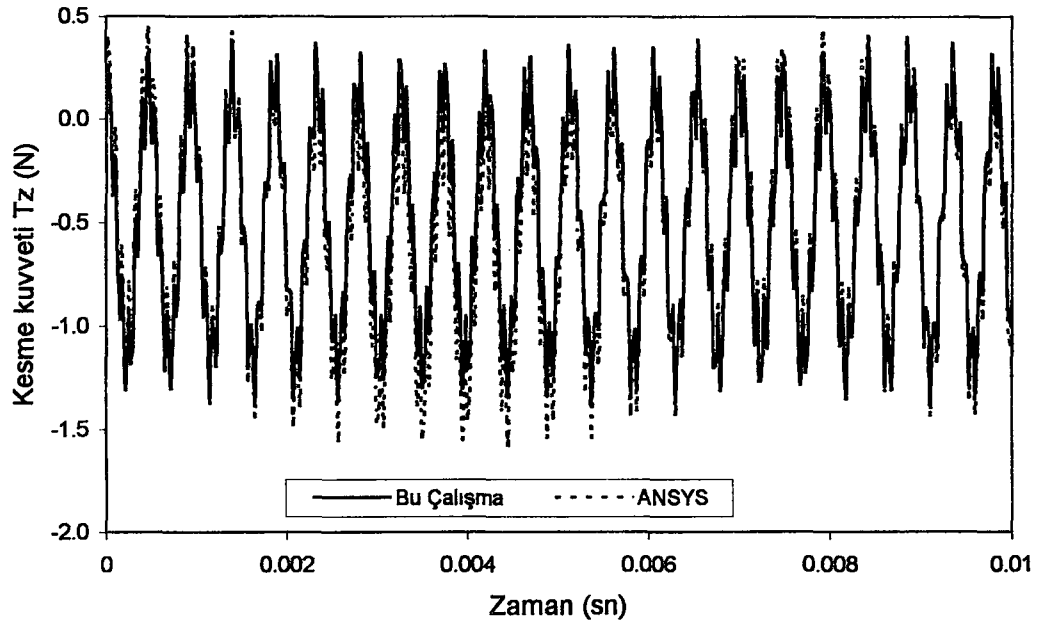
Şekil 8.68. $D/d=5$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



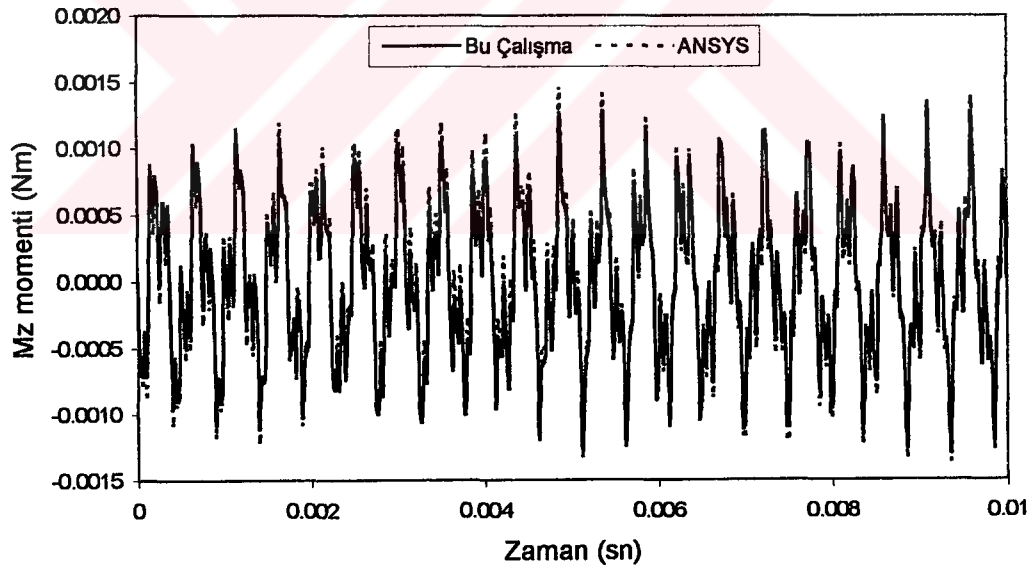
Şekil 8.69. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



Şekil 8.70. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki dönmenin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



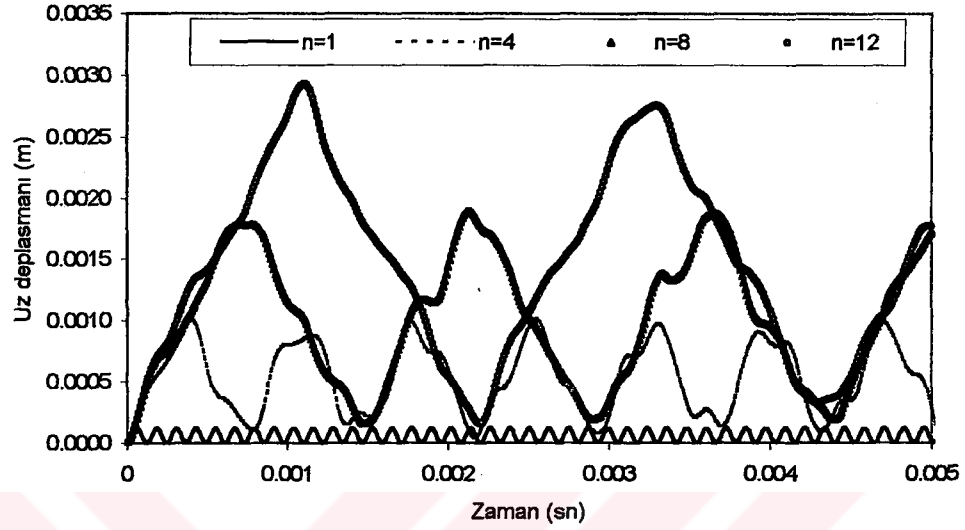
Şekil 8.71. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki kesme kuvvetinin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



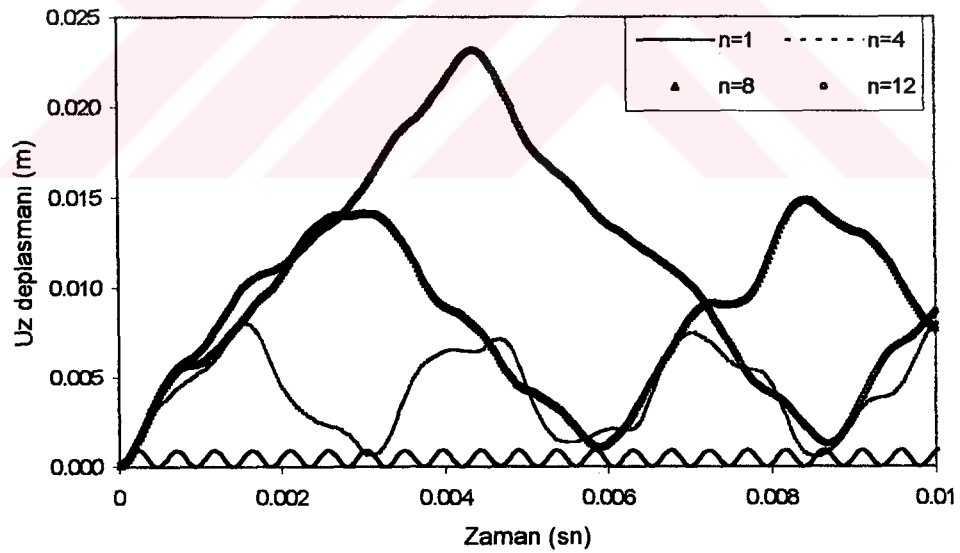
Şekil 8.72. $D/d=10$ ve $n=1$ için ankastre uçtaki momentin zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)

Şekil 8.65-8.72'de görüldüğü gibi Kevlar-epoxy malzemesi için bu çalışmada bulunan sonuçlar ile ANSYS sonuçları uyum içindedirler.

Kevlar-epoxy malzemesi için $D/d=5$, $D/d=10$ oranları ve farklı aktif sarım sayılarını içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri Şekil 8.73-8.74’de sunulmaktadır.



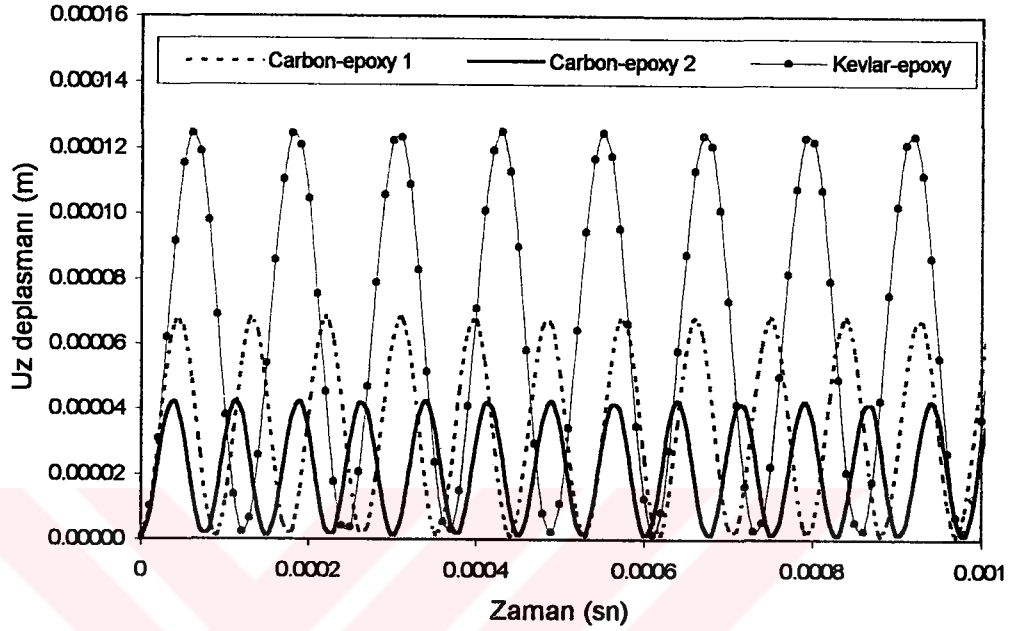
Şekil 8.73. $D/d=5$ için farklı sarım sayılarını içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)



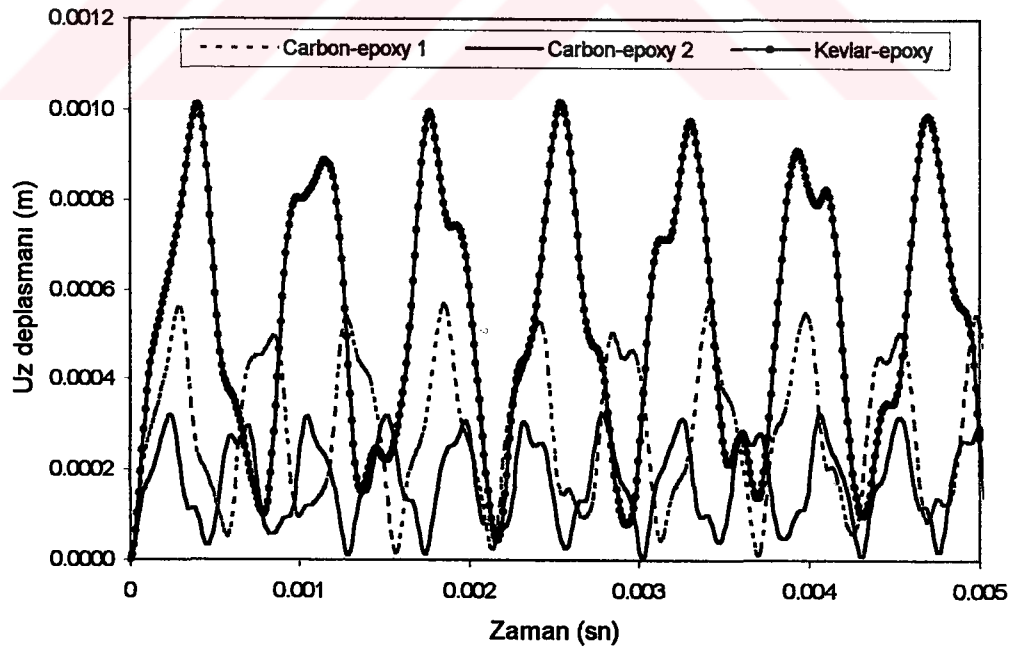
Şekil 8.74. $D/d=10$ için farklı sarım sayılarını içeren yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi (Kevlar-epoxy)

Şekil 8.73-8.74’de görüleceği gibi D/d oranı ve aktif sarım sayısı arttıkça deplasman genlikleri ve titreşim periyotları artmaktadır.

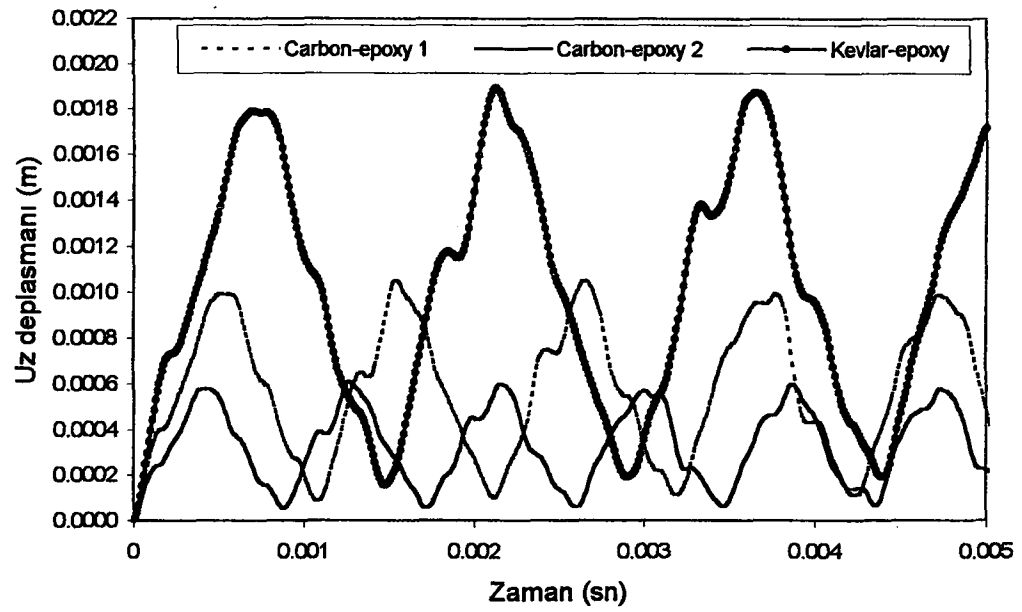
$D/d=5$, $D/d=10$ oranları ve farklı sarım sayıları için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimleri, üç çeşit enine izotrop malzeme için aynı grafik üzerinde karşılaştırılmıştır (Şekil 8.75-8.82).



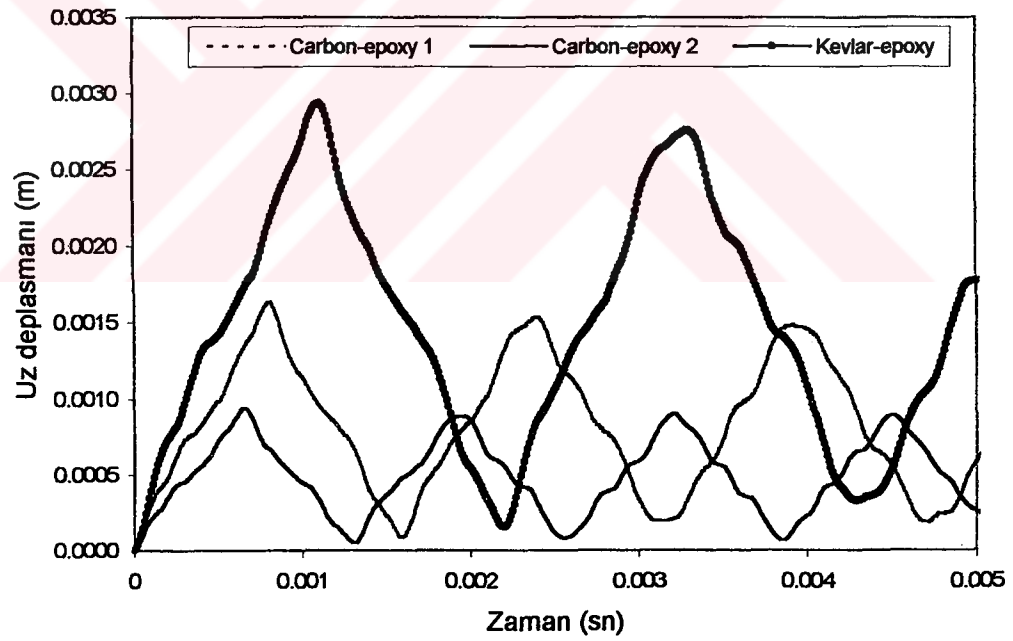
Şekil 8.75. $D/d=5$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



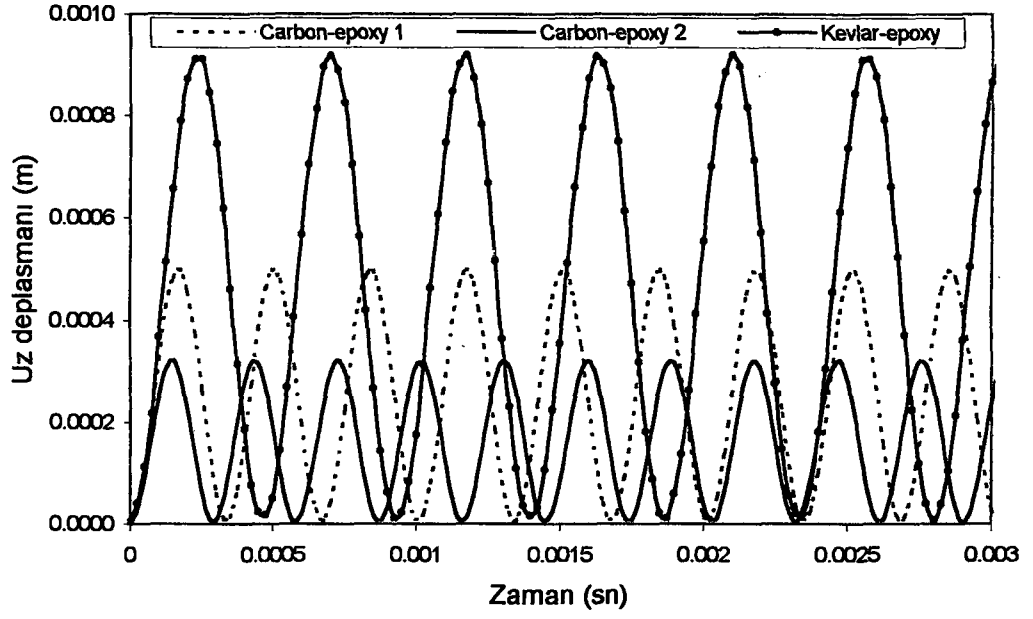
Şekil 8.76. $D/d=5$ ve $n=4$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



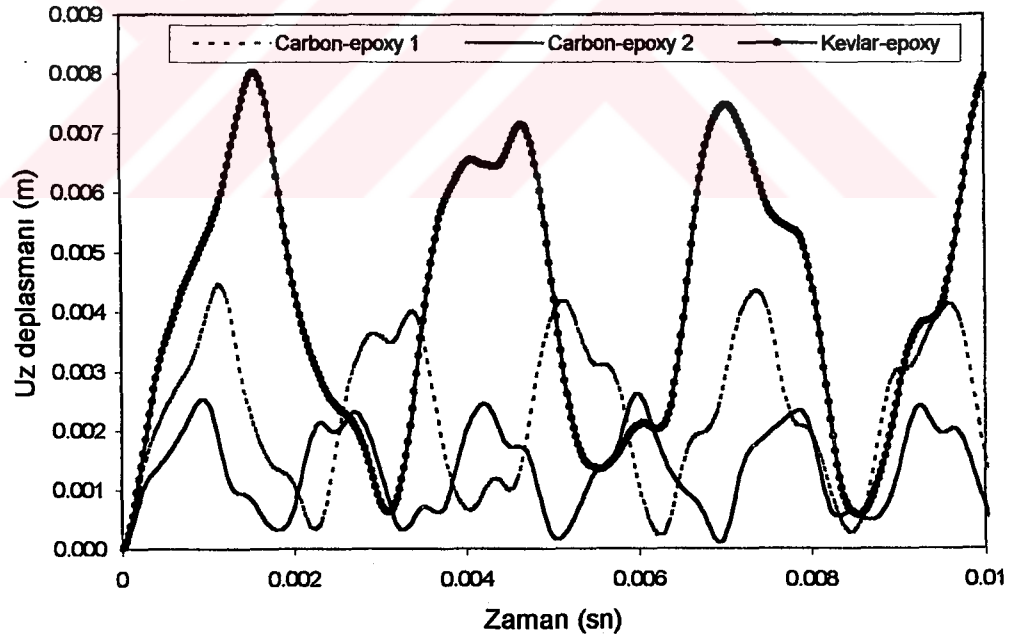
Şekil 8.77. $D/d=5$ ve $n=8$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



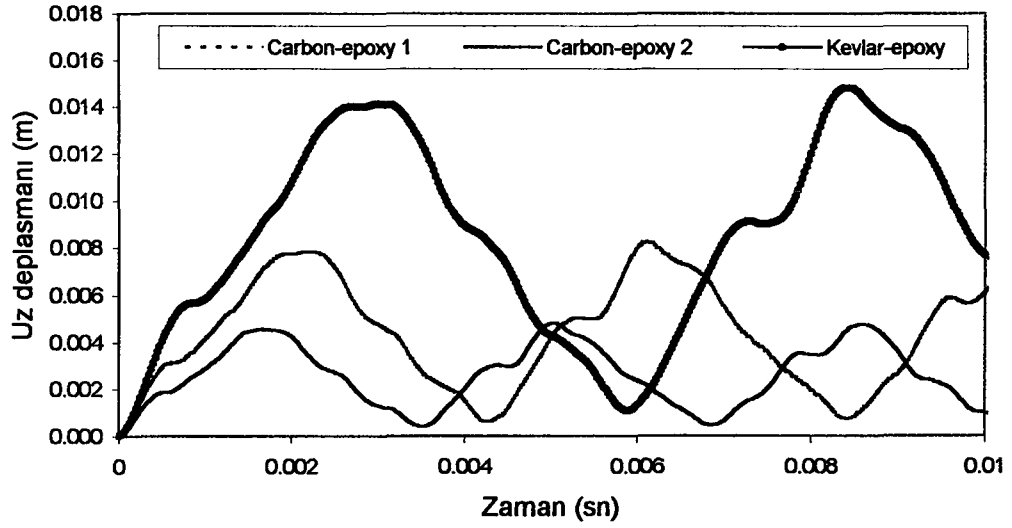
Şekil 8.78. $D/d=5$ ve $n=12$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



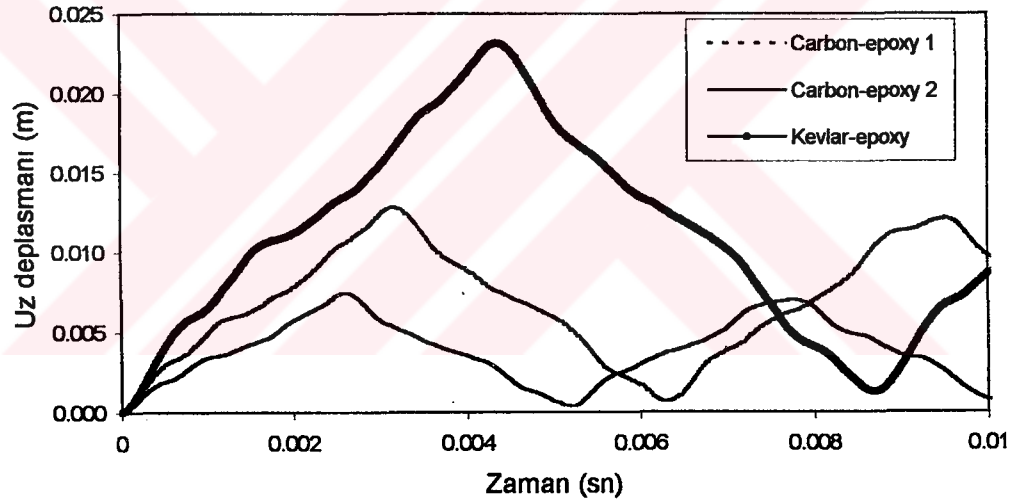
Şekil 8.79. $D/d=10$ ve $n=1$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 8.80. $D/d=10$ ve $n=4$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi



Şekil 8.81. $D/d=10$ ve $n=8$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi

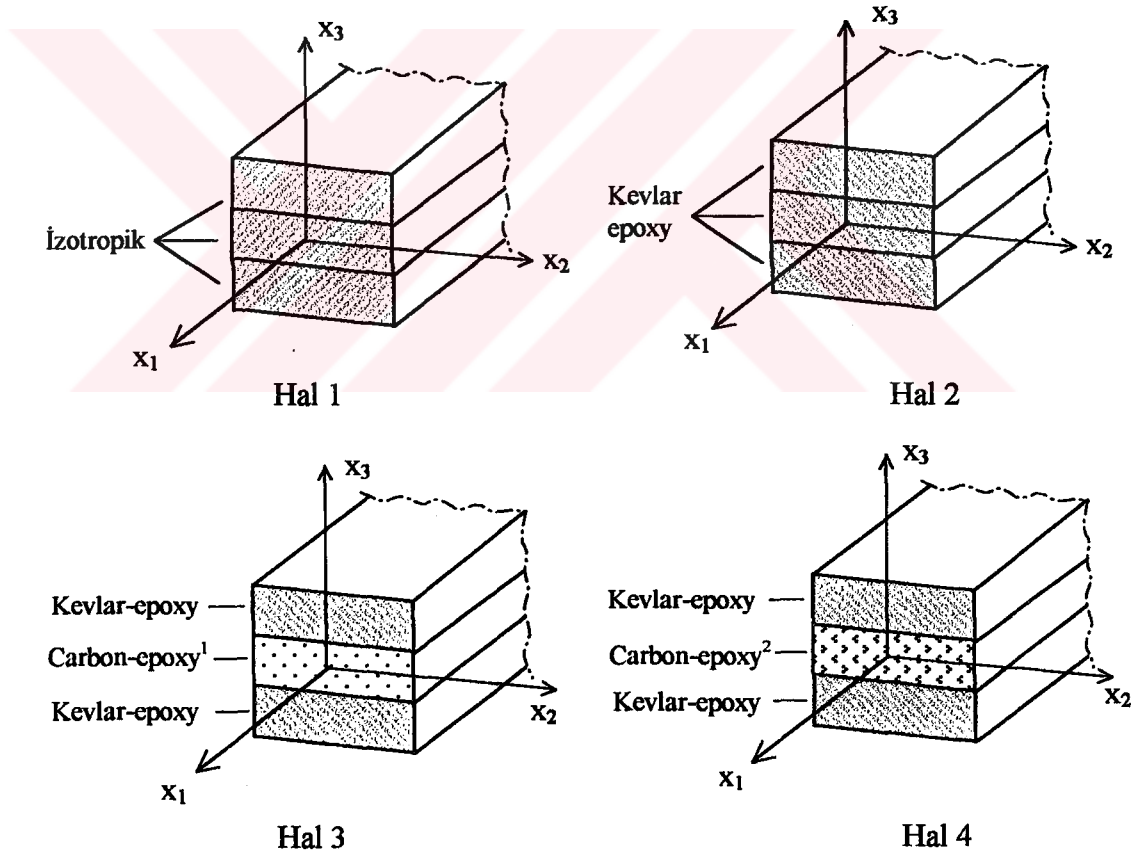


Şekil 8.82. $D/d=10$ ve $n=12$ için yayın orta noktasındaki deplasmanın zamanla değişimi

Geometri ve yüklemesi aynı olan çubuk malzemesi hallerinde D/d oranı ve aktif sarım sayısı arttıkça hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyotları artmaktadır. İlgili çizelgeler incelendiğinde, sırasıyla Carbon-epoxy², Carbon-epoxy¹ ve Kevlar-epoxy malzemeleri için en büyük frekans değerlerini vermektedir. Buna karşın Şekil 8.75-8.82 incelendiğinde sırasıyla Kevlar-epoxy, Carbon-epoxy¹ ve Carbon-epoxy² malzemeleri için en büyük deplasman genliği ve titreşim periyodunu vermektedir.

8.7. Çapraz Elyaf Takviyeli (Cross-Ply) Tabakadan Yapılmış Konsol Helis

Kesiti üç tabakadan meydana gelen konsol helis ele alınmaktadır. Kare kesitli konsol helis $d=12\text{cm}$, helisin sarıldığı dairenin yarıçapı $a=200\text{ cm}$, yükselme açısı $\alpha=25.52^\circ$ ve tabakaların izotropik olduğu durumda malzeme özellikleri; $E=2.06 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$, $\rho=7850\text{ kg/m}^3$ ve $\nu=0.3$ olarak seçilmektedir. Enine izotrop malzeme özellikleri Çizelge 8.4’de verilmektedir. Çözümlerde dik koordinat sisteminde hesaplanan rijitlik (stiffness) terimlerinin hareketli dik koordinat sisteminde değişimi ihmal edilmiştir. Tabakalar x_2 eksenine göre simetrik olacak şekilde yerleştirilmektedir (Şekil 8.83). Fiber doğrultu açıları 0° olarak seçilmiştir. Şekil 8.83’de görülen dört ayrı hal için serbest ve zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır.



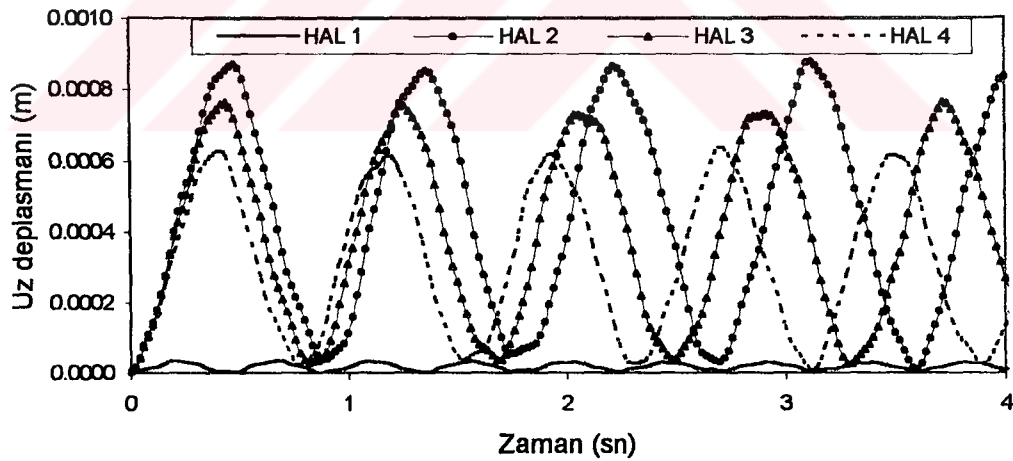
Şekil 8.83. Kesitin tabaka durumları

Kesitin dört ayrı tabaka durumu için serbest titreşim frekansları Çizelge 8.9’da gösterilmektedir.

Çizelge 8.9. Serbest titreşim frekansları (Hertz)

Frekans No	HAL 1	HAL 2	HAL 3	HAL 4
1	2.227	1.117	1.195	1.309
2	2.394	3.037	3.363	3.572
3	8.051	6.945	7.566	8.094
4	8.385	11.136	12.441	13.163
5	25.665	23.699	25.484	27.178
6	29.883	38.469	42.908	45.424
7	57.907	58.048	62.202	66.122
8	63.645	80.577	89.678	95.185
9	101.808	108.578	116.407	123.580
10	108.610	134.585	149.785	159.583

Konsol helisin serbest titreşim frekansları hesaplandıktan sonra, helisin serbest ucuna $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulanarak zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Kompozit çubuk teorisinde elde edilen malzeme matrisleri, kesitin geometrik merkezinden geçen ve tabakalara paralel eksene göre (x_2 -ekseni) elde edilmektedir. Ancak bütün yüklemelerin x_3 doğrultusunda olması halinde kesitin x_2 eksenine göre eğilmesi söz konusu olacaktır. Bundan dolayı yüklemeler x_3 eksenine doğrultusundadır. Bu halleri içeren, konsol helisin serbest ucundaki düşey deplasmanın zamanla değişimi Şekil 8.84’de grafik formda gösterilmektedir.

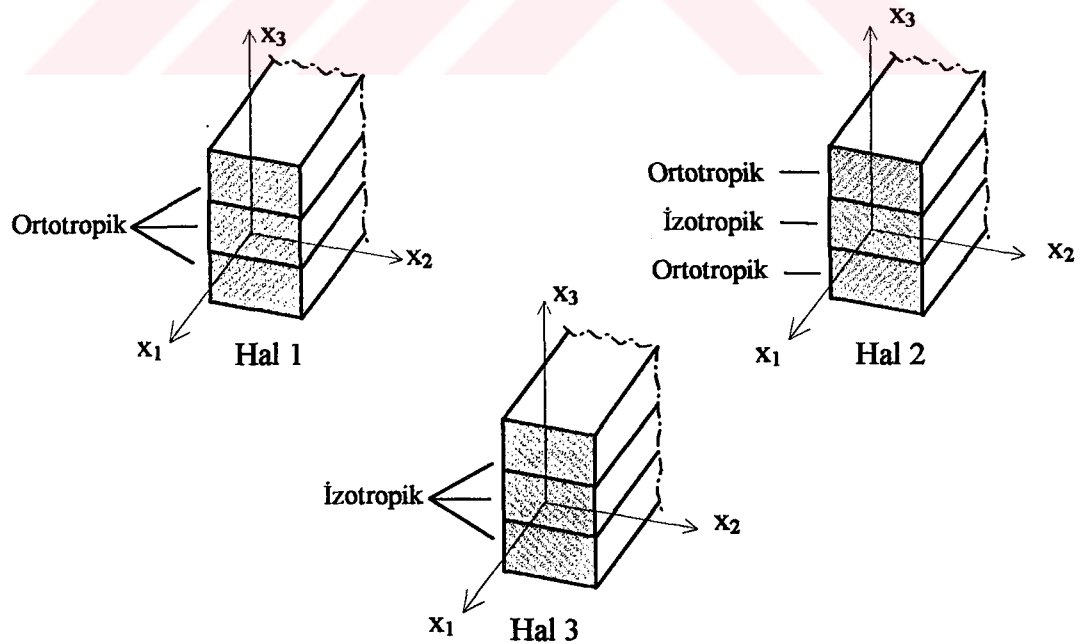


Şekil 8.84. Serbest uçtaki düşey deplasmanın zamanla değişimi

Şekil 8.84 incelendiğinde, x_2 eksenine etrafındaki eğilmeye göre en esnek kesit 2. halde olmakta sonra sırasıyla 3., 4. ve 1. haller gelmektedir. Çubuk geometisi ve yükleme aynı kaldığı halde kesitin esnekliği azaldıkça hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyotları azalmaktadır.

8.8. Çapraz Elyaf Takviyeli Tabakadan Yapılmış İki Ucu Ankastre Helis

Kesiti üç tabakadan meydana gelen iki ucu ankastre yarım sarımlık helis burada ele alınmıştır. Helis dikdörtgen kesitli olup kesit genişliği $b=0.0762$ m, kesit yüksekliği $h=0.2286$ m'dir. Helisin sarıldığı dairenin yarıçapı $a=200$ cm, yükselme açısı $\alpha=25.52^\circ$ ve tabakanın izotropik olduğu durumda malzeme özellikleri; $E=68.9 \times 10^9$ N/m², $\rho=7850$ kg/m³ ve $\nu=0.3$ olarak verilmektedir. Tabakanın ortotropik olması halinde ise malzeme sabitleri; elastisite modülleri $E_{11}=39.3 \times 10^9$ N/m², $E_{22}=152 \times 10^9$ N/m², $E_{33}=22.9 \times 10^9$ N/m², kayma modülleri $G_{12}=29.3 \times 10^9$ N/m², $G_{13}=1.6 \times 10^9$ N/m², $G_{23}=4.1 \times 10^9$ N/m² ve Poisson oranları $\nu_{12}=0.613$, $\nu_{13}=0.265$, $\nu_{23}=0.209$ ve $\rho=7850$ kg/m³ olarak seçilmiştir. Bu izotropik ve ortotropik malzeme özellikleri, literatürde düzlemsel doğru eksenli çubukların serbest titreşim frekanslarını hesaplamak için kullanılmıştır (Yıldırım, 1999b). Çözümlerde dik koordinat sisteminde hesaplanan rijitlik (stiffness) terimlerinin hareketli dik koordinat sisteminde değişimi ihmal edilmiştir. Tabakalar x_2 eksenine göre simetrik olacak şekilde yerleştirilmektedir (Şekil 8.85). Fiber doğrultu açıları 0° olarak seçilmiştir. Şekil 8.85'de görülen üç ayrı hal için serbest ve zorlanmış titreşim analizleri yapılmıştır.



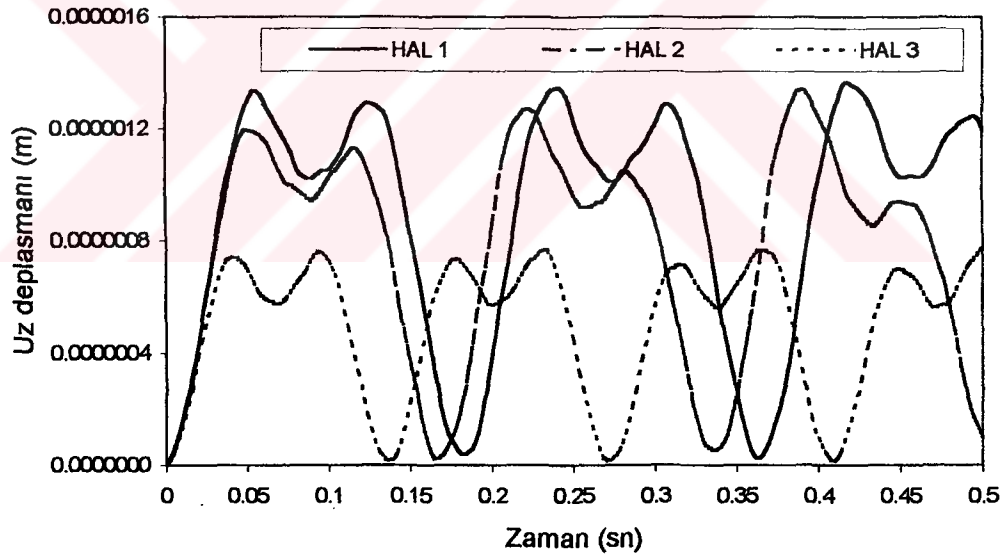
Şekil 8.85. Kesitin tabaka durumları

Üç farklı kesit durumu için serbest titreşim frekansları Çizelge 8.10'da gösterilmektedir.

Çizelge 8.10. Serbest titreşim frekansları (Hertz)

Frekans No	HAL 1	HAL 2	HAL 3
1	5.530	6.067	7.308
2	10.970	11.785	14.724
3	13.776	15.330	18.276
4	25.877	28.747	35.924
5	27.091	30.251	36.346
6	42.256	47.236	55.999
7	47.099	55.148	70.582
8	62.111	69.578	82.786
9	72.118	87.937	107.233
10	83.087	94.697	119.878

Ayrıca helisin orta noktasına $P_0=1$ N şiddetinde adım tipi dinamik yük uygulayarak zorlanmış titreşim analizi yapılmıştır. Bu halleri içeren helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi Şekil 8.86'da grafik formda gösterilmiştir.



Şekil 8.86. Helisin orta noktasındaki düşey deplasmanın zamanla değişimi

Şekil 8.86 incelendiğinde, x_2 eksenine etrafındaki eğilmeye göre en esnek kesit 1. halde olmakta sonra sırasıyla 2. ve 3. haller gelmektedir. Çubuk geometisi ve yüklemesi aynı kaldığı halde kesitin esnekliği azaldıkça hem deplasman genlikleri hem de titreşim periyotları azalmaktadır.

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde, izotropik, anizotropik ve elastik, viskoelastik malzemeden yapılmış eğri eksenli çubuk sistemlerin dinamik davranışları etkin bir yöntem kullanılarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Zamanla değişen yükler altında uzaysal eğri eksenli çubukların zorlanmış titreşimi Laplace uzayında incelenmiştir. Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele alınmıştır. Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak elde edilmiş eğri eksenli çubukları idare eden denklemler, silindirik helisel çubuklar için tekrar düzenlenmiştir. Formülasyonda, çubuk ekseninin eğriliği, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri gözönüne alınmıştır. Laplace uzayında kanonik formda elde edilen adi diferansiyel denklemler, problemin dinamik rijitlik matrisini hesaplayabilmek için tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmektedir. Bu, genel sınır şartlarına sahip problemlerin çözümünde büyük kolaylıklar sağlayacaktır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine (TFY) dayalı başlangıç değer probleminin çözümü için beşinci mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümler, etkin bir sayısal ters Laplace tekniği ile zaman uzayına dönüştürülmüştür. Değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler, uygun integrasyon adım aralığı seçilerek tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile Laplace uzayında istenildiği kadar kesin olarak çözülebilmektedir.

Lineer viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların dinamik davranışları da Laplace uzayında TFY ile incelenmiştir. Viskoleastik malzeme durumunda, elastik-viskoelastik anolojisi yardımıyla, malzeme sabitleri Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile yer değiştirilmektedir. Formülasyonda, hem elastisite modülü hem de Poisson oranının kompleks karşılıkları kullanılmaktadır. Çözümlerde, Kelvin viskoelastik sönüm modeli uygulanmıştır.

Bu tezde ayrıca, simetrik çapraz elyaf takviyeli tabakadan ve ortotropik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizleri de etkin bir yöntem olan TFY ile yapılmıştır.

Lineer elastik, viskoelastik ve anizotropik malzeme hallerini içeren, zamanla değişen yükler altında silindirik helisel çubukların analizini yapmak için

FORTTRAN77 dilinde genel amaçlı bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile literatürde verilen çeşitli örnekler çözülmüş ve ANSYS programı sonuçları ile kıyaslamalar yapılmıştır. Bulunan sonuçların hem literatür hem de ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

Sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman kullanarak ancak yeterli hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Zorlanmış titreşim analizleri ANSYS programında Newmark adım adım integrasyon yöntemi ile zaman uzayında yapılmaktadır. Adım adım integrasyon ile çözüm yaparken zaman artırımının seçimi önem arz etmektedir. ANSYS ile çözüm yaparken uygun zaman artımı seçilemediği takdirde hatalı sonuçlar elde edilmektedir.

Bu tezde hazırlanan bilgisayar programı ile Laplace uzayında çözüm yaparken titreşim periyodunun onda biri veya beşte biri kadar aralıklarla zaman artımı seçilerek güvenilir çözümler elde edilmektedir. Sayısal uygulamalarda, kaba zaman artımı ve az sayıda Laplace parametresi kullanılarak bulunan sonuçlar ile çok küçük zaman artımı ve fazla sayıda Laplace parametresi kullanılarak bulunan sonuçların değişmediği gösterilmiştir ki bu, önerilen çözüm yönteminin etkinliğini göstermektedir. Sistem davranışını idare eden diferansiyel denklemler, bu tezde uygun integrasyon adım aralığı seçilerek TFY ile istenilen hassasiyette kesin olarak çözülmüştür. Ayrıca, bu tezde hazırlanan bilgisayar programının işlem süresi ANSYS'nin işlem süresinden çok daha kısa olmaktadır.

Viskoelastik malzeme halinde helisel çubukların dinamik davranışı belli bir süre sonra sönümlenmekte ve statik değerine yaklaşmaktadır. Statik değere ulaşma zamanı sönüm oranı ile orantılı olmaktadır. Sönüm oranı arttıkça davranış genlikleri hızlı küçülmekte ve daha kısa sürede statik değerlerine yaklaşmaktadır.

Tabakalanma şekline bağlı olarak rijitlik arttıkça titreşim periyodları ve deplasman genlikleri küçülmektedir. Dolayısıyla doğal frekanslar artmaktadır. Sabit yükselme açısı ile helisin sarıldığı silindir çapının tel çapına oranı (D/d) ve aktif sarım sayıları değiştirilerek bunların titreşim frekanslarına etkileri araştırılmıştır. Enine izotrop malzemeden yapılmış helisel çubuklarda D/d oranı ve aktif sarım sayıları arttıkça deplasman genlikleri ve titreşim periyodları artmaktadır.

Olayı idare eden kısmi diferansiyel denklemlere Laplace ve Fourier dönüşümleri uygulanarak zamandan bağımsız hale getirilmektedir. Diferansiyel denklemlerin çözümleri de basitleşmektedir. Fourier uzayında güvenilir çözümler elde edebilmek için çok fazla sayıda dönüşüm parametresi kullanmak gerekmektedir. Laplace uzayında çözümlerde ise az sayıda parametre ile daha güvenilir sonuçlar elde edilmektedir (Ek-D'ye bakınız).



KAYNAKLAR

- ABRAMOVICH, H., and LIVSHITS, A., 1994. Free Vibrations of Non-Symmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 176(5): 597-612.
- ADEY, R. A., and BREBBIA, C. A., 1973. Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problems. *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*, 99: 1119-1127.
- AKÖZ, A. Y., and KADIOĞLU, F., 1996. The Mixed Finite Element Solutions of Circular Beam on Elastic Foundation. *Computers & Structures*, 60(4): 643-651.
- AKÖZ, A. Y., and KADIOĞLU, F., 1999. The Mixed Finite Element Method for the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44: 1909-1932.
- ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342-1300, U.S.A.
- BOLEY, B. A., and WEINER, J. H., 1960. *Theory of Thermal Stresses*. John Wiley & Sons, New York.
- BRIGHAM, E. O., 1974. *The Fast Fourier Transform*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.
- CHANDRASHEKHARA, K., and BANGERA, K. M., 1992. Free Vibration of Composite Beams using a Refined Shear Flexible Beam Element. *Computers & Structures*, 43(4): 719-727.
- CHAPRA, S. C., and CANALE, R. P., 1998. *Numerical Methods for Engineers*. Third edition, McGraw-Hill.
- CHEN, A. T., and YANG, T. Y., 1985. Static and Dynamic Formulation of a Symmetrically Laminated Beam Finite Element for a Microcomputer. *Journal of Composite Materials*, 19: 459-475.
- CHEN T., 1995. The Hybrid Laplace Transform/Finite Element Method Applied to the Quasi-Static and Dynamic Analysis of Viscoelastic Timoshenko Beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38: 509-522.

- CHEN, W. H., and LIN, T. C., 1982. Dynamic Analysis of Viscoelastic Structure Using Incremental Finite Element Method. *Computers & Structures*, 4: 271-276.
- CHRISTENSEN, R. M., 1982. *Theory of Viscoelasticity*. 2nd edition, Academic Press, New York.
- ÇALIM, F. F., 1996. Eğri Eksenli Çubuk Sistemler ve Silindirik Tonoz Yapıların Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Rijitlik Matrisi Yöntemi İle Statik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- DUBNER, H., and ABATE, J., 1968. Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 15(1): 115-123.
- DURBIN, F., 1974. Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. *Computer Journal*, 17: 371-376.
- FINDLEY, W. N., LAI, J. S., and ONARAN, K., 1976. *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Material*. North-Holland, New York.
- FLUGGE, W., 1975. *Viscoelasticity*. 2nd edition, Springer, Berlin, Heidelberg.
- HAKTANIR, V., 1990. Silindirik Helisel Çubukların Statik, Dinamik ve Burkulma Davranışlarının Taşıma ve Rijitlik Matrisleri Metodu İle İncelenmesi. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- HAKTANIR, V., ve KIRAL, E., 1991. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yönteminin Düzlemsel Çubukların Statiğine Doğrudan uygulanması. *Ç. Ü. Mühendislik Mimarlık Fakülte Dergisi*, 6(2): 155-170.
- HAKTANIR, V., and KIRAL, E., 1993. Statical Analysis of Elastically and Continuously Helicoidal Structures by the Transfer Matrix Methods. *Computers & Structures*, 49(4): 663-677.
- HAKTANIR, V., 1995. The Complementary Functions Method for the Element Stiffness Matrix of Arbitrary Spatial Bars of Helicoidal Axes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38: 1031-1056.

- ILYASOV, M. H., and AKÖZ, A. Y., 2000. The Vibration and Dynamic Stability of Viscoelastic Plates. *International Journal of Engineering Sciences*, 38: 695-714.
- İNAN, M., 1966. *Elastik Çubukların Genel Teorisi*. Berksoy Matbaası, İstanbul, 179s.
- İNAN, M., 1981. *Cisimlerin Mukavemeti*. Birsen Yayınevi, İstanbul, 560s.
- İNCE, N., 2000. *Düzlemsel Eğri Eksenli ve Değişken Kesitli Kompozit Çubukların Düzlem İçi ve Düzleme Dik Serbest Titreşiminin Sayısal Analizi*. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- JIANG, W., JONES, W. K., WANG, T. L., and WU, K. H., 1991a. Free Vibration of Helical Springs. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME*, 58: 222-228.
- JIANG, W., WANG, T. L., and JONES, W. K., 1991b. Study of Coupled Free Vibration of Helical Springs. *AIAA Journal*, 30(5): 1443-1447.
- JONES, R. M., 1975. *Mechanics of Composite Materials*. Scripta Book Company, Washington D.C., 355s.
- KADIOĞLU, F., and AKÖZ, A. Y., 1999. The Mixed Finite Element Method for the Dynamic Analysis of Viscoelastic Circular Beams. *Fourth International Conference on Vibration Problems, Calcutta-India, November 27-30*, pp. 40-52.
- KADIOĞLU, F., 1999. *Viskoelastik Çubukların Kuazi-Statik ve Dinamik Analizi*. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- KIM, T. W., and KIM, J. H., 2001. Parametric Instability of a Cross-Ply Laminated Beam with Viscoelastic Properties under a Periodic Force. *Composite Structures*, 51: 205-209.
- KIRAL, E., and ERTEPINAR, A., 1974a. Studies on Elastic Rods Subject to Diverse External Agencies- Part I- Derivation of Governing Equations. *METU Journal of Pure and Applied Sciences*, 7(1): 23-40.
- KIRAL, E., and ERTEPINAR, A., 1974b. Studies on Elastic Rods Subject to Diverse External Agencies- Part II- Planar Rods on An Elastic Foundation. *METU Journal of Pure and Applied Sciences*, 7(1): 41-53.

- KIRAL, E., and ERTEPINAR, A., 1974c. Studies on Elastic Rods Subject to Diverse External Agencies- Part III- Vibrational Analysis of Space Rods. METU Journal of Pure and Applied Sciences, 7(1): 55-69.
- KIRAL, E., ve URAL, S., 1975. Taşıma Matrisi ve Laplace Dönüşümü Metotları İle Helisel Elastik Çubukların Dinamik Hesabı. İnşaat Müh. Odası, Teknik Bülten, 23(6): 3-18.
- KIRAL, E., TOKDEMİR, T., and URAL, S., 1976. Transient Response of an Elastic or/and Viscoelastic Curved Rod under Arbitrary Time Dependent Loading. METU Journal of Pure and Applied Sciences, 9: 63-86.
- KRISHNASWAMY, S., CHANDRASHEKHARA, K., and WU, W. Z. B., 1992. Analytical Solutions to Vibration of Generally Layered Composite Beams. Journal of Sound and Vibration, 159(1): 85-99.
- KRYLOV, V. I., and SKOBLYA, N. S., 1969. Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transforms. IPST, Weiner Bindery Ltd., Jerusalem.
- LEE, J., and THOMPSON, D. J., 2001. Dynamic Stiffness Formulation, Free Vibration and Wave Motion of Helical Springs. Journal of Sound and Vibration 239(2): 297-320.
- LIN, Y., and PISANO, A. P., 1987. General Dynamic Equations of Helical Springs with Static Solution and Experimental Verification. Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME, 54: 910-916.
- LIN, Y., and PISANO, A. P., 1988. The Differential Geometry of the General Helix as Applied to Mechanical Spring. Journal of Applied Mechanics, 55: 831-835.
- MASSOUD, M. F., 1965. Vectorial Derivation of the Equations for Small Vibrations of Twisted Curved Beams. Journal of Applied Mechanics, 439-440.
- MENGİ, Y., 1989-1995. Numerical Methods in Engineering Ders Notları.
- MOTTERSHEAD, J. E., 1980. Finite Elements for Dynamical Analysis of Helical Rods. International Journal of Mechanical Sciences, 22: 267-283.
- NABI, S. M., and GANESAN, N., 1994. A Generalized Element for the Free Vibration Analysis of Composite Beams. Computers & Structures, 51(5): 607-610.

- NAGAYA, K., TAKEDA, S., and NAKATA, Y., 1986. Free Vibrations of Coil Springs of Arbitrary Shape. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23: 1081-1099.
- NARAYANAN, G. V., 1979. Numerical Operational Methods in Structural Dynamics. Ph.D. thesis, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.
- ONARAN, K., 1995. Malzeme Bilimi. Beşinci Basım, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul.
- PARK, S. W., 2001. Analytical Modeling of Viscoelastic Dampers for Structural and Vibration Control. *International Journal of Solids and Structures*, 38: 8065-8092.
- PARK, S. W., and SCHAPERY, R. A., 1999. Methods of Interconversion between Linear Viscoelastic Material Function. Part I-A Numerical Method Based on Prony Series. *International Journal of Solids and Structures*, 36: 1653-1675.
- PEARSON, D., 1982. The Transfer Matrix Methods for the Vibration of Compressed Helical Springs. *Journal of Mechanical Sciences*, 24: 163-171.
- PEARSON, D., and WITTRICK, W. H., 1986. An Exact Solution for the Vibration of Helical Spring Using a Bernoulli-Euler Model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 28: 83-96.
- QATU, M. S., 1992. In-Plane Vibration of Slightly Curved Laminated Composite Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 159(2): 327-338.
- QATU, M. S., and ELSHARKAWY, A. A., 1993. Vibration of Laminated Composite Arches with Deep Curvature and Arbitrary Boundaries. *Computers & Structures*, 47(2): 305-311.
- RAO, S. R., and GANESAN, N., 1997. Dynamic Response of Non-Uniform Composite Beams. *Journal of Sound and Vibration*, 200(5): 563-577.
- SCHAPERY, R. A., and PARK, S. W., 1999. Methods of Interconversion between Linear Viscoelastic Material Function. Part II- An Approximate Analytical Method. *International Journal of Solids and Structures*, 36: 1677-1699.
- SOKOLNIKOFF, I. S., 1956. *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Z. Gasim.

- SOKOLNIKOFF, I. S., and REDHEFFER, R. M., 1958. *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, Tokyo: McGraw-Hill.
- TABARROK, B., SINCLAIR, A. N., FARSHAD, M., and YI, H., 1988. On the Dynamics of Spatially Curved and Twisted Rods-A Finite Element Formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 123(2): 315-326.
- TEMEL, B., 1996. *Dinamik Zemin-Yapı Etkileşimi Problemlerinin Sonlu-Sonsuz Elemanlar ve Laplace Dönüşüm Yöntemi İle Analizi*. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana.
- TEMEL, B., ÇALIM, F. F., 2003. Forced Vibration of Cylindrical Helical Rods Subjected to Impulsive Loads. *Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME*, 70(2): 281-291.
- TEMEL, B., ÇALIM, F. F., and TÜTÜNCÜ, N., 2003a. Quasi-Static and Dynamic Response of Viscoelastic Helical Rods. *Journal of Sound and Vibration* (Baskıda).
- TEMEL, B., ÇALIM, F. F., ve BARAN, T., 2003b. Değişken Kesitli, Viskoelastik Doğru Eksenli Düzlemsel Çubukların Dinamik Dış Yük ve Yer Hareketi Altında Davranışı. *Ç. Ü. Mühendislik Mimarlık Fakülte Dergisi*, 18(2): (Baskıda).
- WHITE, J. L., 1986. Finite Element in Linear Viscoelasticity. *Proceeding 2nd Conference On Matrix Method in Structural Mechanics AFFDL-TR-68-150*, 489-516.
- WITTRICK, W. H., 1966. On Elastic Wave Propagation in Helical Spring. *International Journal of Mechanical Sciences*, 8: 25-47.
- YAMADA, Y., TAKABATAKE, H., and SATO, T., 1974. Effect of Time-Dependent Material Properties on Dynamic Response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8: 403-414.
- YILDIRIM, V., 1996. Investigation of Parameters Affecting Free Vibration Frequency of Helical Spring. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39: 99-114.

- YILDIRIM, V., 1999a. An Efficient Numerical Method for Predicting the Natural Frequencies of Cylindrical Helical Springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41: 919-939.
- YILDIRIM, V., 1999b. Governing Equations of Initially Twisted Elastic Space Rods Made of Laminated Composite Materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 37: 1007-1035.
- YILDIRIM, V., 1999c. A Numerical Study on the Free Vibration of Symmetric Cross-Ply Laminated Cylindrical Helical Springs. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 66: 1040-1043.
- YILDIRIM, V., 2001. Free Vibration of Uniaxial Composite Cylindrical Helical Springs with Circular Section. *Journal of Sound and Vibration*, 239(2): 321-333.
- YILDIRIM, V., SANCAKTAR, E., and KIRAL, E., 1999a. Free Vibration Analysis of Symmetric Cross-Ply Laminated Composite Beams with the Help of the Transfer Matrix Approach. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15: 651-660.
- YILDIRIM, V., SANCAKTAR, E., and KIRAL, E., 1999b. Comparison of the In-Plane Natural Frequencies of Symmetric Cross-Ply Laminated Beams Based on the Bernoulli-Euler and Timoshenko Beam Theories. *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 66: 410-417.
- YILDIRIM, V., SANCAKTAR, E., and KIRAL, E., 1999c. The Effect of the Longitudinal to Transverse Moduli Ratio on the Natural Frequencies of Symmetric Cross-Ply Laminated Cylindrical Helical Springs. *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, 121: 634-639.
- YILDIRIM, V., and SANCAKTAR, E., 2000. Linear Free Vibration Analysis of Cross-Ply Laminated Cylindrical Helical Springs. *International Journal of Mechanical Sciences*, 42: 1153-1169.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Antakya'da doğdu. İlk öğrenimini Antakya'da, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladı. 1989 yılında Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve Haziran-1993 tarihinde İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu. Eylül-1993 tarihinde Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Mekanik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Nisan-1994 tarihinde Mustafa Kemal Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Ağustos-1996 tarihinde Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Nisan 1997-Kasım 1997 tarihleri arasında askerlik hizmetini yaptı. Şubat-1998 tarihinde Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Mekanik Anabilim Dalında Doktora öğrenimine başladı.

Evli ve iki çocuk babasıdır.

EK A

BEŞİNCİ MERTEBE RUNGE-KUTTA ALGORİTMASI

Bu tezde, diferansiyel denklemlerin çözümü için önerilen Butcher'ın beşinci mertebe Runge-Kutta (RK5) yöntemi (Chapra ve Canale, 1998) burada özetlenmiştir.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \quad (\text{A.1})$$

Burada

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right) \\ k_5 &= f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right) \\ k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

EK B

SAYISAL LAPLACE VE TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

B.1. Direk Laplace Dönüşümü

Sistem davranışını idare eden diferansiyel denklemlerdeki zamana bağlı türevlerden kurtulmak için Laplace dönüşümünden faydalanılacaktır.

Zamana bağlı bir $f(t)$ fonksiyonunun sürekli Laplace dönüşümü, $t > 0$ için, $L[f(t)] = \bar{F}(z)$ ise,

$$\bar{F}(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt \quad (B.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada z , Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. Zamana göre birinci ve ikinci mertebeden türevlerin Laplace dönüşümleri kapalı olarak

$$\begin{aligned} L[\dot{f}(t)] &= z \bar{F}(z) - f(0) \\ L[\ddot{f}(t)] &= z^2 \bar{F}(z) - z f(0) - \dot{f}(0) \end{aligned} \quad (B.2)$$

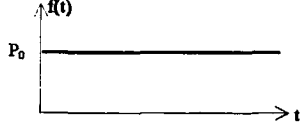
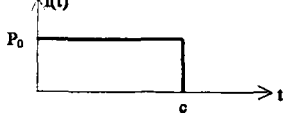
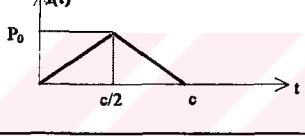
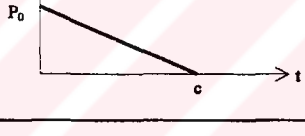
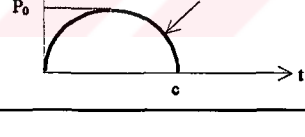
şeklinde yapılmaktadır. Bu ifadelerdeki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anındaki başlangıç şartlarını göstermektedir.

Dinamik problemlerin dönüşmüş uzayda çözümleri için, önce zamana bağlı yük fonksiyonlarının Laplace dönüşümü yapılmalıdır. Bunun için:

- Analitik ifadeleri verilen bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri, kapalı olarak yapılabilmektedir. Kapalı Laplace dönüşümleri Çizelge B.1’de verilmektedir.
- Bazı $f(t)$ yük fonksiyonlarının analitik ifadeleri karmaşık olup, Laplace dönüşümleri tablolardan bulunamamaktadır. Bu durumda, fonksiyonun sayısal değerleri ayrıık olarak hesaplanarak, dönüşümleri FFT’ye dayalı direk Laplace yöntemi ile yapılabilmektedir.
- Deprem kayıtları veya deneysel olarak ölçülmüş çıktıların, ancak belli zaman aralıklarındaki sayısal değerleri bilinmektedir. Bu durumlarda, yük fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri, ya sayısal direk Laplace dönüşüm

yöntemleri ile ya da fonksiyonun iki zaman aralığı arasında lineer değiştiği kabulü ile analitik olarak yapılabilmektedir.

Çizelge B.1. Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Laplace dönüşümleri

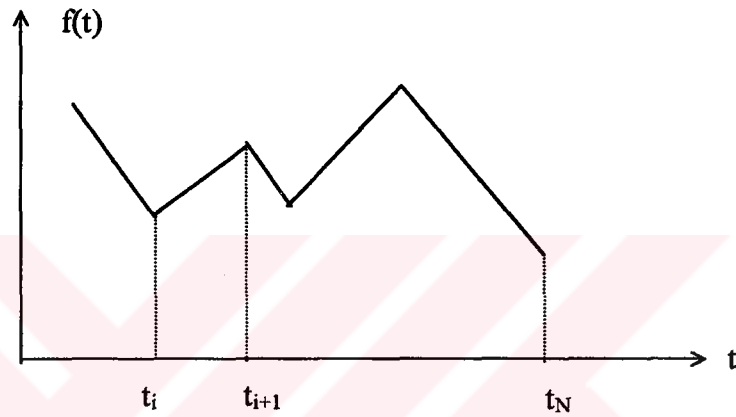
Tip No	Yük Tipleri	Zamanla Değişim $f(t)$	Laplace Dönüşüm $\bar{F}(z)$
1	Adım Tipi		$\frac{P_0}{z}$
2	İmpulsif Dikdörtgen		$\frac{P_0(1 - e^{-cz})}{z}$
3	İmpulsif Üçgen		$P_0 \left[\frac{1 - e^{-\frac{cz}{2}}}{z} \right]^2 \frac{2}{c}$
4	İmpulsif Dik Üçgen		$P_0 \left[\frac{1}{z} - \frac{1 - e^{-cz}}{cz^2} \right]$
5	İmpulsif Sinüs		$P_0 \frac{\pi c (1 + e^{-cz})}{c^2 z^2 + \pi^2}$
6	Periyodik Dikdörtgen	$2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k U(t - 2k)$	$\frac{2}{z(1 + e^{-2z})}$
7	Heaviside Birim Fonksiyonu	$U(t - 25)$	$\frac{e^{-25z}}{z}$
8	Artan Sinüs	$\frac{t}{2} \sin t$	$\frac{z}{(z^2 + 1)^2}$

B.1.1. Analitik Laplace Dönüşümü

İki zaman aralığında doğrusal değiştiği kabul edilen, $f(t)$ fonksiyonunun (Şekil B.1), Laplace dönüşümü,

$$\bar{F}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) e^{-zt} dt \quad (\text{B.3})$$

şeklinde olmaktadır.



Şekil B.1. Yük fonksiyonunun zamana göre değişimi

t_i ve t_{i+1} zaman aralığında $f(t)$ fonksiyonunun değişimi,

$$f(t) = f(t_i) + \frac{\Delta f}{\Delta t} (t - t_i) \quad (\text{B.4})$$

olup, burada

$$\Delta f = f(t_{i+1}) - f(t_i) \quad ; \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (\text{B.5})$$

şeklinde ifade edilmektedir. (B.4) ve (B.5) eşitlikleri yardımıyla, (B.3) ifadesindeki integral,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) e^{-zt} dt = f(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-zt} dt + \frac{\Delta f}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) e^{-zt} dt \quad (\text{B.6})$$

olmaktadır. Bu integral, (B.3) ifadesinde yerine konulursa, yalnız bir z parametresi için direk dönüşüm,

$$\bar{F}(z) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{z^2 \Delta t} \left[z \Delta t \left\{ f(t_i) e^{-z t_i} - f(t_{i+1}) e^{-z t_{i+1}} \right\} + \Delta f \left\{ e^{-z t_i} - e^{-z t_{i+1}} \right\} \right] \quad (B.7)$$

şeklinde kapalı olarak hesaplanmaktadır. Bu direk dönüşüm, çeşitli z Laplace parametreleri için tekrarlanacaktır.

B.1.2. FFT'ye Dayalı Sayısal Laplace Dönüşümü

Zaman uzayında, $f(t)$ fonksiyonu,

$f(t)=f(t)$, $0 \leq t \leq T$ aralığı için

$f(t)=0$, $t < 0$ ve $t > T$ aralığı için

ve bunun Laplace dönüşümü $\bar{F}(z)$,

$$\bar{F}(z) = \int_0^T f(t) e^{-z t} dt \quad (B.8)$$

şeklinde dir. $t = t_n = n \Delta t$ noktalarındaki $f(t)$ nin ayrıncı değerleri için,

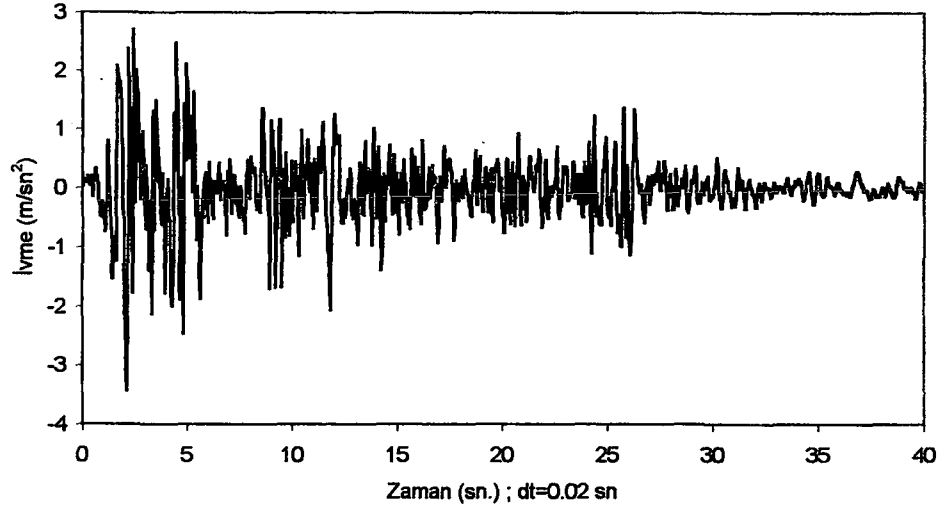
$$\bar{F}(z_k) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left[f(t_n) e^{-a t_n} \right] e^{-i \frac{2\pi n k}{N}} \quad (B.9)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada, $z_k = a + i \frac{2\pi k}{T}$ k nıncı Laplace dönüşüm

parametresi ve $\Delta t = \frac{T}{N}$ dir. (B.9) ifadesi FFT algoritması (Brigham, 1974) (EK

C.16'ya bakınız) yardımıyla hesaplanabilmektedir.

Analitik ve FFT'ye dayalı Laplace dönüşümlerini kıyaslamak için El-Centro deprem ivme kayıtları ele alınmıştır. (B.7) ve (B.9) ifadeleri yardımıyla, $a=0.15$ ve $T=40.96$ sn alınarak hesaplanan Laplace dönüşümleri Çizelge B.2'de gösterilmektedir. (B.7) ifadesi ile bulunan kesin sonuçlar ile (B.9) ifadesi yardımıyla bulunan FFT'ye dayalı Laplace dönüşüm sonuçlarının çok yakın olduğu görülmektedir. Analitik Laplace dönüşümü için çok fazla bilgisayar zamanı almasından dolayı FFT algoritmasının kullanılması önerilmektedir.



Şekil B.2. El-Centro 1940 depremine ait ivmenin K-G bileşeni

Çizelge B.2. El-Centro 1940 depremi ivmesinin K-G bileşenin Laplace dönüşümü

K	REEL KISIM		SANAL KISIM	
	KESİN (B.7)	FFT ile (B.9)	KESİN (B.7)	FFT ile (B.9)
1	-4.303144	-4.287670	0.000000	0.000000
5	0.312501	0.327028	4.217680	4.217531
10	-2.735737	-2.721142	12.019241	12.020045
15	38.102791	38.123826	38.369133	38.374017
20	9.271617	9.287093	-45.659397	-45.672384
25	31.381315	31.410220	10.205444	10.209520
30	-10.435297	-10.427390	3.779123	3.782307
35	9.148747	9.167934	-66.216705	-66.276346
40	-59.607410	-59.662696	25.761581	25.796236
45	24.980831	25.038158	77.610642	77.728069
50	36.295811	36.374070	-71.460632	-71.597743
55	-14.605548	-14.625770	-7.005114	-7.019088
60	-91.273529	-91.509028	-10.143133	-10.161105
65	29.907492	30.024245	65.409035	65.616935
70	49.280815	49.482740	20.637709	20.711119
75	27.786636	27.911369	-86.592743	-86.968217
80	-71.504059	-71.842269	-14.136853	-14.196191
85	-48.286270	-48.540078	-3.546331	-3.559119
90	13.464437	13.574518	86.762856	87.303446
95	30.374123	30.594791	-36.284058	-36.539751
100	19.713949	19.877778	-15.944781	-16.069645
150	30.926485	31.475970	-38.028030	-38.701735
200	22.801050	23.547089	31.071970	32.051067

B.2. Sayısal Ters Laplace Dönüşüm Yöntemleri

Sürekli ters Laplace dönüşümü

$$L^{-1}[\bar{F}(z)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{F}(z) e^{zt} dz \quad (B.10)$$

şeklinde tarif edilmektedir. Burada a , $\bar{F}(z)$ 'nin tüm reel kısımlarında tekiliği ortadan kaldıran sıfırdan büyük keyfi bir sabittir. Fiziksel problemlerin analizinde, Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayındaki çözümlere geçmek için iyi bir sayısal ayrık ters dönüşüm yöntemine ihtiyaç duyulmaktadır.

B.2.1. 'Maximum Degree of Precision (MDOP)' Yöntemi

Gauss sayısal integrasyon formuna benzeyen bu yöntemde ters dönüşüm,

$$f(t) \cong \frac{1}{t} \sum_{k=1}^N w_k z_k^m \bar{F}\left(\frac{z_k}{t}\right) \quad (B.11)$$

formülü ile hesaplanmaktadır. Burada w_k ve z_k sırasıyla ağırlık ve Laplace dönüşüm parametresinin aldığı değerlerdir. Seçilen m parametresi ve N terim sayısı için ağırlık ve apsis değerleri (Krylov ve Skoblya, 1969) verilmektedir.

B.2.2. Durbin'in Modifiye Edilmiş Ters Laplace Dönüşüm Yöntemi

Bu yöntem, sonlu Fourier-Kosinüs dönüşümüne dayalı Dubner ve Abate metodunun geliştirilmiş halidir (Dubner ve Abate, 1968). Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi (Durbin, 1974) aşağıda özetlenmiştir.

$$f(t_j) \cong \frac{2e^{aj\Delta t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\bar{F}(a)\} + \operatorname{Re}\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (A(k) + iB(k)) e^{\left(i\frac{2\pi}{N}\right)jk} \right\} \right] \quad (B.12)$$

$$A(k) = \sum_{I=0}^L \operatorname{Re}\left\{ \bar{F}\left(a + i(k + IN)\frac{2\pi}{T}\right) \right\} \quad (B.12a)$$

$$B(k) = \sum_{I=0}^L \text{Im} \left\{ \overline{F} \left(a + i(k + IN) \frac{2\pi}{T} \right) \right\} \quad (\text{B.12b})$$

Burada i kompleks sayı olup, $z_k = a + i \frac{2\pi k}{T}$ k nıncı Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. T , çözüm aralığı olmak üzere, N adet eşit zaman aralığı, $t_j = j\Delta t = jT/N$, ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) için $f(t)$ hesaplanmaktadır. İlgili kaynakta, $5 \leq aT \leq 10$ aralığı için iyi sonuçlar elde edildiği belirtilmektedir. Bu tezde çözülen sayısal örneklerde “ aT ” genellikle 6 seçilmiştir. (B.12) eşitliğinde görülen,

$$\sum_{k=0}^{N-1} [A(k) + iB(k)] e^{\left(i \frac{2\pi}{N}\right)jk} \quad (\text{B.13})$$

toplam ifadesi, FFT alt programı (Brigham, 1974) yardımıyla hesaplanmaktadır. (B.12) ifadesi (Narayanan, 1979)’ın önerdiği şekilde aşağıdaki gibi modifiye edilmektedir.

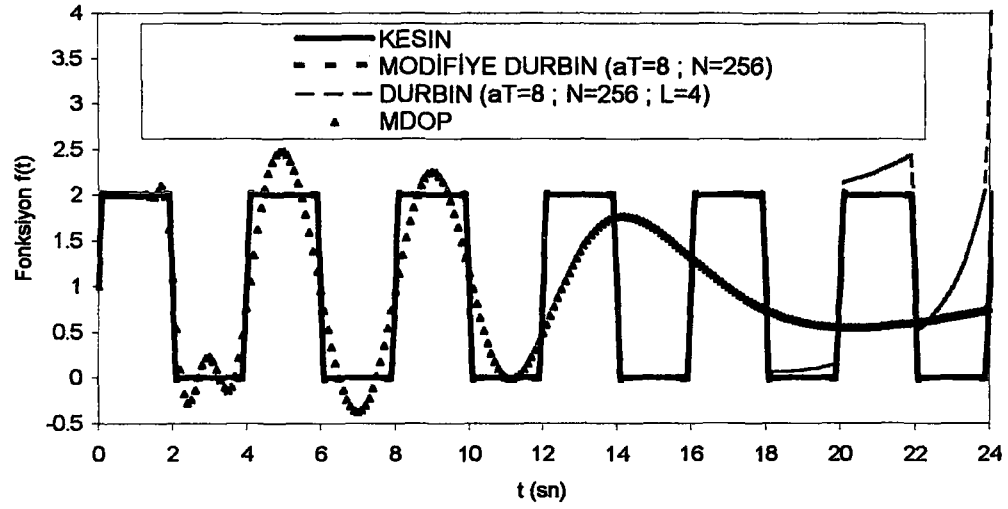
$$f(t_j) \cong \frac{2e^{aj\Delta t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \text{Re} \{ \overline{F}(a) \} + \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \{ \overline{F}(z_k) L_k \} e^{\left(i \frac{2\pi}{N}\right)jk} \right\} \right] \quad (\text{B.14})$$

Laplace uzayında hesaplanan ayrık değerlerin herbir terimi Lanczos (L_k) faktörü ile çarpılarak modifiye edilmektedir. Bu faktör,

$$L_k \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \text{ için, } L_0 = 1 \\ k > 0 \text{ için, } L_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{\frac{k\pi}{N}} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

alınmaktadır.

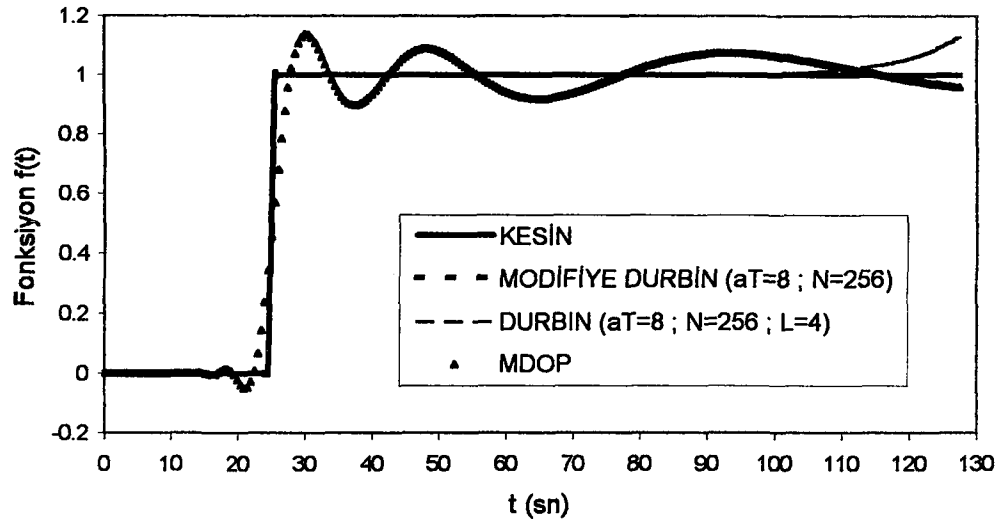
Bu kısımda, kapalı Laplace dönüşümleri bilinen, Çizelge B.1’de verilen bazı fonksiyonların ‘Maximum Degree of Precision’ (B.11), Durbin (B.12) ve modifiye edilmiş Durbin (B.14) yöntemleri kullanılarak ters dönüşümleri alınmıştır. Bu yöntemler içinde, modifiye edilmiş Durbin’in ters dönüşüm yöntemi ile elde edilen sonuçların kesin değerlerle örtüştüğü görülmektedir. Hazırlanan bilgisayar programlarında, Durbin’in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi kullanılmıştır.



Şekil B.3. Tip No: 6 olan fonksiyonun zamanla değişimi

Çizelge B.3. Tip No: 6 olan fonksiyon ile ilgili karşılaştırma

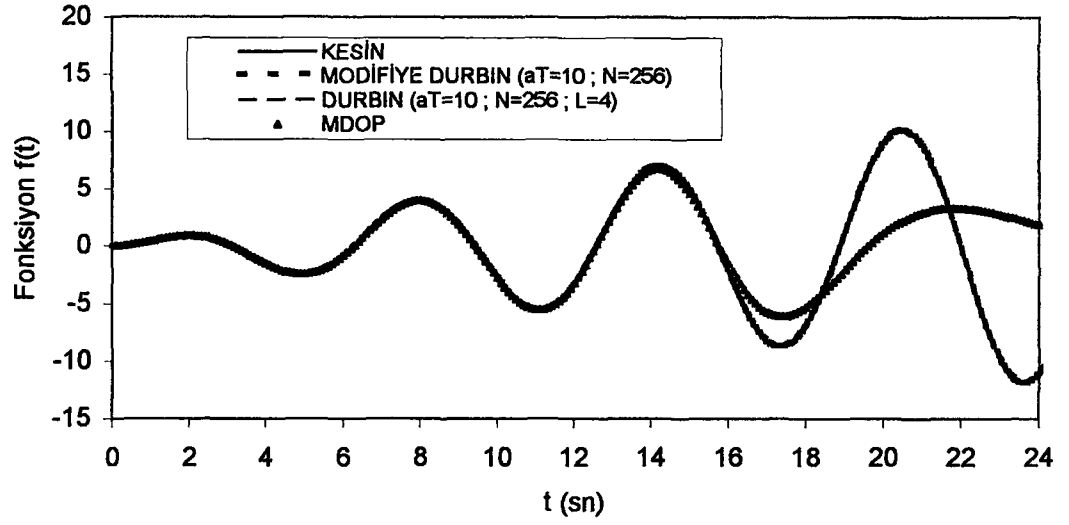
	KESİN	Modifiye Durbin aT=8 ; N=256	Durbin aT=8 ; N=256 ; L=4	MDOP N=10
0	1	0.993080	0.999340	-
1	2	2.000100	1.995000	2.000950
2	1	1.007700	0.999020	1.087468
3	0	0.000651	0.003654	0.231994
4	1	0.993080	0.999620	0.751904
5	2	2.000100	1.994900	2.477701
6	1	1.007700	0.998820	0.950478
7	0	0.000651	0.003368	-0.377880
8	1	0.993080	0.999320	0.943802
9	2	2.000100	1.994700	2.252096
10	1	1.007700	0.998820	1.145188
11	0	0.000650	0.003796	0.004575
12	1	0.993080	1.000500	0.482945
13	2	2.000100	1.997300	1.379140
14	1	1.007700	1.003800	1.759756
15	0	0.000649	0.012673	1.643526
16	1	0.993070	1.015900	1.317928
17	2	2.000100	2.023600	0.989672
18	1	1.007700	1.048500	0.747406
19	0	0.000583	0.088995	0.606955
20	1	0.993050	1.148100	0.552361
21	2	2.000100	2.259000	0.559085
22	1	1.007500	1.488300	0.604293
23	0	-0.000144	0.985970	0.670192
24	1	0.988450	3.337400	0.744271
25	2	1.879100	11.428000	0.818404



Şekil B.4. Tip No: 7 olan fonksiyonun zamanla değişimi

Çizelge B.4. Tip No: 7 olan fonksiyon ile ilgili karşılaştırma

t	KESİN	Modifiye Durbin	Durbin	MDOP
		aT=8 ; N=256	aT=8 ; N=256 ; L=4	N=10
0	0	0.000336	0.000382	-
5	0	0.000336	0.000419	0.000000
10	0	0.000336	0.000493	0.000020
15	0	0.000335	0.000668	-0.000470
20	0	0.000332	0.001257	-0.022839
25	0.5	0.496540	0.499930	0.455588
30	1	1.000400	0.998610	1.138732
35	1	1.000400	0.999180	0.941509
40	1	1.000400	0.999310	0.933696
45	1	1.000400	0.999320	1.062022
50	1	1.000400	0.999280	1.081433
55	1	1.000400	0.999220	1.010917
60	1	1.000400	0.999140	0.941669
65	1	1.000400	0.999070	0.918229
70	1	1.000400	0.999030	0.937879
75	1	1.000400	0.999070	0.979397
80	1	1.000400	0.999240	1.022550
85	1	1.000400	0.999680	1.054965
90	1	1.000400	1.000500	1.071977
100	1	1.000400	1.005000	1.074121
110	1	1.000400	1.018200	1.047390
120	1	1.000300	1.056300	1.004453
125	1	1.000400	1.098400	0.983996



Şekil B.5. Tip No: 8 olan fonksiyonun zamanla değişimi

Çizelge B.5. Tip No: 8 olan fonksiyon ile ilgili karşılaştırma

t	KESİN	Modifiye Durbin aT=10 ; N=256	Durbin aT=10 ; N=256 ; L=4	MDOP N=10
0	0	0.000467	0.000262	-
1	0.420735	0.421190	0.421340	0.420735
2	0.909297	0.909180	0.909690	0.909295
3	0.21168	0.211450	0.211470	0.211675
4	-1.513605	-1.513400	-1.514300	-1.513613
5	-2.397311	-2.396900	-2.397800	-2.397323
6	-0.838246	-0.838310	-0.838110	-0.838262
7	2.299453	2.298700	2.300100	2.299435
8	3.957433	3.956600	3.958100	3.957393
9	1.854533	1.854700	1.854500	1.854346
10	-2.720106	-2.718700	-2.720800	-2.720029
11	-5.499946	-5.498600	-5.500700	-5.494226
12	-3.219438	-3.219600	-3.219500	-3.201118
13	2.731086	2.729200	2.731800	2.702843
14	6.934251	6.932200	6.935100	6.681122
15	4.877159	4.877100	4.877400	4.559303
16	-2.303227	-2.300900	-2.303900	-1.549311
17	-8.171879	-8.169100	-8.172800	-5.733724
18	-6.758885	-6.758400	-6.759300	-5.251142
19	1.423833	1.421200	1.424400	-2.009770
20	9.129453	9.126000	9.130500	1.164122
21	8.784884	8.783900	8.785400	2.934329
22	-0.097364	-0.094540	-0.097768	3.301943
23	-9.731535	-9.727100	-9.732500	2.776147
24	-10.86694	-10.865000	-10.868000	1.863293
25	-1.654397	-1.657000	-1.654800	0.904465

EK C

SAYISAL FOURIER ve TERS FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

C.1. Fourier Dönüşümü Hakkında Özet Bilgiler

$f(t)$ zamana bağlı bir fonksiyon olmak üzere, fonksiyonun sürekli Fourier ve ters Fourier dönüşüm formülleri

$$F^F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (C.1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (C.2)$$

şeklinde verilmektedir (Brigham, 1974). Burada açısal frekans ω , normal frekans f 'ye (devir/birim zaman) $\omega = 2\pi f$ formülü ile bağlıdır. $F^F(\omega)$ zamana bağlı $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olup kompleks değerlidir.

C.2. Fourier Dönüşümünün Bazı Özellikleri

$f(t)$ fonksiyonu, $t \geq 0$ için tanımlanmış reel değerli fonksiyondur. Fourier dönüşümü $F^F(\omega)$, kompleks değerli bir fonksiyon olup $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlanmıştır. $F^F(\omega)$ 'nın $(-\omega)$ ve (ω) 'daki değerleri birbirinin kompleks eşleniğidir.

$$F^F(-\omega) = \overline{F^F(\omega)} \quad (C.3)$$

Burada, üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir. (C.1) ifadesi yardımıyla fonksiyonun Fourier dönüşümü aşağıdaki şekilde düzenlenmektedir.

$$F^F(\omega) = F[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt + i \int_0^{\infty} -f(t) \sin \omega t dt \quad (C.4)$$

Fourier uzayındaki fonksiyon reel ve imajiner kısımlardan meydana gelmektedir.

$$F^F(\omega) = F_R^F + i F_I^F \quad (C.5)$$

Fourier dönüşüm uzayındaki fonksiyonun reel kısmı simetrik, imajiner kısmı ise antisimetrik özelliğe sahiptir.

Fonksiyonun zamana göre türevinin Fourier dönüşümü

$$(\dot{f}(t))^F = F[\dot{f}(t)] = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (C.6)$$

şeklindedir. (C.6) ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$(\dot{f}(t))^F = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_0^{\infty} + i\omega \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{t=\infty} - f(0) \times 1 + i\omega F^F(\omega) \quad (C.7)$$

elde edilir. Fourier dönüşümünde hem davranış hem de yük fonksiyonunun sıfıra gittiği kabul edilmektedir. Buna fonksiyonun yayılma şartı (Radiation condition) denilmektedir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \rightarrow 0 \quad (C.8)$$

Yayılma şartı kabulü ile fonksiyonun birinci türevinin Fourier dönüşümü

$$(\dot{f}(t))^F = i\omega F^F(\omega) - f(0) \quad (C.9)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde fonksiyonun ikinci türevinin Fourier dönüşümü

$$(\ddot{f}(t))^F = -\omega^2 F^F(\omega) - i\omega f(0) - \dot{f}(0) \quad (C.10)$$

şeklindedir. (C.9) ve (C.10) eşitliklerindeki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anındaki başlangıç şartlarıdır. Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Fourier dönüşümleri Çizelge C.1'de gösterilmektedir.

Çizelge C.1. Zamana bağlı bazı fonksiyonların kapalı Fourier dönüşümleri

Tip No	Zamanla değişim	Fourier Dönüşümü
1	$e^{-bt} \sin(at) \quad b>0$	$\frac{a}{a^2 + (b + i\omega)^2}$
2	$e^{-bt} \cos(at) \quad b>0$	$\frac{b + i\omega}{a^2 + (b + i\omega)^2}$
3	$\sin(at)$	$\frac{a}{a^2 - \omega^2}$
4	$\cos(at)$	$\frac{i\omega}{a^2 - \omega^2}$

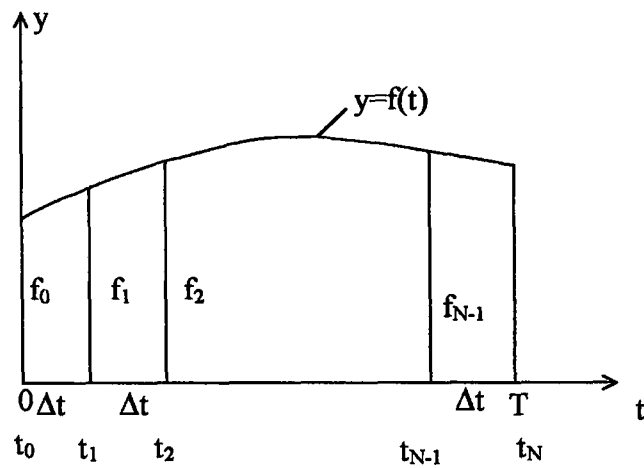
C.3. Ayrık Fourier Dönüşümü

$f(t)$ fonksiyonunun sürekli olarak tanımlanmadığını ve $[0, T]$ aralığında Δt aralıkları ile ayrık olarak

$$f_i = f(t_i) \quad (i = 0, 1, \dots, N-1) \quad (C.11)$$

şeklinde verildiği kabul edilsin. Burada

$$t_i = i \Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{N} \quad (C.12)$$



Şekil C.1. $f(t)$ fonksiyonunun ayrık tanımı

Ayrık Fourier dönüşüm formülleri ayrık şekilde verilen $f(t)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesap etmek için kullanılacaktır.

C.4. Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemi

Ayrık Fourier dönüşümünün önemi iki noktada toplanabilir.

- a) Cisimlerin, yapıların, akışkanların dinamik davranışını incelemeye yönelik deneylerde ivme, hız gibi bazı büyüklüklerin zamana göre değişimleri küçük zaman aralıkları (Δt) ile belli bir zaman aralığı $[0, T]$ 'de ayrık olarak ölçülür. Elde edilmiş olan deneysel datanın değerlendirilmesi için çoğu kez, özellikle deprem ve titreşim analizlerinde, büyüklüklerin ayrık olarak ölçülmüş ve zamana göre değişimlerinin Fourier dönüşümlerinin bulunması arzu edilir. Böyle bir amaca ayrık Fourier dönüşüm formüllerini kullanarak ulaşmak mümkündür.
- b) Ayrık Fourier dönüşümü cisimlerin, yapıların dinamik davranışının analitik olarak bulunmasında da kullanılabilir. Cisim ve yapıların dinamik davranışı adi veya kısmi diferansiyel denklemleri tarafından idare edilir. Bu denklemler zaman uzayında sayısal olarak ya integrasyon formülleri veya ayrık Fourier dönüşümü yardımı ile entegre edilebilir. Ayrık Fourier dönüşümünün kullanılmasının integrasyon formüllerinin kullanılmasına göre en önemli avantajı şudur. Ayrık Fourier dönüşümünün kullanılması halinde cismin veya yapının istenen bir noktasındaki dinamik davranış diğer noktadaki davranış bulunmadan belirlenebilir. Halbuki klasik integrasyon formüllerinin kullanılması halinde belli bir noktadaki dinamik davranışı bulmak için diğer noktadaki davranışı bulmaya ihtiyaç vardır, yani, cismin bütün noktalarındaki dinamik davranış aynı zamanda ve birlikte bulunur.

C.5. Kompleks Fourier Serisi

Ayrık Fourier dönüşümü formüllerini kompleks Fourier formülleri kullanarak elde edileceğinden bu konu kısaca incelenecektir.

$f(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığında tanımlanmış olsun. $f(t)$ fonksiyonunun $[0, T]$ aralığında geçerli olan Fourier serisi açılımı

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\omega_k t} \quad (C.13)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (C.14)$$

formülleri verilmektedir. Burada ω_k , k nıncı Fourier bileşeninin açısal frekansını göstermekte olup

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{2\pi}{T_k} = 2\pi f_k \quad (C.15)$$

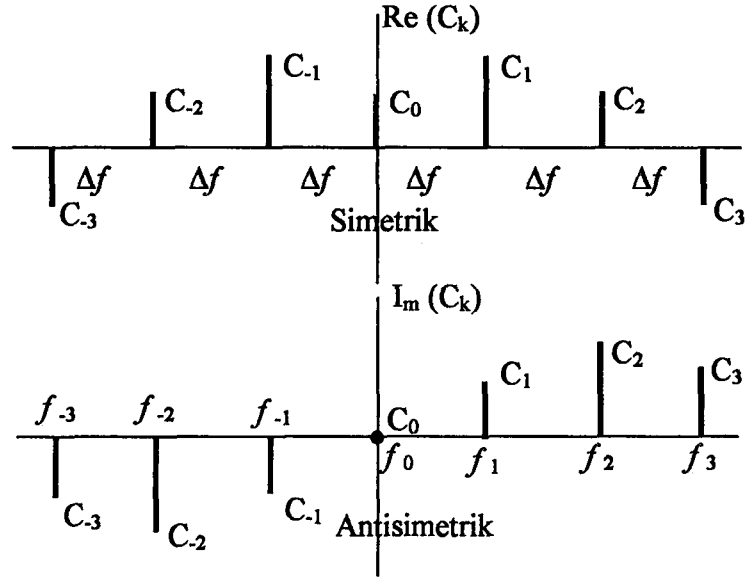
formülü ile tanımlanmaktadır. T_k ve f_k sırasıyla k nıncı Fourier bileşeninin periyodunu ve normal frekansını göstermektedir. (C.13) ve (C.15) denklemlerinden anlaşılacağı üzere, (C.13)'ün açılımı $f(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığı dışında T periyodu ile periyodik olarak devam ettiği kabulüne göre yapılmıştır. (C.14) denklemi kompleks Fourier sabitleri C_k 'lerin

$$C_{-k} = \overline{C_k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (C.16)$$

özelliğine sahip olduğunu göstermektedir. (C.16) denklemi C_0 'ın reel olacağını C_{-1} , C_{-2} , C_{-3} , nin C_1 , C_2 , C_3 , nin kompleks eşleniği olacağını göstermektedir. (C.13) denklemi $f(t)$ 'nin frekansları

$$f_k = \frac{k}{T} = k \Delta f \quad (k = \dots, -1, 0, 1, \dots) \quad (C.17)$$

ve genlikleri C_k olan sonsuz sayıda Fourier bileşenin toplamı olarak ifade edileceğini göstermektedir. f_k frekanslarının eşit aralıklı bir dağılıma sahip olduğuna dikkat edilmelidir (Şekil C.2).

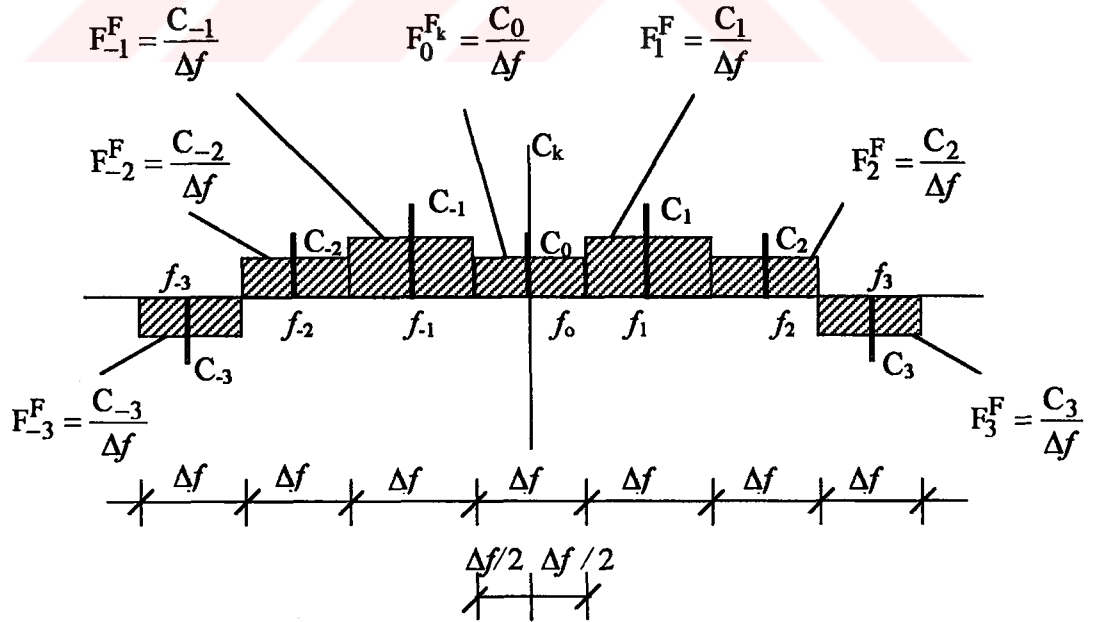


Şekil C.2. Fourier sabitleri

C_k Fourier sabitlerini Δf 'ye bölerek yayılı Fourier sabitleri F_k^F cinsinden

$$F_k^F = \frac{C_k}{\Delta f} \quad (C.18)$$

denklemini ile temsil etmek mümkündür (Şekil C.3).



Şekil C.3. Yayılı Fourier sabitleri

Fourier serisi denklemleri, yayılı Fourier sabitleri cinsinden yazılmaktadır.

$$f(t) = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{i\omega_k t}$$

$$F_k^F = \int_0^T f(t) e^{-i\omega_k t} dt \quad (C.19)$$

$$\omega_k = 2\pi f_k = 2\pi k \Delta f = 2\pi \frac{k}{T}$$

C.6. Sürekli Fourier Dönüşümü ve Kompleks Fourier Serisi Arasındaki İlişki

Sürekli Fourier dönüşümü formülleri kompleks Fourier serisi formüllerinden peryod T sonsuza giderken elde edilebilir. T sonsuza giderken ($T \rightarrow \infty$) f_k 'lar arasındaki mesafe sıfıra yaklaşır, f_k 'ların dağılımı sürekli hale dönüşür ve

$$\Delta f = \frac{1}{T} \rightarrow df$$

$$\omega_k = 2\pi f_k \rightarrow \omega = 2\pi f \quad (C.20)$$

bağıntıları elde edilir. Dolayısı ile kompleks Fourier serisi formülleri (C.19),

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (C.21)$$

$$F^F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (C.22)$$

şeklini alır. Bu formüller ise (C.1) ve (C.2) denklemleri ile verilen sürekli Fourier dönüşüm formülleri ile aynıdır.

C.7. Ayırık Fourier Dönüşüm Formülleri

Ayrık Fourier dönüşüm formüllerini kompleks Fourier serisi formüllerini (C.19), kullanarak elde edilecektir. $f(t)$ fonksiyonunun Δt aralıkları ile ayırık olarak

$$\begin{aligned} f_n &= f(t_n) \\ t_n &= n \Delta t \quad (n=0, 1, \dots, N-1) \\ \Delta t &= \frac{T}{N} \end{aligned} \quad (C.23)$$

denklemini ile verildiği kabulü yapılmaktadır. (C.19) denklemlerinin ikincisinde dikdörtgen integrasyon yöntemi kullanılırsa ve birincisini $t = t_N = n \Delta t$ için yazılırsa

$$\begin{aligned} f_n &= \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{i\omega_k t_n} \\ F_n^F &= \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i\omega_n t_k} \end{aligned} \quad (C.24)$$

formülleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \omega_n t_k &= (2\pi n \Delta f)(k \Delta t) = 2\pi n k \frac{1}{T} \frac{T}{N} = 2\pi \frac{nk}{N} \\ \omega_k t_n &= (2\pi k \Delta f)(n \Delta t) = 2\pi k n \frac{1}{T} \frac{T}{N} = 2\pi \frac{nk}{N} \end{aligned} \quad (C.25)$$

eşitlikleri gözönüne alınırsa (C.24) eşitlikleri

$$f_n = \Delta f \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (C.26a)$$

$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (C.26b)$$

şeklini alır.

C.8. Katlama Frekansı

$f(t)$ fonksiyonu Δt zaman aralıklarını kullanarak ayrık olarak elde edilmiştir ve bu ayrık fonksiyon değerlerini (C.26a) denklemi ile Fourier bileşenleri cinsinden temsil edilmiştir. Ancak Δt aralıkları ile temsil edilebilecek Fourier bileşeninin maksimum frekansı f_c

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2} \frac{1}{T} = \frac{N}{2} \Delta f \quad (C.27)$$

olarak hesaplanmaktadır. f_c 'den daha büyük frekanslı Fourier bileşenleri, f_c 'den küçük frekanslı Fourier bileşenleri üzerine katlanır. Başka bir deyişle, frekansları $-f_c \leq f_k \leq f_c$ aralığında olan Fourier bileşenleri birbirinden bağımsızdır ve frekansları bu aralık dışında olan Fourier bileşenleri, $[-f_c, f_c]$ aralığındaki Fourier bileşenleri cinsinden ifade edilebilir. f_c 'ye **katlama frekansı** denilmektedir. Bu bilgilerin ışığı altında (C.26a) denklemindeki $(-\infty, \infty)$ limitler için $(-N/2, N/2)$ kullanılabilir. Dolayısı ile (C.26) denklemleri

$$f_n = \Delta f \sum_{k=-N/2}^{N/2} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (C.28a)$$

$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (C.28b)$$

halini alır.

C.9. Ayrık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Son Şekli

(C.28b) denklemi F_n^F nin f frekansının $2f_c$ periyodlu periyodik fonksiyonu olduğunu göstermektedir. Dolayısı ile (C.28a) denkleminin limitleri $(-N/2, N/2)$, $(0, N-1)$ olarak değiştirilebilir. Dolayısı ile ayrık Fourier dönüşüm formülleri

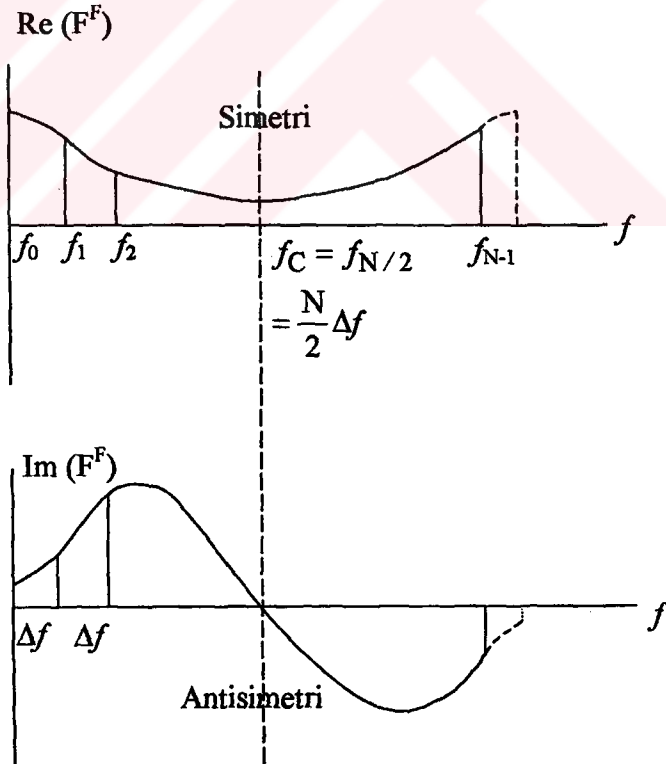
$$f_n = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} F_k^F e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (C.29a)$$

$$F_n^F = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \quad (C.29b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (C.29b) denklemi ayrık $f(t_k)=f_k$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) fonksiyonunun Fourier dönüşümünü (FD) hesap etmekte kullanılabilir. Bu şekilde hesap edilen F_n^F değerleri frekans uzayında $2f_c = N\Delta f$ periyodu ile periyodik olacaktır. (C.29a) denklemi ise Fourier transformu ayrık olarak $F^F(f_k)=F_k^F$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) şeklinde bilinen fonksiyonu zaman uzayında hesap etmek için, yani ters Fourier dönüşümünü (TFD) bulmak için kullanılabilir. Bu şekilde hesap edilen f_n değerleri zaman uzayında $T = N\Delta t$ periyodu ile periyodik olacaktır.

C.10. Ayrık Fourier Dönüşümünün Önemli Bir Özelliği

(C.29b) denklemi ile hesap edilen Fourier dönüşümünün reel ve imajiner kısımları, $f_c = \frac{N}{2}\Delta f$ frekansına göre sırasıyla simetrik ve antisimetrik olacaklardır (Şekil C.4).



Şekil C.4. Ayrık Fourier dönüşümünün simetri ve antisimetri özellikleri

Bu özellik, F^F 'nin frekans uzayında $2f_c = N \Delta f$ periyodu ile periyodik ve $\text{Re}(F^F)$ $\text{Im}(F^F)$ 'in sırasıyla f_c göre simetrik ve antisimetrik olması sonucu meydana gelmektedir. Frekans spektrumu $0 \leq f \leq f_c$ aralığı için fiziksel anlam taşımaktadır. $f_c < f \leq 2f_c$ aralığındaki spektrum frekansı negatif olan Fourier bileşenlerinin spektrumunu temsil etmektedir.

C.11. Ayırık Fourier Dönüşüm Formüllerinin Kompakt Formu

(C.29) dönüşüm formülleri

$$f_n = \Delta f x_n \quad \text{Ters Fourier Dönüşümü (TFD) için}$$

$$F_n^F = \Delta t x_n \quad \text{Fourier Dönüşümü (FD) için} \quad (\text{C.30})$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} F_k^F, \quad W = e^{i \frac{2\pi}{N}} \quad \text{TFD için} \\ x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} f_k, \quad W = e^{-i \frac{2\pi}{N}} \quad \text{FD için} \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

ve W^{nk} , W 'nin (nk) 'nci kuvvetini göstermektedir.

C.12. Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol

$f(t)$ 'nin belli zaman aralığında verilmiş olduğu kabul edilsin. Fonksiyonun Fourier dönüşümünü (F^F) bulmak için şu basamakları izlemek gerekmektedir.

- Analizde gözönüne alınacak $[0, T]$ zaman aralığını seç.
- Bölüm sayısını (N) seç ve $f_0, f_1, f_2, \dots$ 'i $\Delta t = T/N$ aralıkları hesapla veya verilmiş olduğunu kabul et (Şekil C.5).
- x_n değerleri ($n=0, 1, \dots, N-1$)

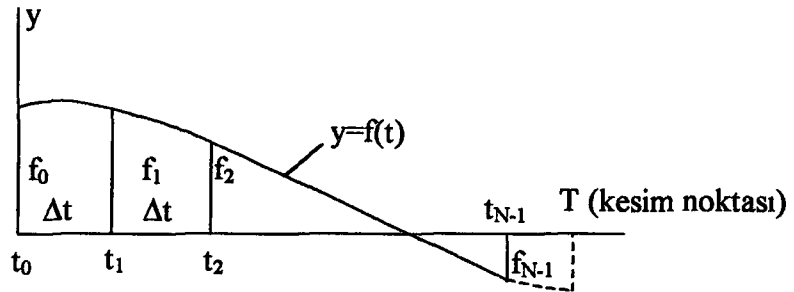
$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} f_k \quad , \quad W = e^{-i\frac{2\pi}{N}} \quad (C.32)$$

formülünü kullanarak bul.

d) Fourier dönüşümünü (FD)

$$F_n^F = \Delta t x_n \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (C.33)$$

ifadesinden hesapla.



Şekil C.5. Ayrık $f(t)$ fonksiyon değerleri

C.13. Ters Fourier Dönüşümünü Bulmak İçin İzlenecek Yol

F^F nin f ye bağlı olarak verilmiş olduğu kabul edilsin. Fonksiyonun zamana bağlı değerlerini bulmak için şu basamakları izlemek gerekmektedir.

a) Analizlerde gözönüne alınacak $[0, f_c]$ frekans aralığını seç.

b) N 'yi seç ve $F_0^F, F_1^F, \dots$ 'i $\Delta f = \frac{f_c}{N/2}$ aralıkları ile hesapla veya verilmiş olduğunu kabul et (Şekil C.6).

c) F^F 'yi reel ve imajiner kısımları f_c etrafında sırasıyla simetrik ve antisimetrik olacak şekilde $[0, 2 f_c]$ aralığında tanımla (Şekil C.7).

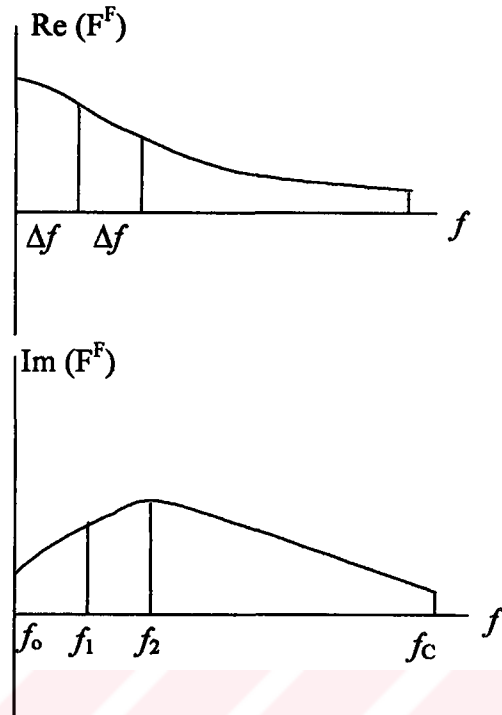
d) x_n değerlerini ($n=0, 1, \dots, N-1$)

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} F_k^F \quad , \quad W = e^{i\frac{2\pi}{N}} \quad (C.34)$$

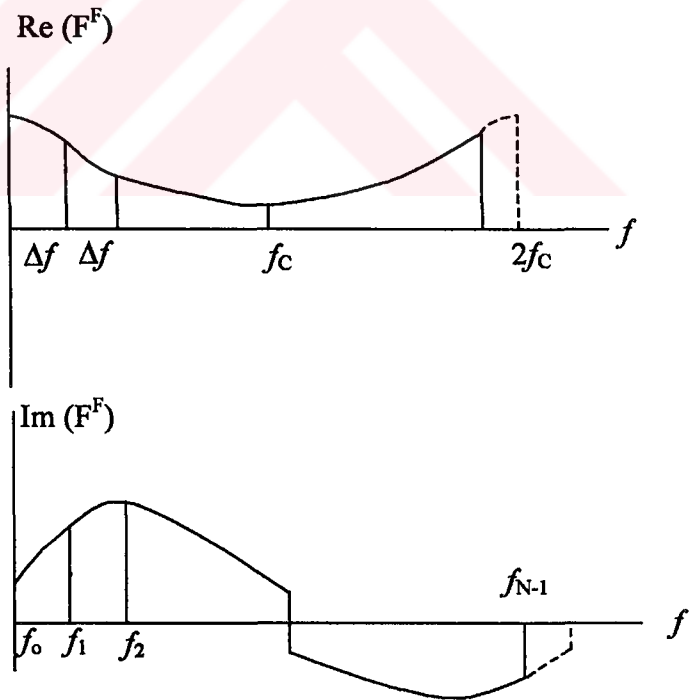
formülünü kullanarak bul.

e) Ters Fourier dönüşümünü (TFD) aşağıdaki formülle hesapla.

$$f_n = \Delta f x_n \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (C.35)$$



Şekil C.6. Ayrık F^F değerleri



Şekil C.7. F^F 'nin $[0, 2f_c]$ aralığına genişletilmesi

C.14. FFT Algoritması (Hızlı Fourier Dönüşüm Algoritması)

Ayrık Fourier dönüşümü veya ters Fourier dönüşümü için x_n ($n=0, 1, \dots, N-1$)

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ F \\ F \\ F \\ F \\ F \\ F \\ F \end{bmatrix} \quad (C.36)$$

formülü ile hesap edilmesi gerekmektedir. Burada W , elemanları kompleks W^{nk} olan $(N \times N)$ boyutlu kare matrisini ve F ise elemanları FD için F_n , TFD için F_n^F ile temsil edilen $(N \times 1)$ boyutlu kolon vektörünü göstermektedir. (C.36) denklemi x_n leri bulmak için N^2 sayıda kompleks çarpım yapmak gerektiğini göstermektedir. FFT algoritmasında N , 2'nin kuvveti olarak ($N=2^M$) hesaplanmaktadır. Burada M tam bir sayıyı göstermektedir. FFT algoritması kullanılırsa kompleks çarpım sayısı $NM/2$ 'ye indirgenmektedir. FFT algoritmasının işlemleri ne kadar kısalttığını gösteren bir örnek verelim. $N = 2^8 = 256$ olsun. Eğer FFT algoritması kullanılmazsa $256^2 = 65536$ kompleks çarpım yapmak gerekir. FFT algoritması kullanılması halinde çarpım sayısı $(256)(8)/2 = 1024$ olmaktadır.

C.15. FFT Algoritmasının Giriş Bilgileri

(C.36) ifadesindeki x değerleri, Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü için Kısım C.16'da verilen FFT alt programı (SUBROUTINE FFT (A, M, XL)) yardımı ile hesaplanmaktadır. Bu alt programda

XL = -1 Fourier Dönüşümü (FD) için

XL = 1 Ters Fourier Dönüşümü (TFD) için

alınmaktadır. M , $N=2^M$ formülü ile bölüm sayısını hesaplamak için vermektedir. A , $(N \times 1)$ boyutlu kompleks vektörü gösterme olup girişte FD için $(f_0, \dots, f_{N-1})$, TFD için $(F_0^F, \dots, F_{N-1}^F)$ değerlerini temsil etmektedir. Çıkışta $(x_0, \dots, x_{N-1})$ değerlerini vermektedir.

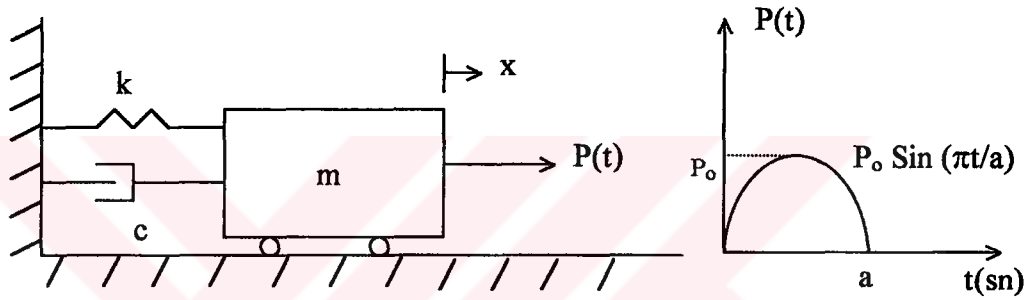
C.16. FFT Alt Programı (Hızlı Fourier Dönüşüm Algoritması)

```
C  FAST FOURIER TRANSFORM ALT PROGRAMI
SUBROUTINE FFT(A,M,XL)
PARAMETER (NI=4096 )
COMPLEX*16 A(NI),U,W,T
N=2**M
NV2=N/2
NM1=N-1
J=1
DO 7 I=1,NM1
IF(I.GE.J) GO TO 5
T=A(J)
A(J)=A(I)
A(I)=T
5  K=NV2
6  IF(K.GE.J) GO TO 7
J=J-K
K=K/2
GO TO 6
7  J=J+K
PI=ATAN(1.0)*4.0
DO 20 L=1,M
LE=2**L
LE1=LE/2
U=CMPLX(1.,0.)
W=CMPLX(COS(PI/LE1),XL*SIN(PI/LE1))
DO 20 J=1,LE1
DO 10 I=J,N,LE
IP=I+LE1
T=A(IP)*U
A(IP)=A(I)-T
10 A(I)=A(I)+T
20 U=U*W
RETURN
END
```

EK D
LAPLACE VE FOURIER DÖNÜŞÜM YÖNTEMLERİNİN
KARŞILAŞTIRILMASI

D.1. Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Dinamik Davranışı

Laplace ve Fourier dönüşüm yöntemlerini karşılaştırmak amacı ile Şekil D.1'de verilen tek serbestlik derecesine sahip mekanik sistem ele alınmıştır. Verilen özel yük etkisindeki bu sistemin davranışını idare eden diferansiyel denklemin kesin çözümü bilinmektedir.



Şekil D.1. Mekanik sistem ve dinamik yük tipi

Sistemin hareket denklemi

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = P(t) \quad (D.1)$$

bunun kütleye göre normalize edilmiş hali

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{P(t)}{m} \quad (D.2)$$

veya

$$\ddot{x} + 2\bar{\omega} \xi \dot{x} + \bar{\omega}^2 x = \frac{P(t)}{m} \quad (D.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\bar{\omega}^2 = k/m$ olup, k yay sabitini, m sistem kütlesini, c sönüm sabitini, $\xi = c/(2m\bar{\omega})$ boyutsuz sönüm katsayısını ve x sistem deplasmanını göstermektedir. Sistemin başlangıçta hareketsiz olduğu kabulü ($x(0)=0$ ve $\dot{x}(0)=0$) altında (D.3) ifadesinin Fourier dönüşümü alınırsa

$$-\omega^2 x^F + 2\xi \bar{\omega}(i\omega) x^F + \bar{\omega}^2 x^F = \frac{P^F}{m} \quad (D.4)$$

Fourier uzayında sistem hareket denklemi yazılmış olur ve buradan Fourier uzayında deplasman ifadesi

$$x^F(\omega) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{-\omega^2 + 2\xi \bar{\omega}(i\omega) + \bar{\omega}^2} \right) P^F \quad (D.5)$$

olarak yazılabilir. Yük fonksiyonunun ayrık değerleri için Fourier dönüşümü FFT algoritması ile yapılabilmektedir.

Şimdi ise mekanik sistemin dinamik davranışını idare eden denklemi Laplace uzayında ifade etmeye çalışalım. (D.3) ifadesinin Laplace dönüşümü

$$z^2 \bar{x}(z) - z x(0) - \dot{x}(0) + 2\xi \bar{\omega} [z \bar{x}(z) - x(0)] + \bar{x}(z) = \frac{\bar{P}(z)}{m} \quad (D.6)$$

şeklinde yazılabilir. $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ başlangıç şartları altında (D.6) denklemi

$$z^2 \bar{x}(z) + 2\xi \bar{\omega} z \bar{x}(z) + \bar{x}(z) = \frac{\bar{P}(z)}{m} \quad (D.7)$$

halini alır. Buradan Laplace uzayında deplasman ifadesi

$$\bar{x}(z) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{z^2 + 2\xi \bar{\omega} z + \bar{\omega}^2} \right) \bar{P}(z) \quad (D.8)$$

şeklinde yazılabilir. Uygulanan dinamik yükte $a=\pi$ seçilirse

$$\sin\left(\frac{\pi t}{a}\right) = \sin t \quad (D.9)$$

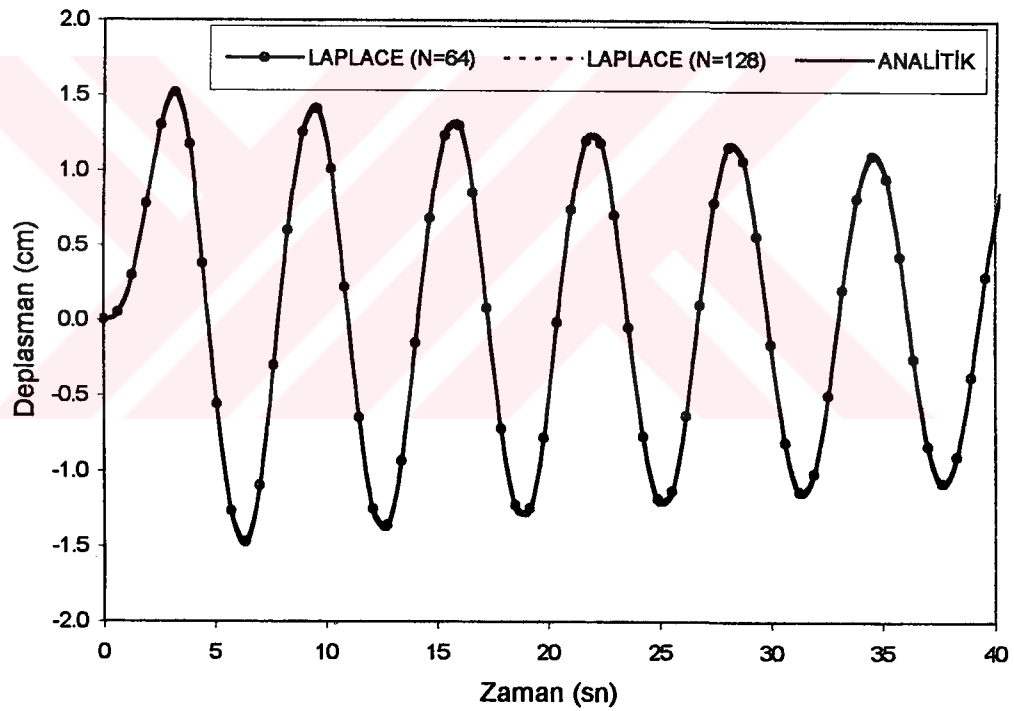
olur ve bu fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$\bar{P}(z) = \frac{\pi^2 (1 + e^{-\pi z})}{\pi^2 z^2 + \pi^2} = \frac{1 + e^{-\pi z}}{1 + z^2} \quad (D.10)$$

(D.10) ile verilmektedir. Laplace dönüşümü verilen yük fonksiyonu (D.8) eşitliğinde yerine konulacaktır. Sistemin boyutsuz sönüm katsayısı $\xi = 0.01$, $\bar{\omega} = 1 \text{ rad/s}$, $m=1$

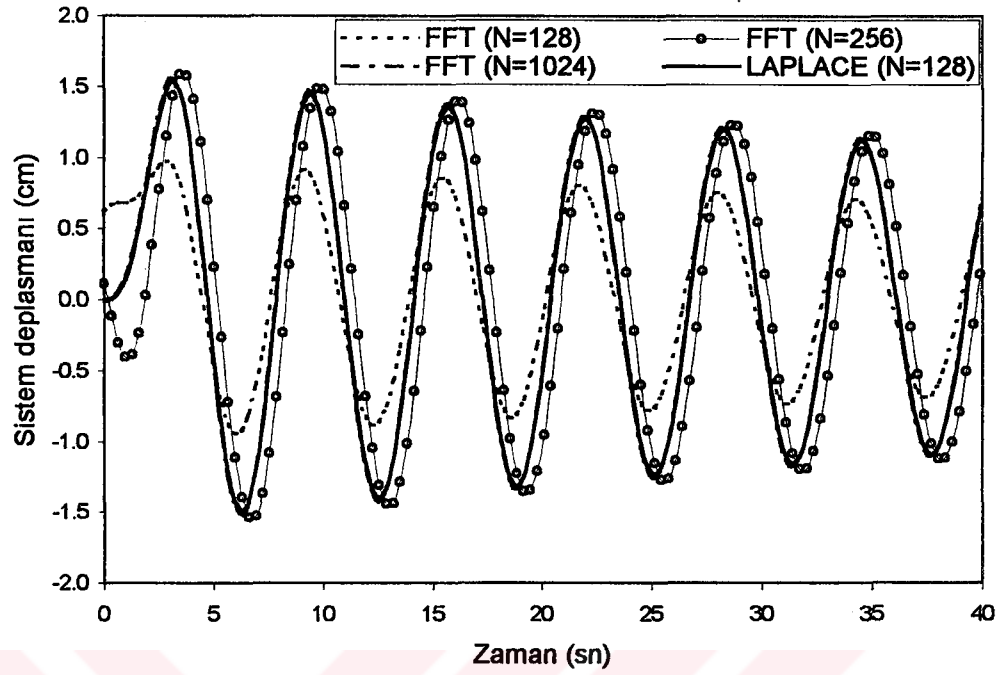
ve $P_0 = 1 \text{ cm/s}^2$ değerleri seçilmiş olsun. Buna göre (D.3) ile verilen diferansiyel denklemin zaman uzayındaki kesin çözümü Ek D.2’de verilen Mathematica dilinde yazılmış program ile hesaplanmıştır. Fourier uzayındaki bir dizi ω değeri için (D.5) eşitliğinin ayrık değerleri oluşturulup bunun ters dönüşümü FFT algoritması yardımıyla yapılmıştır. Benzer şekilde Laplace uzayında bir dizi z Laplace parametresi için (D.8) eşitliğinin ayrık değerleri oluşturulup bunun ters dönüşümü modifiye edilmiş Durbin yöntemiyle yapılmıştır.

Analitik ve Laplace uzayındaki çözümler Şekil D.2’de, Laplace ve Fourier uzayındaki çözümler de Şekil D.3’de birbirleri ile karşılaştırılmıştır.



Şekil D.2. Sistem deplasmanının zamanla değişimi

Şekil D.2’deki grafik incelendiğinde, Laplace uzayında $N=64$ parametre ile yapılan çözümün analitik çözüme çok yakın olduğu ve $N=128$ parametre ile yapılan çözümle analitik çözümün çakıştığı görülmektedir.



Şekil D.3. Sistem deplasmanının zamanla değişimi

Fourier uzayında yapılan çözümde ise bu problemde ancak 1024 parametre kullanılması halinde istenildiği kadar hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Fourier uzayında yapılan çözümlerde çok fazla sayıda parametre kullanılması gerekmektedir.

Bu bilgiler ışığında Laplace ve Fourier dönüşüm yöntemlerinin avantaj ve dezavantajlarını şu şekilde sıralıyabiliriz.

1. Fourier dönüşüm yönteminde hem sistem davranışının hemde yük fonksiyonunun sonsuzda sıfıra gitmesi gerekmektedir.
2. Hem Fourier dönüşüm yönteminde hem de Laplace dönüşüm yönteminde direk ve ters dönüşümler FFT algoritması yardımıyla yapılmaktadır.
3. Fourier uzayında güvenilir sonuç elde edebilmek için çok fazla sayıda dönüşüm parametresi kullanmak gerekmektedir.
4. Laplace dönüşüm yönteminde ise az sayıda parametre ile güvenilir sonuçlar elde edilebilmektedir.

D.2. Mathematica Programı İle Kesin Çözüm

```

(*****ANALİTİK ÇÖZÜM*****)
(*  x'' + 2*ksi*wn*x' + wn^2*x = P(t)/m *)
(* *)
(*  P(t)= Sin( Pi t/t1 ) , W=Pi/t1, t1=Pi *)
(* *)
(*  Dif. Denklemin kapali cozumunu *)
(*****)
R=((1-r^2)^2+ (2 ksi r)^2)^(1/2)
U=U0/R
yuk=U0 Sin[W t]
x1=U Sin[t-teta]+Exp[-ksi wn t] (A1 Cos[wd t]+A2 Sin[wd t])
v1=D[x1,t]
x2=Exp[-ksi wn t] (A3 Cos[wd t]+A4 Sin[wd t])
v2=D[x2,t]
(*****)
ksi=0.01
k=1
m=1
wn=1
p0=1
W=1
U0=p0/k
r=W/wn
Print[U]
teta=ArcSin[2 ksi r/R]
wd=wn (1-ksi^2)^(1/2)
py=Plot[yuk,{t,0.,Pi}]
(*****)
(*  (0 <= t <= Pi) icin 1. kismin cozumunu *)
(*****)
x0=0
v0=0
denk1=x1/.t->0
denk2=v1/.t->0
coz1=Solve[{denk1==x0,denk2==v0},{A1,A2}]
x1=x1/.coz1
v1=v1/.coz1
Print["x1 = ",x1]
Print["v1 = ",v1]
p1=Plot[x1,{t,0.,Pi}]
(*****)
(*  (Pi <= t <= 13 Pi) icin 2. kismin cozumunu *)
(*****)
x1=N[x1[[1]]/.t->Pi]
v1=N[v1[[1]]/.t->Pi]
denk3=x2/.t->Pi
denk4=v2/.t->Pi
coz2=Solve[{denk3==x1,denk4==v1},{A3,A4}]
x2=x2/.coz2
v2=v2/.coz2
Print["x2 = ",x2]
Print["v2 = ",v2]
p2=Plot[x2,{t,Pi,13 Pi}]
pkcs=Show[p1,p2]

```

T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
 İLKÖĞRETİM ORTAÖĞRETİM GENELİ