



T.C.
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJELERİ
KOORDİNASYON BİRİMİ

**İKİ NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ETKİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ
ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA**

FBA-2016-6007

Bireysel Araştırma Projesi

SONUÇ RAPORU

Proje Yürütücüsü:
BEYTULLAH TEMEL
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

TİMUÇİN ALP ASLAN
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

KASIM 2016
ADANA

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sürecinde vermiş olduğu desteklerden dolayı çok değerli meslektaşımız İnş. Y. Müh. Ahmad Reshad NOORI'ye teşekkür ederiz.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
1. GİRİŞ.....	1
2. AMAÇ VE KAPSAM	6
3. GEREÇ VE YÖNTEM.....	7
3.1. Eğri Eksenli Çubuk Sistemlerin Statik Analizi	7
3.1.1. Çubuğun Geometrisi	7
3.1.2. Çubuk Eksenini	7
3.1.3. Çubuk Dik Kesidi.....	8
3.1.4. Yapılan Kabuller	10
3.1.5. Denge Denklemleri	10
3.1.6. Uygunluk Denklemleri.....	12
3.1.7. Kesit Tesirleri ile Şekil Değiştirme Arasındaki İlişki.....	15
3.1.8. Vektörel Denklemlerin t,n,b takımına Dönüştürülmesi	17
3.1.9. Düzlemsel Çubuklar	23
3.1.10. Düzlemi İçinde Yüklü Hal için Kanonik Denklemler	26
3.1.11. Düzleminne Dik Yüklü Hal için Kanonik Denklemler.....	27
3.2. Dairesel Silindirik Tonozların Kanonik Denklemleri.....	28
3.2.1. Yapılan Kabuller	28
3.2.2. Denge Denklemleri	29
3.2.3. Bünye Denklemleri	31
3.2.4. Uzama Oranı-Deplasman Denklemleri.....	31
3.2.5. Eğrilik-Deplasman İlişkisi	31
3.2.6. Gerilme Bileşkeleri- Deplasman Denklemleri	32
3.2.7. M_ϕ ve N_x Arasındaki İlişki	32
3.2.8. w Cinsinden Olayı İdare Eden Diferansiyel Denklem.....	33
3.2.9.Olayı İdare Eden Diferansiyel Denklemin Kanonik Halde Elde Edilmesi	36

3.2.10. Kanonik Halde Diferansiyel Denklem Teşkili.....	37
3.3. Simetrik Yüklü Dönel Kabuklar	41
3.3.1. Tarif ve Genel Denklemler	41
3.3.2. Konik Kabuklar.....	44
3.3.3. Silindirik Kabuklar.....	45
3.4. Eğri Eksenli Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi.....	47
3.4.1. Hareket Denklemleri	47
3.4.2. Zorlanmış Titreşim için Laplace Uzayında Hareket Denklemleri ...	49
3.4.3. Düzlemi İçinde Yüklü Hal İçin Kanonik Denklemler	52
3.4.4. Düzlemine Dik Yüklü Hal İçin Kanonik Denklemler	52
3.4.5. Sönüm Etkisi.....	53
4. SAYISAL UYGULAMALAR VE ARAŞTIRMA BULGULARI.....	54
4.1. Statik Çözümlerle İlgili Araştırma Bulguları	54
4.1.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Direk Analiz	54
4.1.1.1. Homojen Çözümün Elde Edilmesi.....	55
4.1.1.2. Özel Çözümün Elde Edilmesi	56
4.1.2. 5. Mertebe Runge-Kutta Metodu	57
4.1.2.1 Bir Adet Diferansiyel Denklem Hali.....	57
4.1.2.2. İki Adet Diferansiyel Denklem Hali	58
4.1.3. Statik Yükleme Durumu İçin Sayısal Uygulamalar.....	59
4.1.3.1. Kendi Ağırlığı Etkisi Altındaki Dairesel Çember	59
4.1.3.2. Tekil Yüklü Parabolik Kemer	66
4.1.3.3. Düzlemine Dik Yüklü Dairesel Çubuk	71
4.1.3.4. Tekil Momentle Yüklü Sikloid Çubuk	75
4.1.3.5. Tek Açıklıklı Uzun Silindirik Tonoza	80
4.1.3.6. Lineer Değişken Kalınlıklı Konik Su Deposu.....	85
4.1.3.7. Lineer Değişken Kalınlıklı Silindirik Su Deposu	89
4.2. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine Dayalı Rijitlik Matrisi.....	93
4.2.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Diferansiyel	
Denklemlerin Çözümü.....	93
4.2.1.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine Dayalı Rijitlik	
Matrisinin Hesaplanması	94

4.2.2. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine Dayalı Rijitlik Matrisi	
Yöntemiyle İlgili Sayısal Uygulamalar	95
4.2.2.1. Düzlemi İçinde Yüklü Daire Eksenli Çubuk.....	95
4.2.2.2. Düzlemi İçinde Yüklü İki Açıklıklı Daire Eksenli Çubuk..	97
4.2.2.3. Düzlemine Dik Yüklü İki Açıklıklı Daire Eksenli Çubuk ..	99
4.2.2.4. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuk.....	101
4. 3. Dinamik Çözümlerle İlgili Araştırma Bulguları	103
4.3.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Diferansiyel	
Denklemlerin Çözümü	103
4.3.2. Dinamik Yükleme Durumu İçin Sayısal Uygulamalar	104
4.3.2.1. Dinamik Tekil kuvvetle Yüklü Parabolik Kemer.....	104
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	115
KAYNAKLAR.....	117
EKLER	119

ÖZET:

Bu çalışmada, geometrik özellikleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü eğri eksenli çubukların, silindirik tonozların ve eksenel dönel simetrik yapı elemanlarının statik ve dinamik yükler altında analizleri incelenmiştir. Analizlerde homojen, izotropik, elastik veya viskoelastik malzemeler seçilmiştir. Bu tür yapı elemanlarının statik yükler altında davranışını idare eden temel denklemler özetlenmiş, kanonik formda elde edilen birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımlarının çözümleri Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile yapılmıştır. Ayrıca, düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubukların farklı tip dinamik yükler altında zorlanmış titreşimi Laplace uzayında analiz edilmiştir. Bununla beraber, viskoelastik malzeme durumunda Kelvin tipi sönüm modeli kullanılmıştır. Elastik sabitler, Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile değiştirilerek, viskoelastik malzeme özellikleri tanımlanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş ters dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Düzlemsel yapı elemanlarının statik ve dinamik analizleri için genel amaçlı Mathematica ve Fortran dillerinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programlarının kontrolü, literatürde mevcut değişik yöntemlerin sonuçları ve analitik çözümler ile karşılaştırılarak, literatür ile uyumlu ve etkin oldukları gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki-Noktalı Sınır Değer Problemleri, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi, Ters Laplace Dönüşümü

ABSTRACT:

In this study, in-plane loaded and perpendicularly loaded to plane curved rods with variable geometric properties along the axis, barrel vaults and axisymmetric structural elements subjected to static and dynamic loads are theoretically investigated. The materials of the structural elements are assumed to be homogeneous, isotropic, elastic or linear viscoelastic. The governing equations of such structural elements under static loads have been summarized. The obtained canonical form of the first order ordinary differential equations has been solved by Complementary Functions Method (CFM). Also, the transient analysis of in-plane loaded curved rods under the various dynamic loads has been analyzed in the Laplace domain. Furthermore, in the viscoelastic material case, the Kelvin model is employed. According to the correspondence principle, material constants are replaced with their complex counterparts in the Laplace domain. The solution obtained are transformed to the time domain using the modified Durbin's inverse numerical Laplace transformed method. For the suggested models, the computer programs with the static and dynamic analysis of the planar curved structural elements are coded in Mathematica and Fortran. Verification of the computer programs are performed by comparing the results of the present methods with the other numerical methods and analytical solutions. The procedures have been proved to be highly accurate and efficient compared to various other numerical methods available in the literatures.

Key Words: Two-Point Boundary Value Problems, Complementary Function Method (CFM), Inverse Laplace Transforms.

1.GİRİŞ

Bazı mühendislik problemlerinin iki noktalı sınır değer problemleri olarak etkin çözümlerinin araştırılması, hala güncelliğini devam ettirmektedir. Bu tür problemlere; doğrusal ve eğrisel çubuk sistemleri, eksenel simetrik geometri ve yüklemeye sahip kabuk problemleri-ki bunlar arasında su tankları ve kubbeler sayılabilir-, tonozlar, düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme problemi olarak silindir ve diskler gibi birçok yapı elemanları örnek olarak verilebilir.

Çubuklar, günümüzde birçok mühendislik alanında; örneğin inşaat, makina, otomotiv gibi önemli endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Genellikle inşaat mühendisliğinde kemer, köprü ve merdivenler gibi eğri eksenli yapı elemanları olarak kullanılmaktadır. Benzer şekilde dönel simetriye sahip kabuklar ise, gaz ve sıvı depolarında, silolarda, soğutma, su ve televizyon kulelerinde, siloların betonarme temelleri vb. yapılarda kullanılmaktadır. Hal, fabrika, spor salonları, hangar ve terminal binaları gibi ara mesneti az, büyük açıklık gerektiren yerlerde silindirik tonoz çatılar gibi yapılar geniş bir kullanım alanına sahiptirler. Bu sebeptendir ki, yukarıda bahsedilen yapı elemanlarının statik ve dinamik yükler altında davranışının belirlenmesi önem arz etmektedir.

Özbek (1963), eğri eksenli çubukların statik davranışlarını incelemiştir. Deplasman ve kesit tesirlerini, birbirleriyle ardışık türevler ile ilk defa ifade ederek elde etmiştir.

İnan (1964), elastomekanikte başlangıç değer problemlerinin ve taşıma matrisine dayalı çözümlerini incelemiştir. Doğru, düzlemsel ve daire eksenli çubukların diferansiyel geçiş matrisi kullanarak taşıma matrislerini elde etmiştir.

İnan (1966), elastik çubukların genel teorisini incelemiş, buradan doğru, düzlemsel ve daire eksenli çubukların taşıma matrisini elde ederek, çözümlerde taşıma matrisi yöntemini uygulamıştır.

Sayar (1970), dönel kabuk sistemlerin dönel simetrik dış yükleme halinde, elastik yataklanma durumlarını da göz önünde tutarak, dönel kabukların eğilme teorisinin en genel şekilde çözümünü; yani kabuğun kesit tesirleri, şekil değiştirmelerini ve yer değiştirmelerini, kanonik denklemlerle ifade etmiş ve elektronik hesaplama yöntemiyle inceleme yapmıştır.

Aktaş (1972), İki noktalı sınır değer problemlerinin başlangıç değer metodları ile sayısal çözümlerini Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemini (TFY) kullanarak incelemiştir.

Laman (1990), Zeiss-Dywidag olarak bilinen silindirik tonoz çatı sistemlerinin, statik yükler altında davranışını Taşıma Matrisi yöntemi ile incelemiş ve farklı yükleme durumları için Fortran-77 dilinde bilgisayar programları hazırlamıştır. Kullandığı denklemler, Donnel-Karman-Jenkins ince kabuk teorisine dayanmaktadır. Eksen boyunca üniform düşey

statik yükü dikkate almış ve ayrıca, kenar kiriş, öngerilmeli, kısmi yükleme ve enine kesitte çok merkezlilik gibi halleri de incelemiştir. Sonuçları literatürde bulunan çalışmalarla karşılaştırmıştır.

Haktanır (1994), elastik izotrop malzemeye sahip düzlemsel çubukların statik davranışını TFFY'ye dayalı rijitlik matrisi yöntemiyle incelemiştir. Elde ettiği denklemlerin çözümünde Runge-Kutta 4 (RK4) algoritmasını kullanmıştır. Fortran 77 dilinde programlar geliştirmiş ve literatürde bulunan çalışmalara uygulayarak sonuçları kıyaslamıştır.

Bayhan (1993), daire eksenli düzlem çerçevelerin statik yükler altındaki davranışları Taşıma ve Rijitlik Matrisi yöntemi ile gerçekleştirmiştir. Daire eksenli elemanların eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörleri Taşıma Matrisi yöntemiyle elde etmiştir. Rijitlik matrisi yöntemini incelerken, Taşıma Matrisi ifadelerinde, eksenel ve kayma deformasyonlarını dikkate almış ve buna göre Taşıma Matrislerini yeniden elde etmiştir Söz konusu çalışmada düzlemi içinde yüklü ve düzlemine dik yüklü, daire ve doğru eksenli elemanlardan oluşan bileşik sistemler iki ana başlıkta incelemiş ve bunlara uygun olarak Mathematica dilinde genel amaçlı bilgisayar programları geliştirilmiştir. Çalışmanın son bölümünde ise, doğru eksenli elemanlar da sisteme dahil edilmiş ve bu amaçla bilgisayar programları hazırlanmıştır.

Bozkurt (1995), eğri eksenli yapılar ve dönel simetrik kabuklar ile silindirik tonoz taşıyıcı sistemlerin statik yükler altında eğilmesini hesaplamak için, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi(TFFY)'ni kullanarak Mathematica dilinde programlar hazırlamış ve sonuçlar literatürde yapılan çalışmalarla karşılaştırmıştır. Eğri eksenli çubuklar için olayı idare eden denklemi gözden geçirmiş ve standart form olan birinci mertebeden adi diferansiyel kanonik denklem haline getirmiştir. Dönel kabuk sistemlerin dönel simetrik dış yükleme halinde, elastik yataklanma ve uniform ve farklı ısı durumlarını da göz önünde tutarak dönel kabukların eğilme teorisinin en genel şekilde çözümünü araştırmış. Yani kabuğun kesit tesirleri, şekil değiştirmelerini ve yer değiştirmelerini, kanonik denklemlerle ifade etmiş ve 4. Mertebe Taylor serisi ile çözüm yaparak, Sayar(1970) ile karşılaştırmıştır. Ayrıca tonoz sistemler için Donnel-Karman-Jenkins ince kabuk teorisini dikkate alarak Taylor yöntemini kullanarak çözümler yapmış ve bulduğu sonuçları önceki çalışmalar ile kıyaslamıştır.

Çalım (1996), eğri eksenli çubuk sistemler ve silindirik tonoz yapıların statik yükler altındaki davranışlarını idare eden denklemleri kanonik halde birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı halinde elde etmiştir. Silindirik tonoz için statik yükler altında davranışını idare eden denklemleri, Donnel-Karman Jenkins teorisini kullanarak elde etmiştir. Bu denklemleri dördüncü mertebe Runge-Kutta algoritmasını kullanarak direk tamamlayıcı fonksiyonlar metodu ve Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metoduna dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile çözmüştür. Bu

metotları kullanarak Fortran-77 dilinde bilgisayar programları hazırlamıştır. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metoduna dayalı rijitlik matrisi yönteminden elde ettiği sonuçları ANSYS paket programıyla karşılaştırılmıştır.

Yıldırım ve ark. (1997), doğru ve daire eksenli elemanlardan oluşan bileşik düzlem çerçevelerin statik analizini rijitlik matrisi metodu ile incelemişlerdir. Dairesel elemanları düzlemi içinde ve düzlemine dik yükleme halleri için ayrı ayrı olmak üzere, eleman rijitlik ve ankastrelik uç kuvvetlerini taşıma matrisi metodu ile kesin olarak elde etmiştir.

Çalım (2003), izotropik, anizotropik ve elastik viskoelastik malzemeden yapılmış silindirik helisel çubukların zamanla değişen yükler altında dinamik davranışını teorik olarak incelemiştir. Çözümlerde, Kelvin tipi sönüm modelini uygulamıştır. Laplace uzayında elde ettiği çözümleri, Durbin'in sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi ile zaman uzayına dönüştürmüştür. Söz konusu çalışmasında elde ettiği sonuçların ANSYS ve literatürdeki mevcut sonuçlar ile uyum içinde olduğunu göstermiştir.

Şahin (2004), değişken kesitli silindirik kabuk taşıyıcı sistemlerin sonlu elemanlarla hesabını incelemiştir. Çalışmasında virtüel iş teoreminden yararlanarak, sabit ve farklı sıcaklık değişimi etkilerini de kapsayacak şekilde bütün sistem için sonlu elemanlara ait denklemleri çıkarmıştır. Eleman rijitlik matrisini, Gauss sayısal integrasyon yöntemi yardımıyla elde etmiş ve çıkan sonuçları değerlendirmiştir.

Doğruer (2006), eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini, başlangıç değerleri yöntemi ile hem kayma deformasyonu ve hemde eğilme etkileri ile birlikte burulma dönme eylemsizliği etkilerini de dikkate alarak, analitik olarak çözmüştür

Kıraç (2007), zamanla değişen yükler altında doğru eksenli kompozit çubukların dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Serbest titreşim, zorlanmış titreşimin özel hali olarak ele almıştır. Formülasyonda dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne almış Laplace uzayında kanonik formda elde edilen adi diferansiyel denklemler, dinamik rijitlik matrisini hesaplayabilmek için Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözüm yapmıştır. Zamanla değişen yükler altında doğru eksenli kompozit çubukların dinamik analizini yapmak için FORTRAN77 dilinde genel amaçlı bilgisayar programı hazırlamış ve bilgisayar programı ile literatürde verilen çeşitli örnekler çözmüş ve ANSYS programı sonuçları ile kıyaslamalar yapmıştır.

Bayar (2007), karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak silindirik olmayan helisel çubukların statik analizini yapmıştır. Bunun için FORTRAN-90 dilinde yazılmış bir

bilgisayar programı kullanmıştır; programın doğruluğu ve hassasiyeti daha önceden bilinen sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Gürer (2008), homojen, izotrop ve lineer elastik malzeme kabulü ile düzlem içi yüklü daire eksenli kirişlerin çeşitli yüklemeler altındaki statik davranışları incelemiştir. Deplasmanların, dönmenin, kuvvetlerin ve momentlerin bilinmeyen olarak tanımladığı çubuk elemanı ele alarak, bir sonlu eleman modeli geliştirmiş ve C++ programlama dilinde geliştirilen bilgisayar programı yardımı ile sonuçlar, literatürdeki problemler ve bu problemlerin kesin çözümünün yanında SAP2000 paket programıyla da karşılaştırmıştır.

Aktan (2008), daire eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşim frekanslarının elde edilmesini incelemiştir. Timoshenko kiriş teorisinden yararlanmış ve dönme ataleti etkisini göz önüne almıştır. Literatürde çözülen bazı problemleri ele alarak, ANSYS ve Fortran90 paket programlarını kullanarak çözüm yapmış ve sonuçları karşılaştırarak, yöntemin olumlu ve olumsuz yönlerini ortaya koymaya çalışmıştır.

Çoban (2008), daire eksenli kirişlerin karışık sonlu elemanlar yöntemiyle dinamik analizini incelemiştir. Gâteaux türevini kullanarak çıkarttığı denklemlerin çözümünden elde ettiği sonuçlar ile literatürde başka yöntemler ile elde edilmiş olan frekansları karşılaştırıp sonuçları değerlendirmiştir.

Akkurt (2011), elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların dinamik davranışını Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Doğru ve daire eksenli çubukları idare eden denklemleri kayma deformasyonunu göz önüne alarak Timoshenko çubuk teorisi ile elde etmiştir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemini kullanarak FORTRAN dilinde genel amaçlı programlar hazırlamış ve çubukların serbest ve zorlanmış titreşim analizini yapmıştır.

Eroğlu (2014), eksen eğrisi herhangi bir düzlemsel eğri olan çubuğun kesiti de değişken kabul ederek, çubuk statığının düzlem içi ve düzlem dışı genel denklemleri vermiştir ve statik problemlerinin kesin çözümü başlangıç değerleri yöntemi ile yapmıştır. Elde edilen çözüm kullanarak bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmiş, düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik ve serbest titreşim problemleri çözmüştür.

Karaca (2014), düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizlerini teorik olarak incelemiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde etmiş ve daire eksenli çubuklar için tekrar düzenlemiştir. Formülasyonda eksenel ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne almamıştır. Skaler formdaki birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri, taşıma ve rijitlik matrisi yöntemi yardımı ile çözmüştür. Düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizleri ayrı ayrı olarak incelemiş ve genel amaçlı

MATHEMATICA dilinde bilgisayar programı hazırlamıştır. Daire eksenli çubukların statik ve serbest titreşim analizleri için literatürdeki örnekler ele alınmıştır. Elde edilen sonuçların, ANSYS ve literatürdeki mevcut sonuçlar ile uyum içinde olduğunu göstermiştir.

Ecer (2015), Doğru eksenli çubukların karışık sonlu elemanlar yöntemi ile boyuna titreşim analizini incelemiştir. Gâteaux türevi ve Sonlu eleman yönteminin birlikte kullanılması ile elde edilen frekanslar ile literatürde başka yöntemler ile elde edilmiş olan frekansları karşılaştırıp, sonuçlar değerlendirmiştir.

Yapılan araştırmalar sonunda, eğri eksenli düzlemsel yapı elemanlarının statik yüklemeler altındaki çözümlerinin farklı yöntemlerle yapıldığına dair birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Ancak eğri eksenli çubukların zamana bağlı dinamik yüklemeler altında Laplace uzayında TFY ile çözümlerini veren çok kısıtlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Düzlemsel daire eksenli çubukların farklı tip dinamik yükler altında zorlanmış titreşimi, ilk defa bu çalışmada Laplace dönüşüm metodu ve TFY ile analiz edilmiştir. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için etkin bir sayısal ters Laplace metodu uygulanmıştır. Bu çalışmada bulunan sonuçlar, literatürde verilen çözümler ile karşılaştırılmış ve çözümlerin literatür ile uyum içerisinde olduğu gösterilmiştir.

2. AMAÇ VE KAPSAM

Bu çalışmada geometrik özellikleri ve yükleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde veya düzlemine dik yüklü çubukların, tonozların ve eksenel dönel simetrik kabukların davranışını idare eden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) kullanılmıştır. TFY, iki noktalı sınır değer problemlerini başlangıç değer problemine dönüştüren bir sayısal çözüm yöntemidir. Başlangıç değer probleminin çözümleri için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır. Ele alınan çubuk malzemesi homojen, izotropik ve lineer elastiktir. Küçük yer ve şekil değiştirme kabülleri göz önüne alarak formülasyonlarda birinci mertebe teorisi uygulanmıştır.

Daire eksenli çubuklarda ara mesnet ve ara tekil yüklerin bulunduğu durumlarda, Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile doğrudan çözümler kolaylıkla yapılamamaktadır. Bu nedenle, TFY ile eleman rijitlik matrisleri ve eleman yük vektörleri bulunarak, analizler rijitlik matrisi metodu ile yapılabilmektedir. Bu amaçla her bir durum için Fortran dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan programdan elde edilen sonuçlar, literatürde verilen analitik çözümler ile grafikler ve tablolar üzerinde karşılaştırılmıştır.

Son olarak düzlemsel daire eksenli çubukların farklı tiplerdeki dinamik yükler altında zorlanmış titreşimleri Laplace uzayında analiz edilmiştir. Diferansiyel denklemlere zamana göre Laplace dönüşümü uygulanarak, dinamik problem statik hale dönüşmekte ve böylece Laplace uzayında elde edilen lineer denklem takımı sayısal olarak kolayca çözülebilmektedir. Zamana göre Laplace dönüşümü alınan kısmi diferansiyel denklemler, dönüşmüş uzayda adi diferansiyel denklem takımı haline gelmektedir. Böylece, kısmi diferansiyel denklemlerin Laplace uzayında sayısal çözümü kolayca yapılabilmektedir. Dinamik yükleme durumunda homojen, izotropik, elastik ve viskoelastik malzemeler seçilmiştir. Viskoelastik malzeme için Kelvin tipi sönüm modeli uygulanmıştır. Laplace uzayında elde edilen çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş sayısal ters Laplace metodu uygulanmıştır. Bu çalışmada bulunan sonuçlar, ANSYS programından elde edilen çözümler ile karşılaştırılmıştır. Düzlemsel çubukların Laplace uzayında direk çözümleri için genel amaçlı programlar hazırlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki çözümler ile grafikler üzerinde karşılaştırılmış ve uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

3.1. Eğri Eksenli Çubuk Sistemlerin Statik Analizi

3.1.1.Çubuk Geometrisi

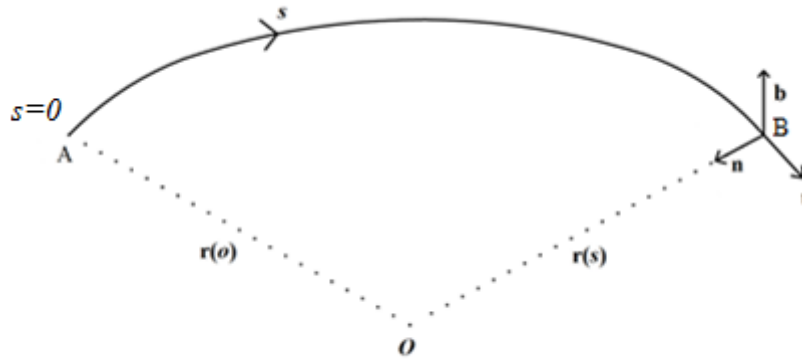
Çubuk, en kesit üzerindeki iki boyutu uzunluk ve eğrilikler yanında çok küçük olan taşıyıcı elemanlardır. Bir çubukta başlıca iki eleman vardır, bunlar çubuk eksen ve çubuk dik kesitidir. Dik kesit, kendi ağırlık merkezinde çubuk eksenine olan bir uzay eğrisine devamlı dik kalacak şekilde hareket ederse çubuk meydana gelir.

3.1.2 Çubuk Eksen

Çubuk eksenini herhangi bir eğri düşünülecek olursa; böyle bir eğri:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s) \quad (3.1.)$$

yer vektörü ile tarif edilir.



Şekil 3.1. Çubuk eksen

Burada s eğri üzerinde başlangıç olarak seçilen bir A noktası ile B noktası arasındaki mesafeyi ifade eder, s seçilen doğrultuda pozitiftir.

Eğri eksenli çubuklarda, eksene bağlı hareketli bir koordinat takımının $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ seçilmesi problemin tanımlanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca her üç birim vektör de yer vektörüne bağlıdır.

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (3.2.)$$

Burada $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektörleri olarak tarif edilmektedir. $\mathbf{t}$ artan s yönünde, $\mathbf{n}$ teğet birim vektöre dik olup, yönü eğrilik merkezine doğrudur. $\mathbf{b}$, binormal birim vektör olup, $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ birim vektörlerinin oluşturdukları düzleme diktir.

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (3.3.)$$

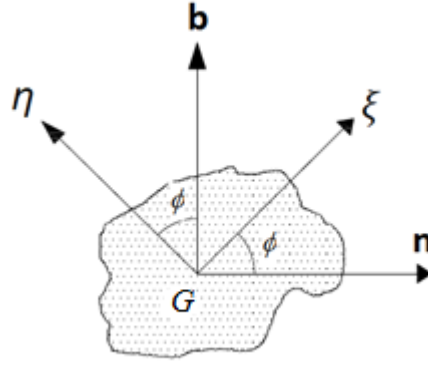
Bu şekilde tarif edilen; $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ birim vektörlerinin teşkil ettiği takım sağ el kuralına göre teşkil edilir ve aralarında Frenet formülleri denilen türevsel bağıntılar vardır.

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \chi \mathbf{n} \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \chi \mathbf{t} \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n} \quad (3.4.)$$

Burada χ eğrilik olup daima pozitifdir. τ , tabi burulmayı ifade eder ve uzay eğrilerinde sıfırdan farklı, düzlemsel eğriler için sıfırdır. $\tau = 0$ olan eğrilere doğru denilmektedir. Daire için ise, $\chi = \text{sabittir}$.

3.1.3. Çubuk Dik Kesiti

Dik kesit, kapalı bir eğri ile sınırlanmış ve $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ düzleminde yer alan bir düzlem parçasıdır. G şeklin ağırlık merkezini ξ ve η eksenleri ise kesitin asal atalet moment eksenlerini göstermektedir



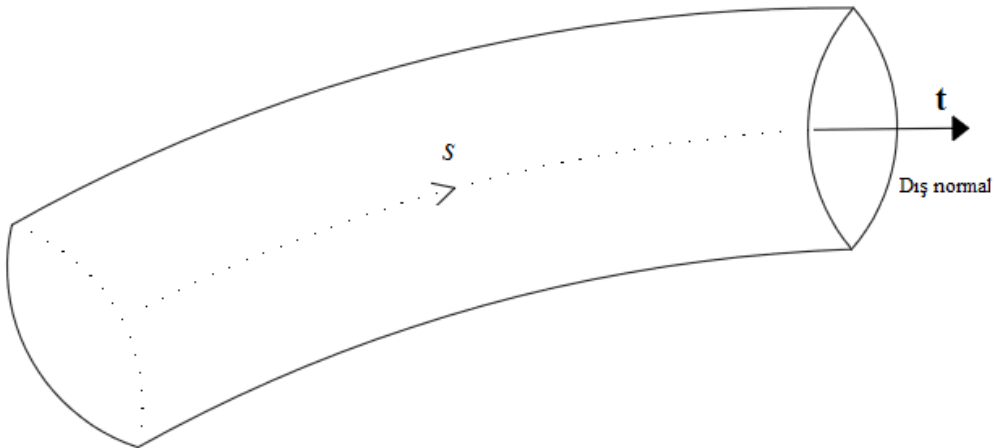
Şekil 3.2. Çubuk dik kesiti

Eksene bağlı olan $(\mathbf{n}, \mathbf{b})$ takımı ile dik kesite bağlı olan (ξ, η) takımları birbirine ϕ açısı ile bağlıdır.

$$\phi = \phi(s) \quad (3.5.)$$

Dış normali $\mathbf{t}$ ile aynı yönde olan kesit pozitif kesit, aksi yönde ise negatif kesittir (Şekil3.3.).

Boy Δs gibi sonsuz küçük olan, pozitif ve negatif kesitle sınırlanan çubuk parçasına çubuk elemanı denilmektedir.



Şekil 3.3. Pozitif kesit

3.1.4. Yapılan Kabuller

Çubuk malzemesi elastik, homojen ve izotropdur. Yer ve şekil değiştirmeler çok küçük olduğundan birinci mertebe teorisi kullanılacaktır. Deforme olmuş dik kesitin düzlemde olan sapmaları ihmal edilerek düzlem kaldığı kabulü yapılacaktır. Çubuk kesiti göz önüne alındığı bölgede eksen boyunca sabittir. Bünye denklemleri için Hooke Kanunu kullanılacaktır.

3.1.5. Denge Denklemleri

Çubuğa tesir eden dış kuvvetler ve çubuk parçaları arasındaki etki-tepkiyi ifade eden iç kuvvetler ele alınacaktır. Dış kuvvetler ele alınırsa, doğrultuları çubuk ekseninden geçen s boyunca yayılı olan dış kuvvetler $\mathbf{p}$ vektörü ile gösterilirse,

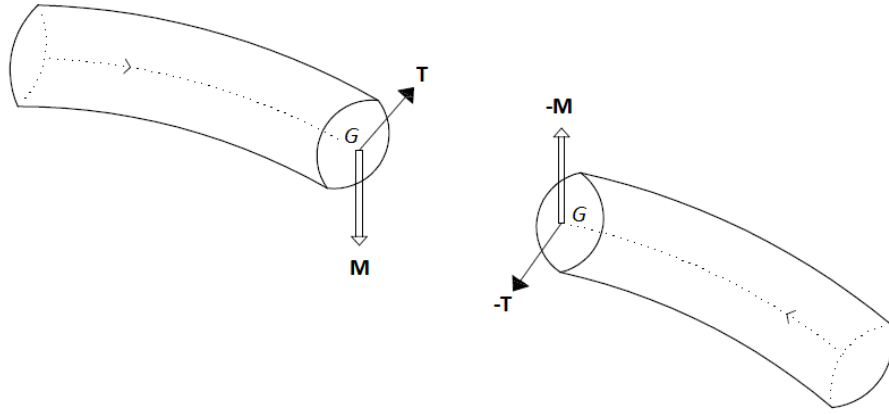
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta s} \right) = \mathbf{p} \quad (3.6.)$$

olur. Burada $\Delta \mathbf{p}$ kuvveti Δs eksen parçasına isabet eden dış kuvvetlerin vektörel toplamıdır.

Dış kuvvetler doğrultuları itibariyle eksenden geçmezler ise bunları eksene aktarmak mümkündür. Bu durumda bir kuvvet çiftini hesaba katmak gerekir. $\Delta \mathbf{M}$ çubuğun Δs kısmına etki eden dış kuvvetlerin eksene aktarılmasıyla oluşan kuvvet çiftidir.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta s} \right) = \mathbf{m} \quad (3.7.)$$

Burada $\mathbf{m}$ vektörü yayılı dış kuvvet çiftlerini gösterir. Kesit tesirleri adı verilen iç kuvvetler olarak kesit pozitif yönüne tesir eden kuvvetler alınmıştır. Ayrıca yayılı iç kuvvetler ise kesitin ağırlık merkezine aktarılan değeridir.



Şekil 3.4. İç kuvvetler

$\mathbf{T}$ vektörü, kesite tesir eden iç kuvvetlerin vektörel toplamını, $\mathbf{M}$ vektörü ise bunların ağırlık merkezine aktarıldıkları durumda eklenmesi gereken kuvvet çiftini gösterir.

Elastik çubuk teorisinin hedeflerinden biri kesit tesirlerini s 'ye göre değişen $\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{M}(s)$ fonksiyonlarını hesaplamaktır.

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = T_t$:Eksenel Normal Kuvvet

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = T_n$:Kesme Kuvveti

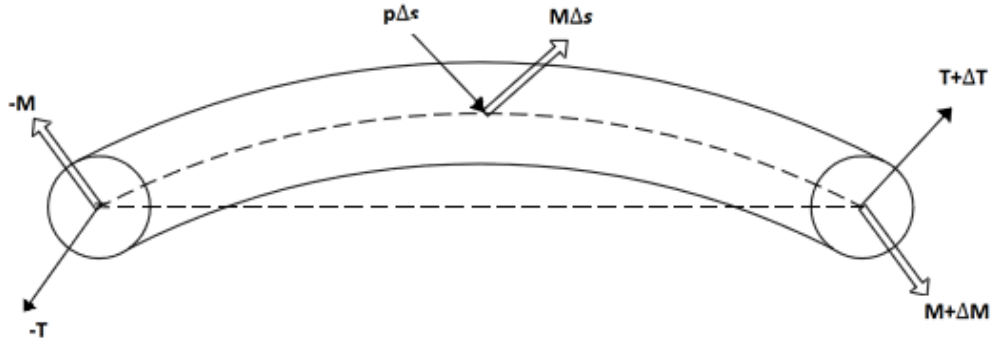
$\mathbf{T} \cdot \mathbf{b} = T_b$:Kesme Kuvveti

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = M_t$:Burulma Momenti

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M_n$:Eğilme Momenti

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{b} = M_b$:Eğilme Momenti

$\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{M}(s)$ fonksiyonları ile dış kuvvetler arasında türevsel bir bağıntı mevcuttur. Bu diferansiyel bağıntı Δs uzunluğunda bir çubuk elemanın üzerine ve kesit yüzlerine tesir eden kuvvetlerle dengede olması şartı ile bulunur.



Şekil.3.5 Denge durumu

Denge şartları kullanılarak $\mathbf{T}$ vektörü doğrultusunda denge ve A noktasına göre moment alınarak,

$$-\mathbf{T} + \mathbf{T} + \Delta\mathbf{T} + \mathbf{p} \cdot \Delta s = 0$$

$$-M + (M + \Delta M) + \mathbf{m} \cdot \Delta s + \Delta \mathbf{r} \times (\mathbf{T} + \Delta\mathbf{T}) = 0$$

denklemleri elde edilir ve sadeleştirme yapıp limite geçilirse,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} = 0 \quad (3.8.)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} = 0 \quad (3.9.)$$

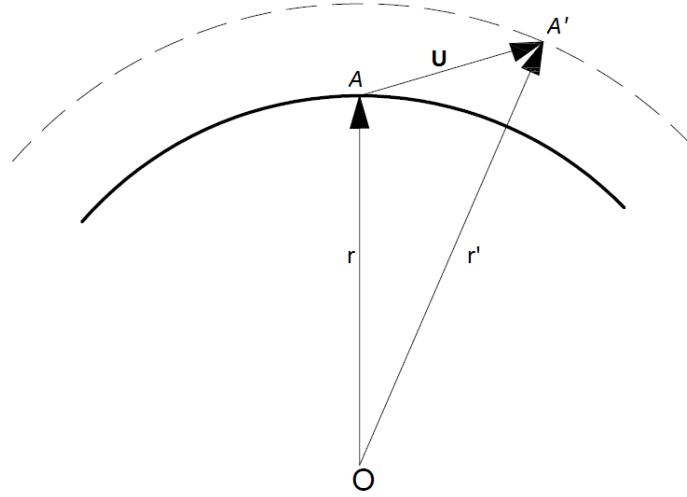
diferansiyel denge denklemleri elde edilir.

3.1.6. Uygunluk denklemleri

Çubuk şekil değiştirdikten sonra eksen üzerinde herhangi bir A noktası A' noktasına gelecektir. AA' vektörüne yer değiştirme vektörü denir ve

$$\mathbf{AA}' = \mathbf{U}(s) \quad (3.10.)$$

ile gösterilir.



Şekil 3.6. Çubuk ekseninde yer değiştirme

$U(s)$ fonksiyonunun bilinmesi ile çubuk ekseninin deformasyondan sonraki durumu belli olur.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{U} \quad (3.11.)$$

Çubuk şekil değiştirdikten sonra deforme olmuş kesitin düzlemi içindeki sapmaları ihmal edilmiştir. $\mathbf{U}(s)$ vektörü, dik kesitin ağırlık merkezine ait ötelenmesini ve $\boldsymbol{\Omega}(s)$ ise ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi gösterir. Bu iki vektör aynı cisme ait dik kesite etki ettiğinden dolayı aralarında diferansiyel bir bağıntı vardır.

Çubuk şekil değiştirmesi için önemli iki vektör daha vardır. Bunlar birim uzunluklu bir çubuk elemanı için tarif edilmiş rölatif birim değerlerdir. Birisi rölatif birim kayma vektörü $\boldsymbol{\gamma}$, diğeri ise rölatif birim dönme vektörü $\mathbf{w}$ 'dur.

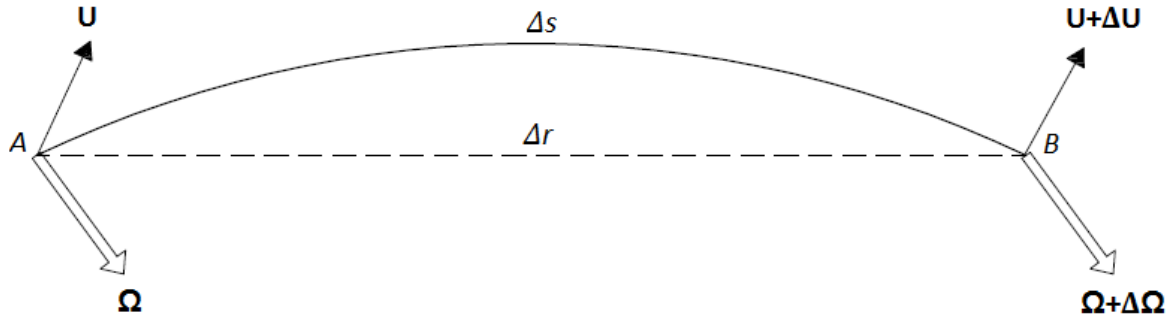
$\boldsymbol{\gamma}$ vektörü, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ alınmak şartıyla,

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{ds} \right)_{\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}} = \boldsymbol{\gamma} \quad (3.12.)$$

$\boldsymbol{\gamma}$ vektörü birim çubuk elemanının şekil değiştirmesini göstermektedir. $\mathbf{w}$ vektörü ise,

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \quad (3.13.)$$

birim boyun dönmesi olarak tarif edilir. Hesaplamalarda, $\boldsymbol{\gamma}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin de $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{\Omega}$ vektörleri gibi şiddetleri çok küçük olduğu kabul edilmektedir.



Şekil 3.7. Çubuktaki yer değiştirme ve dönmeler

Çubuk ekseninde birbirine çok yakın A ve B noktaları ele alalım (Şekil 3.7.). B noktasındaki yer değiştirmenin A'dan olan farkı $\Delta\mathbf{U}$ ile gösterilmiştir. Bu farkın iki nedeni vardır. Birincisi, AB çubuk elemanının şekil değiştirmesi dolayısıyla B noktası A'ya göre $\boldsymbol{\gamma} \Delta s$ kadar farklı hareket eder. İkincisi, A'dan geçen kesit $\mathbf{\Omega}$ ile gösterilen bir dönme yapınca B noktası da $\mathbf{\Omega} \times \Delta \mathbf{r}$ ile gösterilen bir hareket yapacaktır. Buna göre,

$$\Delta\mathbf{U} = \boldsymbol{\gamma} \Delta s + \mathbf{\Omega} \times \Delta \mathbf{r} \quad (3.14.)$$

denklemini elde edilir ve her iki taraf Δs değerine bölünüp limite geçilirse,

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{t} \quad (3.15.)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem $\mathbf{U}$ vektörü ile $\mathbf{\Omega}$ arasında gösterilen ifadeye uygunluk şartı denilmektedir.

$$\frac{d\Omega}{ds} - \mathbf{w} = 0 \quad (3.16.)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t} \times \Omega - \gamma = 0 \quad (3.17.)$$

şeklinde ifade edilebilir.

γ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ takımındaki bileşenleri, γ_t birim uzamayı, γ_n ve γ_b değeri $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ doğrultularındaki kaymaları gösterir. Aynı zamanda w_t değeri burulmadaki birim dönme açısıdır. Ayrıca w_n ve w_b ise $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ eksenleri etrafındaki eğilme dolayısıyla meydana gelen rölatif birim dönmelerdir.

3.1.7. Kesit Tesirleri İle Şekil Değiştirme Arasındaki İlişki

γ ile $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{w}$ ile $\mathbf{M}$ vektörleri arasındaki ilişki malzeme bünyesini belirtmektedir.

$$\mathbf{T} = f_1(\gamma) \quad (3.18.)$$

$$\mathbf{M} = f_2(\mathbf{w}) \quad (3.19.)$$

Burada f_1 ve f_2 ilgili vektörler arasındaki ilişkiyi gösterir ve vektörlerin koordinatları T_1, T_2, T_3 , 'e karşılık $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ve M_1, M_2, M_3 'e karşılık w_1, w_2, w_3 olsun. Kapalı formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 \\ T_2 &= C_{21}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 \\ T_3 &= C_{31}\gamma_1 + C_{32}\gamma_2 + C_{33}\gamma_3 \end{aligned} \quad (3.20.)$$

veya kısaca indisel notasyonda ifade edilirse,

$$T_i = \sum C_{ij} \cdot \gamma_j \quad (3.21.)$$

benzer şekilde,

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}w_1 + D_{12}w_2 + D_{13}w_3 \\ M_2 &= D_{21}w_1 + D_{22}w_2 + D_{23}w_3 \\ M_3 &= D_{31}w_1 + D_{32}w_2 + D_{33}w_3 \end{aligned} \quad (3.22.)$$

veya indisel notasyonda ifade edilirse,

$$M_i = \sum D_{ij}w_j \quad (3.23.)$$

Burada C_{ij} ve D_{ij} ile gösterilen katsayılar yalnız çubuk malzemesine ve kesit geometrisine bağlı olup, γ ve w değişkenlerinden bağımsızdır. Ayrıca malzeme homojen ve izotrop, kesitin de üniform olduğu kabul edilirse, bu katsayıların s değişkeninden bağımsız olur. C_{ij} ve D_{ij} katsayılarına çubuğun kaymaya ve dönmeye karşı rijitlikleri olup, simetriktir.

Matris bileşenleri (**t**, **n**, **b**) takımında ele alındığında,

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & C_{nb} \\ 0 & C_{bn} & C_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.24.)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & D_{nn} & D_{nb} \\ 0 & D_{bn} & D_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.25.)$$

Bu özellik γ_t eksenel birim uzamasının yalnız T_t eksenel normal kuvvete ve w_t birim dönme açısından M_t burulma momentine bağlı olmasına dayanır.

Yapılan kabüllerde ise (**n**, **b**) takımı asal eksen olan (ξ , η) ile çakışmaktadır. Bundan dolayı rijitlik matrisleri aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.26.)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & D_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & D_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.27.)$$

Rijitlik matrislerinin determinantları $|C_{ij}| \neq 0$ ve $|D_{ij}| \neq 0$ ise, bu matrislerin tersi alınabilir.

$$\boldsymbol{\gamma} = [C]^{-1} \mathbf{T} \quad (3.28.)$$

$$\mathbf{w} = [D]^{-1} \mathbf{M} \quad (3.29.)$$

3.1.8. Vektörel Denklemlerin (t, n, b) Takımına Dönüştürülmesi

Elastik çubuk teorisi kurulurken bilinmeyenler altı adet vektörden meydana gelmektedir. Bunlar kesit tesirleri, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{M}$; şekil değiştirme elemanları $\boldsymbol{\gamma}$ ve $\mathbf{w}$; yer değiştirme ve dönme, $\mathbf{U}$ ve $\boldsymbol{\Omega}$ vektörleridir. Bu denklemler daha önceki bölümlerde elde edilmişti.

Bunlardan denge denklemleri,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.8.)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.9.)$$

uygunluk denklemleri,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.16.)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Upsilon} = \mathbf{0} \quad (3.17.)$$

ve bünye denklemleri,

$$\mathbf{\Upsilon} = [\mathbf{C}]^{-1} \mathbf{T} \quad (3.28.)$$

$$\mathbf{w} = [\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{M} \quad (3.29.)$$

şeklinde elde edilmektedir.

(3.28.) ve (3.29.) bağıntıları (3.16.) ve (3.17.) denklemlerinde yerine konulduğunda,

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - [\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (3.30.)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - [\mathbf{C}]^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (3.31.)$$

ifadeleri elde edilecektir. Böylece önceden elde edilmiş olan altı denklem, dört adet vektörel denkleme indirgenmiş olur. Bunlar sırasıyla,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.8.)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (3.9.)$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - [\mathbf{D}]^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad (3.30.)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{\Omega} - [\mathbf{C}]^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (3.31.)$$

Burada hesaplanması gereken iç kuvvetler, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{M}$ ile; yer değiştirme ve dönme, $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{\Omega}$ olmak üzere dört vektörel büyüklük vardır. Hesaplarda kolaylık sağlamak için skaler denklemlerle işlem yapılması uygun olacaktır. Eksen takımı olarak $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ hareketli

takımı alınmış olup, bu vektörel ifadeler sözü edilen hareketli takıma aktarılmıştır. Hesaplarda serbest değişken s yerine ϕ ifadesi kullanılmıştır. Aralarında

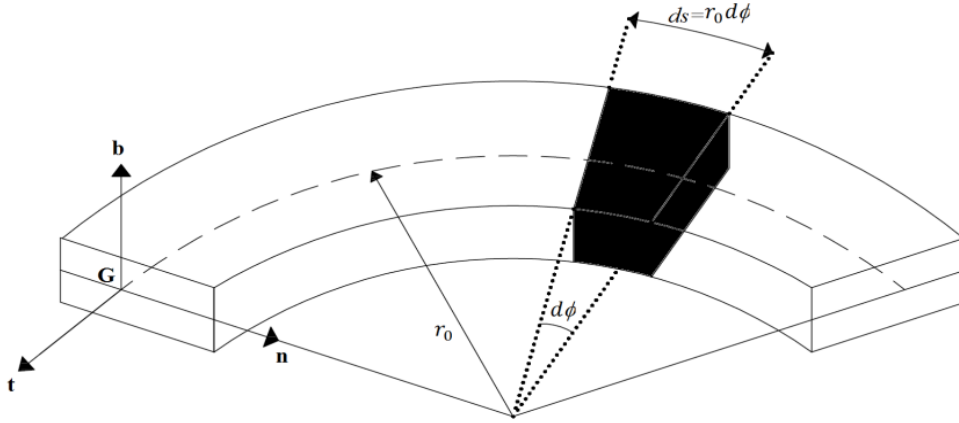
$$ds = r d\phi \quad (3.32.)$$

bağıntısı vardır (Şekil 3.8.).

Eğrilik ise,

$$\chi = \frac{1}{r} \quad (3.33.)$$

şeklinde tarif edilir.



Şekil 3.8. Daire eksenli çubukta eğrilik ilişkisi

Frenet formülleri dikkate alınarak vektörel denklemlerin hareketli $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ takımına aktarılması aşağıdaki gibi yapılır ve bu ifadeler $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ takımındaki bileşenlere ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b} \\ \mathbf{p} &= p_t \mathbf{t} + p_n \mathbf{n} + p_b \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.34.)$$

elde edilir. (3.4.) ve (3.34.) denklemleri (3.8.) denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n - rp_t \quad (3.35.)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t + r\tau T_b - rp_n \quad (3.36.)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = -\tau r T_n - rp_b \quad (3.37.)$$

skaler denklemleri elde edilir. Aynı şekilde (3.9.) denkleminde ifadeler hareketli (**t**, **n**, **b**) takımındaki bileşenlere ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= M_t \mathbf{t} + M_n \mathbf{n} + M_b \mathbf{b} \\ \mathbf{m} &= m_t \mathbf{t} + m_n \mathbf{n} + m_b \mathbf{b} \\ \mathbf{T} &= T_t \mathbf{t} + T_n \mathbf{n} + T_b \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.38.)$$

elde edilir. (3.4.) ve (3.38.) denklemleri (3.9.) denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - rm_t \quad (3.39.)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + r\tau M_b + rT_b - rm_n \quad (3.40.)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -r\tau M_n - rT_n - rm_b \quad (3.41.)$$

skaler denklemleri elde edilir. (3.16.) denkleminde ilgili ifadeler bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} &= \Omega_t \mathbf{t} + \Omega_n \mathbf{n} + \Omega_b \mathbf{b} \\ \mathbf{w} &= w_t \mathbf{t} + w_n \mathbf{n} + w_b \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.42.)$$

şeklinde olur. (3.4.) ve (3.42.) denklemleri (3.16.) ifadesinde yerine konulursa

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + r w_t \quad (3.43.)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + r\tau\Omega_b + r w_n \quad (3.44.)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = -r\tau\Omega_n + r w_b \quad (3.45.)$$

skaler denklemleri elde edilir.

(3.17.) denkleminde ilgili ifadeler bileşenlerine ayrılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U_t \mathbf{t} + U_n \mathbf{n} + U_b \mathbf{b} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \gamma_t \mathbf{t} + \gamma_n \mathbf{n} + \gamma_b \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.46.)$$

şeklinde düzenlenir. (3.4.) ve (3.40.) ifadeleri (3.17.) denklemlerinde yerine konulursa ,

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + r\gamma_t \quad (3.47.)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -U_t + r\tau U_b + r\Omega_b + r\gamma_n \quad (3.48.)$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -r\tau U_n - r\Omega_n + r\gamma_b \quad (3.49.)$$

denklemleri elde edilir.

Böylece eğri eksenli çubuklarda, statik yükler altındaki davranışı idare eden genel denklemler vektörel formda elde edilmiş ve sonra sayısal çözüm yapılacağından, denklemler hareketli takıma aktarılmıştır. Böylece uzaysal çubuklarda genel olarak on iki adet birinci mertebeden diferansiyel denklemler elde edilmiştir.

Bu on iki adet birinci mertebeden diferansiyel denklemler aşağıda toplu halde verilmektedir. Bu diferansiyel denklemler, deplasman ve dönmeye karşılık kuvvet ve kuvvet çifti olarak sıralanırsa,

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + r\gamma_t \quad (3.47.)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -U_t + r\tau U_b + r\Omega_b + r\gamma_n \quad (3.48.)$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -r\tau U_n - r\Omega_n + r\gamma_b \quad (3.49.)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \Omega_n + rw_t \quad (3.43.)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + r\tau\Omega_b + rw_n \quad (3.44.)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = -r\tau\Omega_n + rw_b \quad (3.45.)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n - rp_t \quad (3.35.)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t + r\tau T_b - rp_n \quad (3.36.)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = -\tau r T_n - rp_b \quad (3.37.)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - rm_t \quad (3.39.)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + r\tau M_b + rT_b - rm_n \quad (3.40.)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -r\tau M_n - rT_n - rm_b \quad (3.41.)$$

elde edilir.

3.1.9. Düzlemsel Çubuklar

Düzlemsel hal, eksen eğrisi bir düzlem içinde yer alan çubuklardır. Düzlemsel çubuklarda tabi burulma,

$$\tau = 0 \quad (3.50.)$$

ve binormal birim vektör,

$$\mathbf{b} = \text{sabit} \quad (3.51.)$$

Düzlemsel çubukların statik denklemleri oluşturulurken, çubuk malzemesinin elastik ve izotrop olduğu, kesitin kayma ve geometrik merkezlerinin çakıştığı, çift simetrlili kesitlerde birinci mertebe teorisinin geçerli olduğu, kesit düzleminde bulunan $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ birim vektörleri ile kesit asal eksenlerinin çakıştığı kabulü yapılacaktır. Çubuğa ait eksenel ve kayma ile burulma ve eğilme rijitlik matrisleri sırasıyla,

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.52.)$$

ve

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & D_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & D_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.53.)$$

olmaktadır. Diferansiyel denklemlerde,

$$\gamma_t = \frac{T_t}{C_{tt}}$$

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \frac{T_n}{C_{nn}} \\ \gamma_b &= \frac{T_b}{C_{bb}}\end{aligned}\tag{3.54.}$$

ve

$$\begin{aligned}w_t &= \frac{M_t}{D_{tt}} \\ w_n &= \frac{M_n}{D_{nn}} \\ w_b &= \frac{M_b}{D_{bb}}\end{aligned}\tag{3.55.}$$

ifadeleri yerine konulacaktır. Eksenel ve kayma rijitlikleri ile, burulma ve eğilme rijitlik terimleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}C_{tt} &= EA \\ C_{nn} &= GA/\alpha_n \\ C_{bb} &= GA/\alpha_b \\ D_{tt} &= GI_t \\ D_{nn} &= EI_n \\ D_{bb} &= EI_b\end{aligned}\tag{3.56.}$$

alınacaktır. Burada E elastisite modülü, A kesit alanı, G kayma modülü, α_n ve α_b kayma düzeltme faktörleri, I_t burulma atalet momenti, I_n ve I_b ise $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ eksenlerine göre atalet momentlerini göstermektedir.

Şimdi bu ifadeler on iki adet birinci mertebeden diferansiyel denklemlerde yerine konulursa,

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + r \frac{T_t}{C_{tt}}\tag{3.57.}$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -U_t + r\Omega_b + r \frac{T_n}{C_{nn}}\tag{3.58.}$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -r\Omega_n + r \frac{T_b}{C_{bb}}\tag{3.59.}$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + r \frac{M_t}{D_{tt}} \quad (3.60.)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + r \frac{M_n}{D_{nn}} \quad (3.61.)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = r \frac{M_b}{D_{bb}} \quad (3.62.)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n - r p_t \quad (3.63.)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t - r p_n \quad (3.64.)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = -r p_b \quad (3.65.)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - r m_t \quad (3.66.)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + r T_b - r m_n \quad (3.67.)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -r T_n - r m_b \quad (3.68.)$$

şeklinde düzenlenir.

Elde edilen yukarıdaki on iki adet birinci mertebeden diferansiyel denklemler incelendiğinde iki grup dikkat çekmektedir. Birinci grup $U_t, U_n, \Omega_b, T_t, T_n, M_b$ gibi altı büyüklük, sadece (3.57.), (3.58.), (3.62.), (3.63.), (3.64.) ve (3.68.) denklemlerinde bulunmakta ve ikinci grupta da $U_b, \Omega_t, \Omega_n, T_b, M_t, M_n$ gibi altı büyüklük ise (3.59.), (3.60.), (3.61.), (3.65.), (3.66.) ve (3.67.) denklemlerinde yer almaktadır. Böylece hem bilinmeyenler hem de denklemler altışar adet olmak üzere iki gruba ayrılırsa, hesaplamalar için büyük kolaylık sağlanacaktır.

- I. Grup $U_t, U_n, \Omega_b, T_t, T_n, M_b$
- II. Grup $U_b, \Omega_t, \Omega_n, T_b, M_t, M_n$

Birinci grupta bilinmeyen kuvvet ve kuvvet çifti, T_t, T_n, M_b gibi iç kuvvetler t, n düzleminde ve çubuk ekseninin bulunduğu düzlemde. Bu gruptaki diğer büyüklükler U_t, U_n, Ω_b gibi yer değiştirme ve dönmeler ise düzlem içinde bulunan değerlerdir. Ayrıca dış kuvvet bileşenleri olan p_t, p_n ve m_b değerleri de aynı düzlemde etmektedir. O halde birinci grup problemde etkiler ve sonuçlar çubuk düzlemi içinde bulunmaktadır.

İkinci grupta yer T_b, M_t, M_n iç kuvvet ve kuvvet çiftine ait tesirler düzlemine dik doğrultuda olmaktadır ve aynı zamanda U_b, Ω_t, Ω_n gibi yer değiştirme ve dönmeler de düzlemine dik doğrultudadır. Ayrıca dış kuvvet bileşenleri olan p_b, m_t, m_n değerleri düzlemine dik etki etmektedir. O halde ikinci gruptaki etki ve sonuçlar düzlemine dik olmaktadır.

Bu durumda, düzlemsel elde ettiğimiz on iki adet diferansiyel denklemin altısı düzlemi içinde, altısı da düzlemine dik olarak ifade edebiliriz.

3.1.10 Düzlemi İçinde Yüklü Hal İçin Kanonik Denklemler

Bu grupta, kanonik halde elde edilmiş denklemler,

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + r \frac{T_t}{c_{tt}} \quad (3.57.)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -U_t + r \Omega_b + r \frac{T_n}{c_{nn}} \quad (3.58.)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = r \frac{M_b}{D_{bb}} \quad (3.62.)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n - r p_t \quad (3.63.)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t - r p_n \quad (3.64.)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -r T_n - r m_b \quad (3.68.)$$

şeklinde düzlemi içinde yüklü hal için 6 adet olarak elde edilir.

3.1.11. Düzlemine Dik Yüklü Hal İçin Kanonik Denklemler

Bu gruptaki kanonik denklemler ise,

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -r\Omega_n + r\frac{T_b}{c_{bb}} \quad (3.59.)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + r\frac{M_t}{D_{tt}} \quad (3.60.)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + r\frac{M_n}{D_{nn}} \quad (3.61.)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = -rp_b \quad (3.65.)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - rm_t \quad (3.66.)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + rT_b - rm_n \quad (3.67.)$$

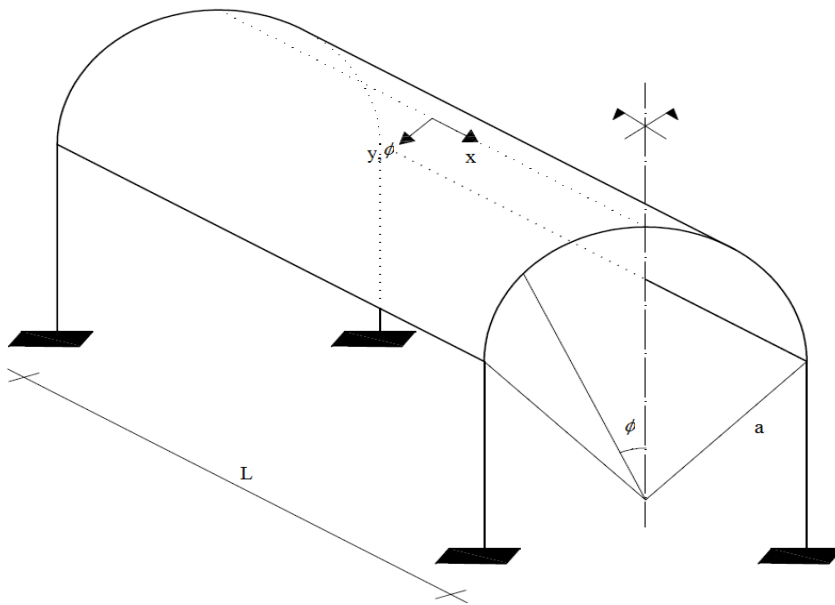
şeklinde düzlemine dik yüklü hal için 6 adet denklem olarak yer almaktadır.

3.2. Dairesel Silindirik Tonzların Kanonik Denklemleri

Hal, fabrika, spor salonları, hangar ve terminal binaları gibi ara mesneti seyrek ve büyük açıklık isteyen yerlerde silindirik tonozdan yararlanılmaktadır.

Silindirik bir kabuk geometrik olarak, kapalı tüm silindirden boyuna kesilmiş tek eğrilikli bir çatıdır. Çatı, eksenine paralel iki doğrultu ile sınırlandırılmıştır. Uçlarında da, eksenine dik iki eğri kenardan oluşmaktadır.

Bu çalışmada Schorer teorisi (1935) kullanılarak, açık tonoz çatı sistemlerin denklemleri özetlenmiştir.



Şekil 3.9. Silindirik tonoz çatı sistemi

Yapı ana taşıyıcı sistemi kalkan duvarları (travers), kabuk ve kenar kirişlerince taşınmaktadır. Yekpare duvar veya kafes kemer şeklinde olabilmektedir. Bu tip yapılar, Zaiss-Dywidag sistemi olarak da bilinmektedir. Kalkan duvarının kendi düzlemi içinde rijit, diğer yönde rijit olmadığı kabul edilmektedir. Kabuğa etki eden dış yükün üniform, düşey ve statik olduğu düşünülmektedir.

3.2.1. Yapılan Kabuller

Schorer teorisine göre ince kabuklarda yapılan kabullere ek olarak aşağıdaki kabuller yapılmaktadır:

- Poisson oranı sıfırdır ($\nu \approx 0$).
- Kabuk boyuna doğrultusundaki M_x momenti, M_ϕ ye göre küçük değerde olduğundan ihmal edilmektedir ($M_x \approx 0$).

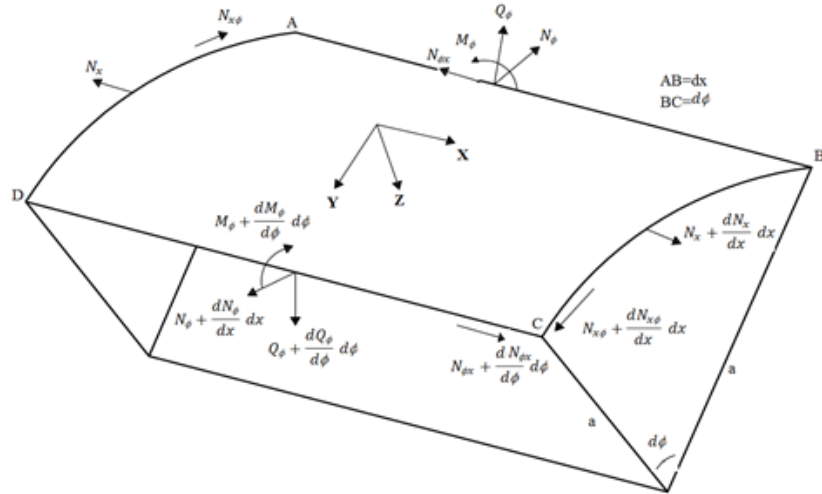
- c.) $M_{x\phi}$ ve $M_{\phi x}$ burulma momentleri, M_ϕ 'ye göre çok küçük değerde olduğundan ihmal edilmektedir ($M_{x\phi} = M_{\phi x} \approx 0$).
- d.) ε_2 ve γ_{12} uzama oranları boyuna doğrultudaki uzama oranı, ε_1 yanında ihmal edilmektedir ($\varepsilon_2 = \gamma_{12} \approx 0$).

Bu kabuller altında geriye kalan gerilme bileşkelerinin

$$N_x, N_\phi, N_{x\phi}, N_{\phi x}, M_\phi, Q_\phi, Q_x$$

olduğu görülür. Ayrıca $M_x \approx 0$ olduğundan, y eksenine göre moment alındığında, Q_x gerilme bileşkesi de düşmektedir.

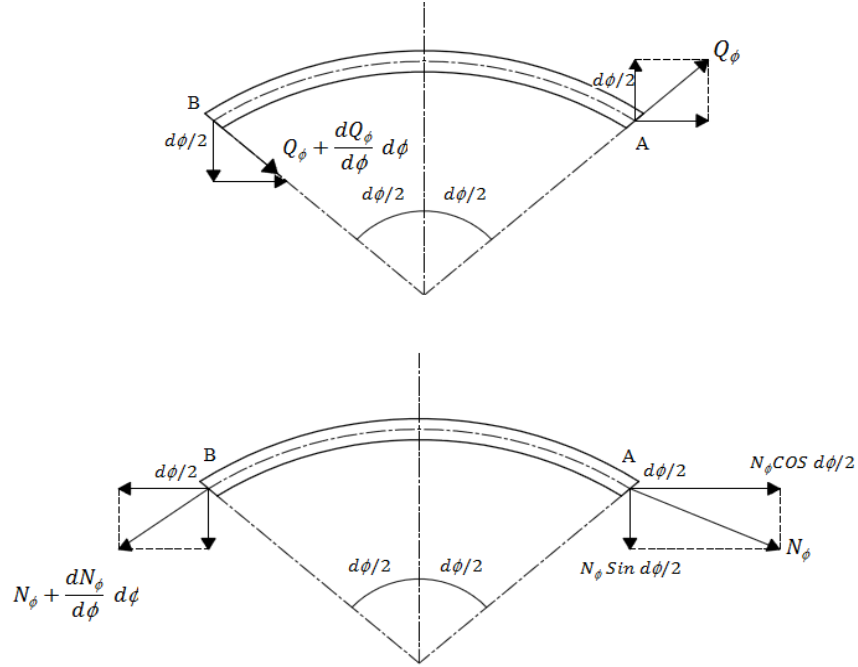
3.2.2. Denge Denklemleri



Şekil 3.10. Silindirik kabukta iç kuvvetlerin tarifi

x doğrultusunda denge şartı: ($N_x, N_{\phi x}, X$)

$$\frac{dN_x}{dx} + \frac{1}{a} \frac{dN_{\phi x}}{d\phi} + X = 0 \quad (3.68.)$$



Şekil 3.11. Teğet doğrultuda iç kuvvetlerin bileşenleri
Kesitin teğeti doğrultusunda denge şartı: $(N_{x\phi}, N_\phi, Q_\phi, Y)$

$$\frac{dN_{x\phi}}{dx} + \frac{1}{a} \frac{dN_\phi}{d\phi} + Y = 0 \quad (3.69.)$$

Kesitin normali doğrultusunda denge şartı: (Q_ϕ, N_ϕ, Z)

$$\frac{1}{a} \frac{dQ_\phi}{d\phi} + \frac{1}{a} N_\phi + Z = 0 \quad (3.70.)$$

x eksenine göre moment denge şartı: (M_ϕ, Q_ϕ)

$$\frac{1}{a} \frac{dM_\phi}{d\phi} - Q_\phi = 0 \quad (3.71.)$$

y eksenine göre moment denge şartı: (Q_x)

$$Q_x = 0$$

Normale göre denge şartı: $(N_{x\phi}, N_{\phi x})$

$$N_{x\phi} - N_{\phi x} = 0 \quad (3.72.)$$

olarak bulunur.

3.2.3. Bünye Denklemleri:

$$N_x = Et\varepsilon_1 \quad (3.73.)$$

$$M_\phi = \frac{-Et^3}{12} \chi_2 = -D\chi_2 \quad (3.74.)$$

Burada $D = \frac{Et^3}{12}$, kabuk eğilme rijitliğidir.

Gerilme bileşkeleri, orta düzlemin uzama oranları ve eğrilik değişimleri cinsinden ifade edilmektedir.

3.2.4. Uzama Oranı- Deplasman Denklemleri

x doğrultusunda uzama oranı,

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx} \quad (3.75.)$$

y = aφ doğrultusunda uzama oranı,

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{dv}{d\phi} - w \right) \quad (3.76.)$$

Kayma açısı γ_{12} ise,

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{a} \frac{du}{d\phi} + \frac{dv}{dx} \cong 0 \quad (3.77.)$$

olarak bulunur.

3.2.5. Eğrilik-Deplasman İlişkisi

Orta yüzeyin y-dogrultusundaki eğrilik değişimi χ_2

$$\chi_2 = \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{dv}{d\phi} \right) \quad (3.78.)$$

Schorer teorisine göre M_x ihmal edilebilir olduğundan orta yüzeyin x-doğrultusundaki eğrilik değişimi χ_1 de ihmal edilmektedir.

$$\chi_1 = 0 \quad (3.79.)$$

3.2.6. Gerilme Bileşkeleri-Deplasman Denklemleri

(3.73.) ve (3.74.) denklemlerinde, (3.75.) ve (3.78.) denklemlerinde yerine yazılırsa gerilme bileşkeleri deplasmanların fonksiyonları olarak elde edilir.

$$N_x = Et \frac{du}{dx} \quad (3.80.)$$

$$M_\phi = -D \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} + \frac{dv}{d\phi} \right)$$

Eğilme ve burulma momentlerine u ve v deplasmanlarından gelen katkı ihmal edilebilir mertebededir. Bu durumda M_ϕ ifadesi;

$$M_\phi = -D \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} \right) \quad (3.81.)$$

3.2.7. M_ϕ ve N_x Arasındaki İlişki

(3.68.) ve (3.72.) denklemleri ile bunlar arasındaki denge denklemleri kullanılarak, M_ϕ ve N_x dışında kalan gerilme bileşkeleri yok edilip, bu iki gerilme bileşkesi arasında bir bağıntı bulunur. (3.70.) ve (3.71.) denklemlerinde Q_ϕ kesme kuvvetini yok etmek için, (3.71.) denge denkleminin ϕ ye göre bir kez türevi alınıp,

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 M_\phi}{d\phi^2} - \frac{dQ_\phi}{d\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ_\phi}{d\phi} = \frac{1}{a} \frac{d^2 M_\phi}{d\phi^2}$$

bulunan ifade yerine konursa,

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 M_\phi}{d\phi^2} + \frac{1}{a} N_\phi + Z = 0 \quad (3.82.)$$

elde edilir. Ayrıca (3.68.) (3.69.) ve (3.72.) denklemlerinde $N_{x\phi}$ ve $N_{\phi x}$ gerilme bileşkelerini yok etmek için, (3.72.) bağıntısı dikkate alınarak (3.68.) denkleminin x 'e göre ve (3.69.) denkleminin de ϕ ye göre birkez türevleri alınır,

$$\frac{d^2 N_x}{dx^2} + \frac{1}{a} \frac{d^2 N_{\phi x}}{d\phi dx} + \frac{dX}{dx} = 0 \quad (3.83.)$$

$$\frac{d^2 N_{x\phi}}{dx d\phi} + \frac{1}{a} \frac{d^2 N_{\phi}}{d\phi^2} + \frac{dY}{d\phi} = 0 \quad (3.84.)$$

denklemleri bulunur. (3.84.) denkleminde $\frac{d^2 N_{x\phi}}{dx \cdot d\phi}$ terimi yalnız bırakılıp (3.83.) de yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2 N_x}{dx^2} - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 N_{\phi}}{d\phi^2} + \frac{dX}{dx} + \frac{1}{a} \frac{dY}{d\phi} = 0 \quad (3.85.)$$

elde edilir. (3.82.) denkleminin ϕ ye göre iki kez türevi alınıp N_{ϕ} gözükten terim yalnız bırakılırsa,

$$\frac{d^2 N_{\phi}}{d\phi^2} = -\frac{1}{a} \frac{d^4 M_{\phi}}{d\phi^4} - \alpha \frac{d^2 Z}{d\phi^2} \quad (3.86.)$$

bulunur. Son ifade (3.85.) de yerine yazılırsa M_{ϕ} ve N_x e bağlı denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{1}{a^4} \frac{d^4 M_{\phi}}{d\phi^4} + \frac{1}{a} \frac{d^2 N_x}{dx^2} + \frac{1}{a} \left(\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{a d\phi} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{d^2 Z}{d\phi^2} = 0 \quad (3.87.)$$

3.2.8. w Cinsinden Olayı İdare Eden Diferansiyel Denklem

Dairesel silindiri kabukta w cinsinden olayı idare eden yüksek mertebeden tek bir diferansiyel denklem elde edilecektir. Bunun için önce (3.76.) ve (3.77.) denklemlerinden v yok edilmektedir.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{a} \left(\frac{dv}{d\phi} - w \right) = 0 \rightarrow \frac{1}{a} \frac{dv}{d\phi} = \frac{w}{a} \quad (3.88.)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{a} \frac{du}{d\phi} + \frac{dv}{dx} = 0 \rightarrow \frac{1}{a} \frac{du}{d\phi} = -\frac{dv}{dx} \quad (3.89.)$$

bulunur. Denklem (3.88.) de x'e göre bir kez türev alınırsa,

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 v}{d\phi dx} = \frac{1}{a} \frac{dw}{dx} \quad (3.90.)$$

denklemini elde edilir. Denklem (3.89.) da ϕ' ye göre birkez türev alınırsa,

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 u}{d\phi^2} = \frac{d^2 v}{d\phi dx} \quad (3.91.)$$

olur. (3.91.) ifadesi (3.90.) yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 u}{d\phi^2} = -\frac{1}{a} \frac{dw}{dx} \quad (3.92.)$$

elde edilir. (3.80.) denklemi x'e göre iki ϕ' ye göre de iki kez türev alınırsa,

$$N_x = Et \frac{du}{dx} \quad (3.80.)$$

$$\frac{d^4 N_x}{d\phi^2 dx^2} = Et \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{d^2 u}{d\phi^2} \right) \quad (3.93.)$$

(3.93.) denkleminde parantez içindeki ifadenin karşılığı, (3.92.) denkleminden çekilip buradan yerine yazılırsa,

$$\frac{d^4 N_x}{d\phi^2 dx^2} = Et \frac{d^3}{dx^3} \left(-a \frac{dw}{dx} \right) \quad (3.94.)$$

elde edilir. M_ϕ ve N_x arasındaki ilişkiyi gösteren (3.87.) denklemi ϕ' ye göre iki kez türev alınırsa,

$$\frac{1}{\alpha^4} \frac{d^6 M_\phi}{d\phi^6} + \frac{1}{\alpha} \frac{d^4 N_x}{d\phi^2 dx^2} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d^3 X}{dx d\phi^2} - \frac{d^3 Y}{\alpha d\phi^3} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^4 Z}{d\phi^4} = 0 \quad (3.95.)$$

bulunur. Bu ifadede geçen M_ϕ , ve, (3.81.) denkleminde ve N_x ' in x ile ϕ 'ye göre iki kez türevini gösteren terim de, (3.94.) den alınıp yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\alpha^4} \frac{d^6}{d\phi^6} \left(\frac{-D}{\alpha^2} \frac{d^2 w}{d\phi^2} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(-\alpha E t \frac{d^4 w}{dx^4} \right) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d^3 X}{dx d\phi^2} - \frac{d^3 Y}{\alpha d\phi^3} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^4 Z}{d\phi^4} = 0 \quad (3.96.)$$

olur. Bu son ifadenin de türevleri alınıp düzenlenirse,

$$\frac{D}{\alpha^6} \frac{d^8 w}{d\phi^8} + E t \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{d^3 X}{\alpha dx d\phi^2} + \frac{d^3 Y}{\alpha^2 d\phi^3} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^4 Z}{d\phi^4} = 0$$

bulunur. Ayrıca tüm ifade $\frac{\alpha^6}{D}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{d^8 w}{d\phi^8} + \frac{\alpha^6 E t}{D} \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\alpha^5}{D} \frac{d^3 X}{dx d\phi^2} + \frac{\alpha^4}{D} \frac{d^3 Y}{d\phi^3} - \frac{\alpha^4}{D} \frac{d^4 Z}{d\phi^4} = 0 \quad (3.97.)$$

elde edilir. Burada,

$$D = \frac{E t^3}{12} \quad \text{ve} \quad I = \frac{1 t^3}{12}$$

Olduğundan, $D = EI$ yazılıp ifade düzenlenirse,

$$\frac{d^8 w}{d\phi^8} + \frac{\alpha^6 t}{I} \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{\alpha^5}{EI} \frac{d^3 X}{dx d\phi^2} + \frac{\alpha^4}{EI} \frac{d^3 Y}{d\phi^3} - \frac{\alpha^4}{EI} \frac{d^4 Z}{d\phi^4} = 0$$

bulunur. Son ifadede w içeren terimler yalnız bırakılırsa, w cinsinden olayı idare eden diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^8 w}{d\phi^8} + \frac{\alpha^6 t}{I} \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\alpha^5}{EI} \frac{d^3 X}{dx d\phi^2} + \frac{\alpha^4}{EI} \left(\frac{d^4 Z}{d\phi^4} - \frac{d^3 Y}{d\phi^3} \right) = 0 \quad (3.98.)$$

$$w = f(\phi) \cos(kx) \quad (3.99.)$$

buna göre $\alpha k = \pi \frac{\alpha}{L} < 1 \rightarrow \frac{L}{\alpha} > \pi$

yani uzun tonoz halinde Schorer teorisi geçerli olmaktadır.

3.2.9. Olayı İdare Eden Diferansiyel Denklemin Kanonik Halde Elde Edilmesi

Buraya kadar elde edilen bağıntılardan kullanılacak olanlar homojen kısımları ile toplu halde yazılırsa,

Denge denklemlerinden,

$$\frac{dN_x}{dx} + \frac{1}{a} \frac{dN_{\phi x}}{d\phi} + X = 0 \quad (3.68.)$$

$$\frac{dN_{x\phi}}{dx} + \frac{1}{a} \frac{dN_{\phi}}{d\phi} + Y = 0 \quad (3.69.)$$

$$\frac{1}{a} \frac{dQ_{\phi}}{d\phi} + \frac{1}{a} N_{\phi} + Z = 0 \quad (3.70.)$$

$$\frac{1}{a} \frac{dM_{\phi}}{d\phi} - Q_{\phi} = 0 \quad (3.71.)$$

$$N_{x\phi} - N_{\phi x} = 0 \quad (3.72.)$$

Gerilme bileşikleri-deplasman denklemlerinden,

$$N_x = Et \frac{du}{dx} \quad (3.80.)$$

$$M_{\phi} = -D \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{d\phi^2} \right) \quad (3.81.)$$

denklemlerini elde etmiş olur.

Yukarıda görülen kısmi türevli denklemlerde, bağımlı değişkenler olarak tonozun herhangi bir kesitindeki

$$w, \theta, M_{\phi}, Q_{\phi}, N_{\phi}, N_{x\phi}, N_x, v$$

büyüklikleri alınıp bunların çözümü, eksen takımı, sınır şartları ve yükleme durumu gibi koşullarına uyacak şekilde,

$$\begin{aligned}
w &= f_1(\phi). \cos(kx) \\
\theta &= f_2(\phi). \cos(kx) \\
M_\phi &= f_3(\phi). \cos(kx) \\
Q_\phi &= f_4(\phi). \cos(kx) \\
N_\phi &= f_5(\phi). \cos(kx) \\
\frac{dN_{x\phi}}{dx} &= f_6(\phi). \cos(kx) \\
\frac{du}{dx} &= f_7(\phi). \cos(kx) \\
v &= f_8(\phi). \cos(kx)
\end{aligned} \tag{3.100.}$$

Tek değişkenli $f_i(\phi)$ fonksiyonları olarak kabul edilmektedir. Altıncı ve yedinci ifadede türevler alınmış olmasının nedeni tüm ifadelerde $\cos(kx)$ çarpanının bulunması ve ileriki işlemlerde sadeleştirmede kolaylık sağlamasıdır. Bu iki ifade daha sonra ilgili sabitlerle çarpılıp, $N_{x\phi}$ ve N_x büyüklüklerine geçilmektedir.

3.2.10. Kanonik Halde Diferansiyel Denklem Teşkili

Silindirik tonozlarda dönme, θ ;

$$\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{dw}{d\phi} \right) \tag{3.101.}$$

ifadesi (3.100.) denkleminde yerine yazılır,

$$f_2(\phi). \cos(kx) = \frac{1}{a} \frac{df_1}{d\phi} \cos(kx)$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_1}{d\phi} = a f_2 \tag{3.102.}$$

denklemini elde edilir.

(3.81.) denklemini (3.100.) denkleminde yerine yazılırsa ve düzenlenirse,

$$f_3(\phi). \cos(kx) = \frac{-D}{a^2} \frac{d^2 f_1(\phi)}{d\phi^2} \cos(kx)$$

$$f_3(\phi). \cos(kx) = \frac{-D}{a^2} \left(a \frac{df_2(\phi)}{d\phi} \right) \cos(kx)$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_2}{d\phi} = -\frac{a}{D} f_3 \quad (3.103.)$$

denklemini elde edilir.

(3.71.) denklemi (3.100.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f_4(\phi) \cdot \cos(kx) = \frac{df_3}{d\phi} \cos(kx)$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_3}{d\phi} = af_4 \quad (3.104.)$$

denklemini elde edilir.

(3.70.) denklemi (3.100.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-f_5(\phi) \cdot \cos(kx) = \frac{df_4}{d\phi} \cos(kx) - aZ$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_4}{d\phi} = -f_5 - aZ \quad (3.105.)$$

denklemini elde edilir.

(3.69.) denklemi (3.100.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f_6(\phi) \cdot \cos(kx) = -a \frac{df_5}{d\phi} \cos(kx) - aY$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_5}{d\phi} = -af_6 - aY \quad (3.106.)$$

denklemini elde edilir.

(3.68.) denklemi x' e göre türev alınır,

$$\frac{d^2 N_x}{dx^2} + \frac{1}{a} \frac{d}{d\phi} \frac{dN_{\phi x}}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{du}{dx} \right) = -\frac{1}{a} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dN_{\phi x}}{dx} \right)$$

Aşağıdaki biçimde düzenlenebilir.

$$k^2 f_7 \cos(kx) = -\frac{1}{E\tau a} \frac{df_6}{d\phi} \cos(kx)$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_6}{d\phi} = E \cdot t \cdot k^2 \cdot a \cdot f_7 \quad (3.107.)$$

denklemini elde edilir.

$$(3.77.) \text{ denklemi } \gamma_{12} = \frac{1}{a} \frac{du}{d\phi} + \frac{dv}{dx} = 0$$

x' e göre türev alınır,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{1}{a} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{dx} \right)$$

$$-k^2 f_8 \cos(kx) = -\frac{1}{a} \frac{df_7}{d\phi} \cos(kx)$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_7}{d\phi} = a \cdot k^2 \cdot f_8 \quad (3.108.)$$

denklemini elde edilir.

(3.76.) denklemi (3.100.) denkleminde yerine yazılırsa,

$$f_1(\phi) \cdot \cos(kx) = \frac{df_8}{d\phi} \cos(kx)$$

sadeleşmiş halde,

$$\frac{df_8}{d\phi} = f_1 \quad (3.109.)$$

denklemini elde edilir.

Tonoz sistemin davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıda verilen ifadeler ile yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{df_1}{d\phi} = a f_2$$

$$\frac{df_2}{d\phi} = -\frac{a}{D} f_3$$

$$\frac{df_3}{d\phi} = a f_4$$

$$\frac{df_4}{d\phi} = -f_5 - aZ$$

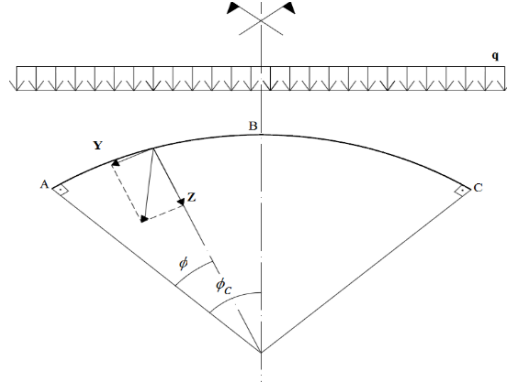
$$\frac{df_5}{d\phi} = -a f_6 - aY$$

$$\frac{df_6}{d\phi} = E \cdot t \cdot k^2 \cdot a \cdot f_7$$

$$\frac{df_7}{d\phi} = a \cdot k^2 \cdot f_8$$

$$\frac{df_8}{d\phi} = f_1$$

Yük katkıları ise aşağıda gösterilmektedir:



Şekil 3.12. Tonoz yükleme durumu

$$Y = -q \sin(\phi_c - \phi)$$

$$Z = q \cos(\phi_c - \phi)$$

şeklinde etkimektedir. Bu ifadelerde ϕ açısı A başlangıç noktasından itibaren ölçülmektedir.

3.3. Simetrik Yüklü Dönel Kabuklar

3.3.1. Tarif ve Genel Denklemler

Dönel simetrik yüzey, düzlemsel bir eğrinin kendi düzlemi içindeki bir eksen etrafındaki dönmesi ile meydana gelir. Bu eğriye meridyen ve eksene dik herhangi bir daireye de paralel denir.

Dönel kabuklar tek ve çift eğriliğe sahip yüzeysel taşıyıcı sistemler olarak ekonomik ve mimari bakımdan tatmin edici çözümler sağladıklarından, inşaat mühendisliğinin şu alanlarında kullanılırlar:

- a) Çatı konstrüksiyonu olarak büyük alanların ara mesnetsiz olarak örtülmesinde
- b) Depolama yapıları olarak gaz ve sıvı depolarında(su hazneleri), silolarda,
- c) Kule biçimindeki yapılar olarak soğutma kuleleri, su kuleleri ve televizyon kulelerinde,
- d) Temel yapıları olarak, mesela dairesel plak ve kesik koni, kabuk temellerde.

Dönel kabuğa ait kabuller ve tanımlamalar ise şu şekildedir:

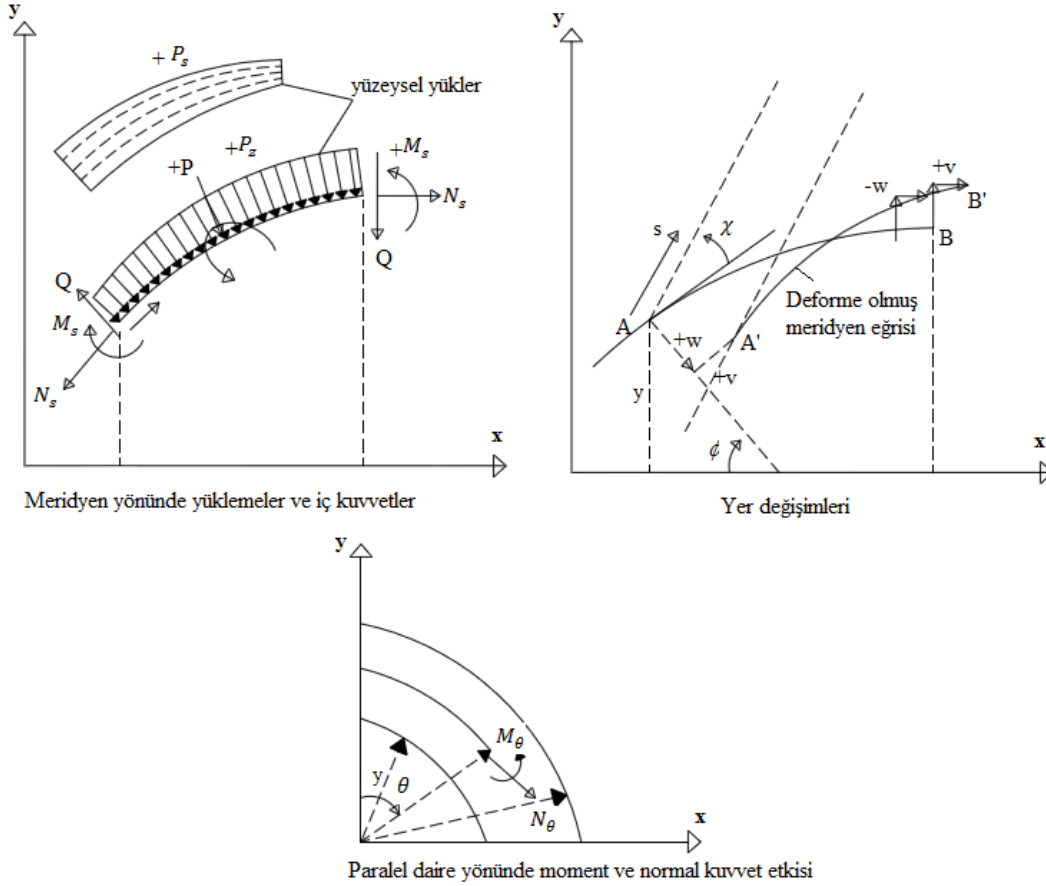
Lineer eğilme teorisinde (Reissner-Meissner ince kabuk teorisi) şu kabuller yapılır.

- 1) Kabuk kalınlığı, kabuğun diğer geometrik boyutlarına göre küçüktür.
- 2) Kabuğun ortalama yüzeyine dik doğrultuda tesir eden normal gerilmeler ihmal edilir.
- 3) Şekil değişiminden önce ortalama yüzeyin normali üzerinde bulunan noktalar, şekil değişiminden sonar da bir doğru üzerinde bulunurlar.
- 4) Bu doğru da (şekil değişiminden sonar deforme olmuş ortalama yüzeye diktir, yani onun normalidir.
- 5) Hooke elastisite kanunu geçerlidir. (Gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı lineerdir.)
- 6) Yer değiştirmeler (deplasmanlar) kabuk kalınlığına nazaran küçüktür, yani yapılacak hesaplarda yer değiştirme büyüklüklerinin yalnız lineer terimleri göz önünde tutulacak ve süperpozisyon prensibi göz önüne alınacaktır.

Bu kabuller elastik çubukların eğilme teorisinden yapılan kabullerin kabuklar için genelleştirilmesinden ibarettir. Örneğin 3 ve 4 numaralı kabuller Bernoulli-Navier çubuk teorisinin genelleştirilmiş halidir.

Meridyen eğrileri ve paralel daire kabuğun parametre eğrileri olup, kabuk üzerinde ortagonal bir ağ teşkil etmektedir. Dönel bir kabuğun elemanı, iki komşu meridyen kesiti ve iki komşu paralel daire kesiti ile sınırlandırılmıştır.

Simetrik yüklü dönel kabuklar için geçerli olan, iç kuvvet, yer değiştirme ve yüzeysel yüklemelerin (+) yönlerini gösterirsek:



Şekil.3.13. Kabuk elemanına etkiyen kuvvetler ve şekil değişimi

Çeşitli özel dönel kabuk tipleri için kanonik diferansiyel denklemleri elde etmeden önce, bu denklemlere esas teşkil edecek olan dönel kabukların yüzeysel dış yükleme altında olan ve bu durumları kapsayan genel hali, (Sayar,1970) tarafından verilmiştir.

$$\frac{dw}{ds} = -\chi + \frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} v \quad (3.110.)$$

$$\frac{d\chi}{ds} = -\mu \frac{y'}{y} \chi + \frac{1}{K} M_s \quad (3.111.)$$

$$\frac{dv}{ds} = \left(-\frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} + \mu \frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} \right) w + \mu \frac{y'}{y} v + \frac{1}{D} N_s \quad (3.112.)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_s}{ds} = & -D(1-\mu^2) \frac{y'}{y^2} \sqrt{1-y'^2} w + D(1-\mu^2) \frac{y'}{y^2} v - (1-\mu) \frac{y'}{y} N_s - \\ & \frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} Q - P_s \end{aligned} \quad (3.113.)$$

$$\frac{dM_s}{ds} = K(1-\mu^2) \left(\frac{y'}{y} \right)^2 \chi - (1-\mu) \frac{y'}{y} M_s + Q \quad (3.114.)$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ds} = & \left(D(1-\mu^2) \frac{1-y^2}{y^2} \right) w + (-D(1-\mu^2) \frac{y'}{y^2} \sqrt{1-y'^2}) v + \left(-\frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} + \right. \\ & \left. \mu \frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} \right) N_s - \frac{y'}{y} Q - P_z \end{aligned} \quad (3.115.)$$

Burada,

$y=y(s)$ Meridyen eğrisi

$h=h(s)$ Kabuk kalınlığı

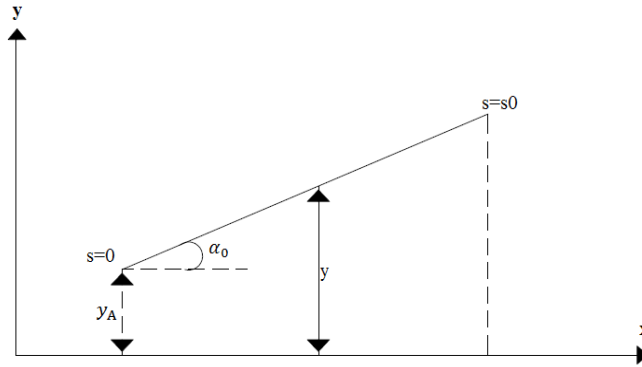
P_s =Teğetsel yükler

P_z =Normal yükler

$D = \frac{E h(s)}{1-\mu^2}$ Eksenel Rijitlik

$K = \frac{E h^3(s)}{12 (1-\mu^2)}$ Eğilme rijitliğini ifade etmektedir.

3.3.2. Konik Kabuklar



Şekil 3.14. Konik kabuk

Burada meridyen eğrisi koni yüzeyinin doğrultmanı olup, yüzeyi şu büyüklüklerle tanımlayalım:

y_A : Doğrultman başlangıcının ordinatı

(Başlangıç paralel dairesel yarıçapı)

α_0 : Doğrultman yön açısı

(Tepe açısı yarı değeri)

Bu verilenler ile konik yüzeyin denklemi:

$$y = y_A + s \sin \alpha_0 \quad (3.116.)$$

şeklinde olup,

$$\sin \alpha_0 = k_1 ; \cos \alpha_0 = k_2 \quad (3.117.)$$

ile gösterilirse (3.110.-115.) kanonik diferansiyel denklemlerinin katsayı fonksiyonları (3.116.) e göre şu değerler alırlar.

$$\begin{aligned} y' &= \sin \alpha_0 \cdot D = k_1, & \frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} &= 0, & \frac{y' \sqrt{1-y'^2}}{y^2} &= \frac{k_1 \cdot k_2}{y^2} \\ y'' &= 0, & \frac{y'}{y} &= \frac{k_1}{y}, & \frac{y'^2}{y^2} &= \frac{k_1^2}{y^2} \\ \sqrt{1-y'^2} &= \cos \alpha_0 = k_2, & \frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} &= \frac{k_2}{y}, & \frac{1-y'^2}{y^2} &= \frac{k_2^2}{y^2} \end{aligned} \quad (3.118.)$$

Bu değerleri (3.110.-115.) denklemlerinde yerine koyarak, konik kabukların kanonik diferansiyel denklemleri elde edilir.

$$\frac{dw}{ds} = -\chi \quad (3.119.)$$

$$\frac{d\chi}{ds} = -\mu \frac{k_1}{y} \chi + \frac{1}{K} M_s \quad (3.120.)$$

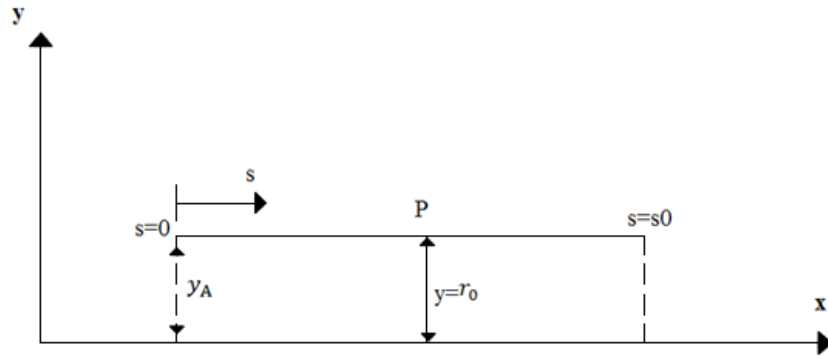
$$\frac{dv}{ds} = \mu \frac{k_2}{y} w - \mu \frac{k_1}{y} v + \frac{1}{D} N_s \quad (3.121.)$$

$$\frac{dN_s}{ds} = -D(1-\mu^2) \frac{k_1 k_2}{y^2} w + D(1-\mu^2) \frac{k_1^2}{y^2} v - (1-\mu) \frac{k_1}{y} N_s - P_s \quad (3.122.)$$

$$\frac{dM_s}{ds} = K(1-\mu^2) \frac{k_1^2}{y^2} \chi - (1-\mu) \frac{k_1}{y} M_s + Q \quad (3.123.)$$

$$\frac{dQ}{ds} = \left(D(1-\mu^2) \frac{k_2^2}{y^2} \right) w + (-D(1-\mu^2) \frac{k_1 k_2}{y^2} v - \mu \frac{k_2}{y} N_s - \frac{k_1}{y} Q - P_z \quad (3.124.)$$

3.3.3. Silindirik Kabuklar



Şekil 3.15. Silindirik kabuk

Silindirik yüzey özel hal için:

$y_A (= r_0)$ Silindir yarıçapı

$\alpha_0 = 0$: Doğrultman yön açısı ve yüzey denklemi

$$y = y_A (= r_0); \quad x = s \quad (3.125.)$$

şeklinde. Yani konik kabuğun özel hali olarak (3.117.)' e göre $k_1 = 0$; $k_2 = 1$ olur. Katsayı fonksiyonları olarak (3.118.)' dan:

$$\begin{aligned}
y' &= 0, & \frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} &= 0, & \frac{y' \sqrt{1-y'^2}}{y^2} &= 0 \\
y'' &= 0 & \frac{y'}{y} &= 0, & \frac{y'^2}{y^2} &= 0 \\
\sqrt{1-y'^2} &= k_2 = 1, & \frac{\sqrt{1-y'^2}}{y} &= \frac{1}{r_o}, & \frac{1-y'^2}{y^2} &= \frac{k_2^2}{r_o^2}
\end{aligned} \tag{3.126.}$$

elde ederiz. Bu değerleri (3.110.-115.) denklemlerinde yerine koyarakta,

$$\frac{dw}{ds} = -\chi \tag{3.127.}$$

$$\frac{d\chi}{ds} = +\frac{1}{K} M_s \tag{3.128.}$$

$$\frac{dv}{ds} = \mu \frac{1}{r_o} w + \frac{1}{D} N_s \tag{3.129.}$$

$$\frac{dN_s}{ds} = -P_s \tag{3.130.}$$

$$\frac{dM_s}{ds} = Q \tag{3.131.}$$

$$\frac{dQ}{ds} = \left(D(1-\mu^2) \frac{1}{r_o^2} \right) w - \mu \frac{1}{r_o} N_s - P_z \tag{3.132.}$$

silindirik kabukların yüzeysel dış yükler altında geçerli olan kanonik diferansiyel denklem takımı bulunur.

3.4. Eğri Eksenli Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi

3.4.1 Hareket Denklemleri

$\mathbf{T}(s,t)$ ile t anında s noktasında kesite etkiyen iç kuvvetlerin toplamı ve $\mathbf{M}(s,t)$ ile bunların ağırlık merkezi olan G noktasına indirgendikleri zaman elde edilen kuvvet çifti olarak gösterelim. Çubuk ekseninin birim boyuna etkiyen yayılı dış kuvvet $\mathbf{p}(s,t)$ ve yayılı moment $\mathbf{m}(s,t)$ olsun. Yer ve şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu kabulü ile hareket denklemleri,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} = \mathbf{p}^{(in)} \quad (3.133.)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} = \mathbf{m}^{(in)} \quad (3.134.)$$

şeklinde verilmektedir. $\mathbf{p}^{(in)}$ ve $\mathbf{m}^{(in)}$ çubuk ekseninin birim uzunluğundaki kütleli atalet kuvveti ve kütleli atalet momentidir. Kesit çarpılmasının ihmal edildiği veya kesitin çift simetriye sahip olduğu durumlar için (t,n,b) dik koordinat takımında $\mathbf{p}^{(in)}$ ve $\mathbf{m}^{(in)}$ vektörlerinin bileşenleri

$$\mathbf{p}^{(in)} = -\rho A \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2}, \quad \mathbf{m}^{(in)} = -\rho I_i \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} \quad (i=t,n,b) \quad (3.135.)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada ρ kütleli yoğunluğu, A kesit alanı, I_i ise atalet momentini göstermektedir.

Statik yükleme halinde verilen diferansiyel denklemler dinamik yükleme halinde de zamana ve konuma bağlı 12 adet kısmi diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\frac{\partial U_t}{\partial \phi} = U_n + r \frac{T_t}{EA} \quad (3.136.)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial \phi} = -U_t + r \Omega_b + r \frac{T_n \alpha_n}{GA} \quad (3.137.)$$

$$\frac{\partial U_b}{\partial \phi} = -r \Omega_n + r \frac{T_b \alpha_b}{GA} \quad (3.138.)$$

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial \phi} = \Omega_n + r \frac{M_t}{GJ_t} \quad (3.139.)$$

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial \phi} = -\Omega_t + r \frac{M_n}{EI_n} \quad (3.140.)$$

$$\frac{\partial \Omega_b}{\partial \phi} = r \frac{M_b}{EI_b} \quad (3.141.)$$

$$\frac{\partial T_t}{\partial \phi} = r\rho A \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} + T_n - rp_t \quad (3.142.)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial \phi} = r\rho A \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} - T_t - rp_n \quad (3.143.)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial \phi} = r\rho A \frac{\partial^2 U_b}{\partial t^2} - rp_b \quad (3.144.)$$

$$\frac{\partial M_t}{\partial \phi} = r\rho I_t \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} + M_n - rm_t \quad (3.145.)$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial \phi} = r\rho I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2} - M_t + rT_b - rm_n \quad (3.146.)$$

$$\frac{\partial M_b}{\partial \phi} = r\rho I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2} - rT_n - rm_b \quad (3.147.)$$

Eğrisel halde zorlanmış titreşim durumu için, $\{\mathbf{Y}(\phi, t)\}$ kolon matrisi tanımlanmaktadır.

$$\{\mathbf{Y}(\phi, t)\} = \{U_t, U_n, U_b, \Omega_t, \Omega_n, \Omega_b, T_t, T_n, T_b, M_t, M_n, M_b\}^T$$

3.4.2. Zorlanmış Titreşim için Laplace Uzayında Hareket Denklemleri

Zamana bağlı bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $t>0$ için, $L[f(t)] = \bar{F}(z)$ ise,

$$\bar{F}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt \quad (3.148.)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada z , Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. Zamana bağlı ikinci mertebeden türevleri Laplace dönüşümleri kapalı olarak aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$L[\ddot{f}(t)] = z^2 \bar{F}(z) - zf(0) - \dot{f}(0) \quad (3.149.)$$

Burada $f(0)$ başlangıç yer değiştirmesi ve $\dot{f}(0)$ başlangıç hızı olup, bu çalışmada sıfır olarak alınmaktadır.

Hareketli koordinat takımında elde edilen (3.136.-147.) denklemlerinin (3.148.-149.) tarifleri yardımıyla Laplace dönüşümü alınırsa, kısmi diferansiyel denklemler dönüşmüş uzayda adi diferansiyel denklem takımı haline dönüşmektedir. Böylece, Laplace uzayında eğri eksenli çubukların dinamik davranışını idare eden adi diferansiyel denklem takımı, kanonik formda aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_t}{d\phi} = \bar{U}_n + r \frac{\bar{T}_t}{EA} \quad (3.150.)$$

$$\frac{d\bar{U}_n}{d\phi} = -\bar{U}_t + r\bar{\Omega}_b + r \frac{\bar{T}_n \alpha_n}{GA} \quad (3.151.)$$

$$\frac{d\bar{U}_b}{d\phi} = -r\bar{\Omega}_n + r \frac{\bar{T}_b \alpha_b}{GA} \quad (3.152.)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_t}{d\phi} = \bar{\Omega}_n + r \frac{\bar{M}_t}{GJ_t} \quad (3.153.)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_n}{d\phi} = -\bar{\Omega}_t + r \frac{\bar{M}_n}{EI_n} \quad (3.154.)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{Q}}_b}{d\phi} = r \frac{\bar{\mathcal{M}}_b}{EI_b} \quad (3.155.)$$

$$\frac{d\bar{T}_t}{d\phi} = rz^2 \rho A \bar{U}_t + \bar{T}_n - r\bar{p}_t \quad (3.156.)$$

$$\frac{d\bar{T}_n}{d\phi} = rz^2 \rho A \bar{U}_n - \bar{T}_t - r\bar{p}_n \quad (3.157.)$$

$$\frac{d\bar{T}_b}{d\phi} = rz^2 \rho A \bar{U}_b - r\bar{p}_b \quad (3.158.)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{M}}_t}{d\phi} = rz^2 \rho I_t \bar{\mathcal{Q}}_t + \bar{\mathcal{M}}_n - r\bar{m}_t \quad (3.159.)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{M}}_n}{d\phi} = rz^2 \rho I_n \bar{\mathcal{Q}}_n - \bar{\mathcal{M}}_t + r\bar{T}_b - r\bar{m}_n \quad (3.160.)$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{M}}_b}{d\phi} = rz^2 \rho I_b \bar{\mathcal{Q}}_b - r\bar{T}_n - r\bar{m}_b \quad (3.161.)$$

Burada () ile gösterilen ifadeler büyüklüklerin Laplace Dönüşümünü göstermektedir. z, Laplace parametresidir.

Laplace dönüşüm uzayında elde edilen birinci mertebeden 12 adet adi diferansiyel denklem takımı matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d\{\bar{\mathbf{V}}(\phi, z)\}}{d\phi} = [\bar{\mathbf{A}}(\phi, z)][\bar{\mathbf{V}}(\phi, z)] + [\bar{\mathbf{F}}(\phi, z)] \quad (3.162.)$$

$[\bar{\mathbf{A}}(\phi, z)]$ katsayılar matrisinin bazı elemanlarında bulunan ikinci türev ifadelerinin zamana göre Laplace dönüşümleri alınırsa,

$$\begin{aligned} L \left[\rho A \frac{\partial^2 U_t}{\partial t^2} \right] &= \rho A \left[z^2 \bar{U}_t - z U_t(\phi, 0) - \frac{\partial U_t(\phi, 0)}{\partial t} \right] \\ L \left[\rho A \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \right] &= \rho A \left[z^2 \bar{U}_n - z U_n(\phi, 0) - \frac{\partial U_n(\phi, 0)}{\partial t} \right] \\ L \left[\rho A \frac{\partial^2 U_b}{\partial t^2} \right] &= \rho A \left[z^2 \bar{U}_b - z U_b(\phi, 0) - \frac{\partial U_b(\phi, 0)}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (3.163.)$$

$$\begin{aligned}
L \left[\rho I_t \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2} \right] &= \rho I_t \left[z^2 \bar{\Omega}_t - z \Omega_t(\phi, 0) - \frac{\partial \Omega_t(\phi, 0)}{\partial t} \right] \\
L \left[\rho I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2} \right] &= \rho I_n \left[z^2 \bar{\Omega}_n - z \Omega_n(\phi, 0) - \frac{\partial \Omega_n(\phi, 0)}{\partial t} \right] \\
L \left[\rho I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2} \right] &= \rho I_b \left[z^2 \bar{\Omega}_b - z \Omega_b(\phi, 0) - \frac{\partial \Omega_b(\phi, 0)}{\partial t} \right]
\end{aligned}$$

olur. Elde edilen eşitliğin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anında verilen başlangıç şartlarıdır. $[\bar{\mathbf{F}}(\phi, z)]$ kolon matrisinin elemanları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}
\bar{F}_i(\phi, z) &= 0 & (i=1, 2, \dots, 6) \\
\bar{F}_7(\phi, z) &= -(\bar{p}_t) - \rho A \left[z U_t(\phi, 0) + \frac{d U_t(\phi, 0)}{dt} \right] \\
\bar{F}_8(\phi, z) &= -(\bar{p}_n) - \rho A \left[z U_n(\phi, 0) + \frac{d U_n(\phi, 0)}{dt} \right] \\
\bar{F}_9(\phi, z) &= -(\bar{p}_b) - \rho A \left[z U_b(\phi, 0) + \frac{d U_b(\phi, 0)}{dt} \right] \\
\bar{F}_{10}(\phi, z) &= -(\bar{m}_t) - \rho I_t \left[z \Omega_t(\phi, 0) + \frac{d \Omega_t(\phi, 0)}{dt} \right] \\
\bar{F}_{11}(\phi, z) &= -(\bar{m}_n) - \rho I_n \left[z \Omega_n(\phi, 0) + \frac{d \Omega_n(\phi, 0)}{dt} \right] \\
\bar{F}_{12}(\phi, z) &= -(\bar{m}_b) - \rho I_b \left[z \Omega_b(\phi, 0) + \frac{d \Omega_b(\phi, 0)}{dt} \right]
\end{aligned} \tag{3.164.}$$

(3.163.) ifadesinde görülen başlangıç şartları, $[\bar{\mathbf{F}}(\phi, z)]$ yük vektörüne dahil edilmektedir.

Elde edilen yukarıdaki on iki adet birinci mertebeden diferansiyel denklemler dikkatle incelendiğinde iki grup dikkat çekmektedir. Birinci grup $\bar{U}_t, \bar{U}_n, \bar{\Omega}_b, \bar{T}_t, \bar{T}_n, \bar{M}_b$ gibi altı büyüklük, sadece (3.150.), (3.151.), (3.155.), (3.156.), (3.157.) ve (3.161.) denklemlerinde bulunmakta ve ikinci grupta da $\bar{U}_b, \bar{\Omega}_t, \bar{\Omega}_n, \bar{T}_b, \bar{M}_t, \bar{M}_n$ gibi altı büyüklük ise (3.152.), (3.153.), (3.154.), (3.158.), (3.159.) ve (3.160.) denklemlerinde yer almaktadır. Böylece hem bilinmeyenler hem de denklemler altışar adet olmak üzere iki gruba ayrılırsa hesaplamalar için büyük kolaylık sağlanacaktır.

- I. Grup $\bar{U}_t, \bar{U}_n, \bar{\Omega}_b, \bar{T}_t, \bar{T}_n, \bar{M}_b$
- II. Grup $\bar{U}_b, \bar{\Omega}_t, \bar{\Omega}_n, \bar{T}_b, \bar{M}_t, \bar{M}_n$

3.4.3. Düzlemi İçinde Yüklü Hal İçin Kanonik Denklemler

Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubukların dinamik analizini idare eden diferansiyel denklemlerin kanonik formu aşağıda verilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_t}{d\phi} = \bar{U}_n + r \frac{\bar{T}_t}{EA} \quad (3.150.)$$

$$\frac{d\bar{U}_n}{d\phi} = -\bar{U}_t + r\bar{\Omega}_b + r \frac{\bar{T}_n \alpha_n}{GA} \quad (3.151.)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_b}{d\phi} = r \frac{\bar{M}_b}{EI_b} \quad (3.155.)$$

$$\frac{d\bar{T}_t}{d\phi} = rz^2 \rho A \bar{U}_t + \bar{T}_n - r\bar{p}_t \quad (3.156.)$$

$$\frac{d\bar{T}_n}{d\phi} = rz^2 \rho A \bar{U}_n - \bar{T}_t - r\bar{p}_n \quad (3.157.)$$

$$\frac{d\bar{M}_b}{d\phi} = rz^2 \rho I_b \bar{\Omega}_b - r\bar{T}_n - r\bar{m}_b \quad (3.161.)$$

3.4.4. Düzlemine Dik Yüklü Hal İçin Kanonik Denklemler

Düzlemine dik yüklü daire eksenli çubukların dinamik analizini idare eden diferansiyel denklemlerin kanonik formu aşağıda verilmektedir.

$$\frac{d\bar{U}_b}{d\phi} = -r\bar{\Omega}_n + r \frac{\bar{T}_b \alpha_b}{GA} \quad (3.152.)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_t}{d\phi} = \bar{\Omega}_n + r \frac{\bar{M}_t}{GI_t} \quad (3.153.)$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_n}{d\phi} = -\bar{\Omega}_t + r \frac{\bar{M}_n}{EI_n} \quad (3.154.)$$

$$\frac{d\bar{T}_b}{d\phi} = rz^2 \rho A \bar{U}_b - r\bar{p}_b \quad (3.158.)$$

$$\frac{d\bar{M}_t}{d\phi} = rz^2 \rho I_t \bar{\Omega}_t + \bar{M}_n - r\bar{m}_t \quad (3.159.)$$

$$\frac{d\bar{M}_n}{d\phi} = rz^2 \rho I_n \bar{\Omega}_n - \bar{M}_t + r\bar{T}_b - r\bar{m}_n \quad (3.160.)$$

3.4.5. Sönüm Etkisi

Viskoelastik sistemlerde elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla sönüm etkisi dikkate alınabilmektedir (Boley ve Weiner, 1960). Kelvin tipi viskoelastik model için bünye ifadesi aşağıda verilmektedir.

$$S_{ij} = 2G(e_{ij} + g \frac{de_{ij}}{dt}) \quad (3.165.)$$

Burada G , kayma modülü, g malzemenin viskoz sönüm oranıdır. Deviatorik gerilme tansörü, S_{ij} , ve deviatorik şekil değiştirme tansörü, e_{ij} , gerilme ve şekil değiştirme tansörünün deviatorik bileşenleri σ_{ij} ve ε_{ij} yardımı ile tanımlanır.

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \sigma_{kk} ; S_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \quad (3.166.)$$

Burada, δ_{ij} , Kronecker delta birim matrisin bileşenlerini göstermektedir. Viskoelastik çözüm, elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla Laplace uzayında elastik sabitlerin kompleks karşılıkları ile yer değiştirmesinden elde edilmektedir (Boley ve Weiner, 1960; Temel ve ark., 2004).

$$E_v = E(1 + gz) ; G_v = G(1 + gz) \quad (3.167.)$$

Burada E_v ve G_v viskoelastik malzeme sabitleri ve z ise, Laplace dönüşüm parametresidir.

4. SAYISAL UYGULAMALAR VE ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Statik Çözümlerle İlgili Araştırma Bulguları

Bu bölümde, geometrik özellikleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde veya düzlemine dik yüklü çubukların değişen yükler altında, tonozların ve eksenel dönel simetrik kabukların davranışını idare eden diferansiyel denklemlerin çözümünde Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi(TFY) kullanılmıştır. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yönteminde olayı ifade eden diferansiyel denklemler esas alınmakta ve bu yöntem ile sınır değer problemleri başlangıç değer problemine indirgenerek çözüme gidilebilmektedir. Çözüm aralığında kesit ve geometrik özellikleri değişen iki noktalı sınır değer problemlerinin direk statik analizleri için Mathematica dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan programlarda 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmış olup, TFY'nin adımları aşağıda verilmiştir.

4.1.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Direk Analiz

Birinci mertebeden n adet diferansiyel denklem,

$$\frac{d\{Y(\phi)\}}{d\phi} = [A(\phi)]_{n \times n} [Y(\phi)]_{n \times 1} + [F(\phi)]_{n \times 1} \quad (4.1.)$$

şeklinde olsun. Burada ϕ bağımsız değişken, $\{Y\}$ bilinmeyen bağımlı değişkenleri içeren kolon matris, $[A]$ diferansiyel geçiş matrisi, $\{F\}$ yüklemeyi içeren kolon matristir.

Çözümde kullanılmak üzere n adet sınır şartından r adeti başlangıçta n-r adeti çözüm bölgesi sonundadır.

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} y_j(a) = \alpha_i \quad (i=1, \dots, r) \quad (4.2.)$$

$$\sum_{j=1}^n d_{ij} y_j(b) = \beta_i \quad (i=1, \dots, n-r) \quad (4.3.)$$

Problemin sınır şartları, bilinmeyen vektör $\{Y\}$ 'nin çözüm bölgesi başlangıcında ve sonundaki bileşenlerinin lineer kombinasyonları olarak da ifade edilebilir.

(4.1.)'de verilen ifadenin homojen ve özel çözümünün problemin sınır şartlarından bağımsız olarak, tamamen çözüm bölgesi başlangıcında belirlenen sınır şartları ile bulunması esasına dayanmaktadır.

$$\{Y(\phi)\} = \sum_{m=1}^n C_m \left(U^{(m)}(\phi) \right) + \{V(\phi)\} \quad (4.4.)$$

gerçek problemin sınır şartları C_m sabitleri ile dikkate alınmaktadır. C_m 'ler çözüm bölgesi başlangıcında ve sonunda verilmiş olan sınır şartlarından elde edilecek integrasyon sabitleridir. m'inci sınır şartına ait homojen çözüm $U^{(m)}(\phi)$ ve homojen olmayan sınır şartlarından elde edilen çözüm $\{V(\phi)\}$ olarak gösterilmiştir.

n adet homojen sınır şartının çözümünden elde edilen homojen çözümler,

$$[U(\phi)]_{n \times n} = [\{U^{(1)}\}_{n \times 1}, \{U^{(2)}\}_{n \times 1}, \dots, \{U^{(n)}\}_{n \times 1}] \quad (4.5.)$$

(4.4)' de verilen denklemi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\{Y(\phi)\} = [U(\phi)]\{C\} + \{V(\phi)\} \quad (4.6)$$

C_m sabitleri elde edildikten sonra, çözüm bölgesinde istenilen yerdeki bağımlı değişkenlerin değerleri kolaylıkla hesaplanabilir.

4.1.1.1 Homojen Çözümün Elde Edilmesi

$$\frac{d\{U^{(m)}\}}{d\phi} = [A]\{U^{(m)}\} \quad (m=1, \dots, n) \quad (4.7.)$$

(4.1.) de ifade edilen denklemin homojen hali (4.7.) de verilen denklem n adet farklı başlangıç şartı için n kere çözülmesi gerekir. Böylece nxn adet çözüm elde edilir.

$\{U^{(m)}\}$, $\{U\}$ bilinmeyen vektörünün çözüm bölgesi başlangıcında m'inci elemanına 1, diğerlerine 0 olması durumunda elde edilen çözüm demektir.

$m=1$	$m=2$	$m=n$
$U_1(a)=1$	$U_2(a)=0$	$U_n(a)=0$
$U_1(a)=0$	$U_2(a)=1$	$U_n(a)=0$
....		
$U_1(a)=0$	$U_2(a)=0$	$U_n(a)=1$

Böylece bu şekilde elde edilmiş olan $[U]$ kare matrisinin, çözüm bölgesi başlangıcındaki değerleri birim matrise karşılık gelmektedir.

$$[U(a)]=[I]$$

4.1.1.2 Özel Çözümün Elde Edilmesi

$$\frac{d\{V\}}{d\phi} = [A]\{V\} + \{F\} \quad (4.8.)$$

Denklem (4.1) de verilen genel denklemin homojen çözümü (4.8) de verilmiş olup,

$$\{V(a)\} = \{0\} \quad (4.9.)$$

sınır şartları ile bir defa çözülmesi yeterlidir

$$\begin{array}{c} \hline m=n \\ V_1(a)=0 \\ V_2(a)=0 \\ \dots \\ \dots \\ V_n(a)=0 \end{array}$$

4.1.2. 5. Mertebe Runge-Kutta Metodu

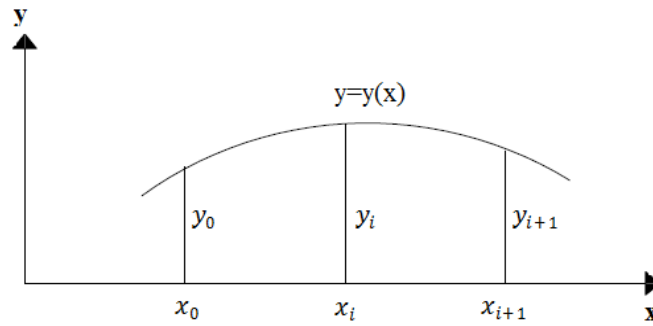
4.1.2.1. Bir Adet Diferansiyel Denklem Hali

Bu kısımda bir adet diferansiyel denklem takımı için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması aşağıda özetlenmiştir.(Chapra and Canale, 2003)

Diferansiyel denklem ve başlangıç şartı;

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y(0) \text{ olsun.}$$



Şekil 4.1. Runge –Kutta fonksiyonu

Şekil 4.1’de görüldüğü üzere y_i adımından y_{i+1} adımına arasında kullanılacak genel Runge-Kutta metodu algoritması aşağıda verilmiştir. Bir denklem için kullanılacak genel 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması aşağıda verilmiştir.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h \quad (4.10.)$$

Burada, k_i sabitleri ;

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{3}{8}h, y_i + \frac{3}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right)$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right)$$

$$k_6 = f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{12}{7}k_5h\right)$$

şeklinde tarif edilmektedir. Burada $\Delta x = h$ seçilmiştir.

4.1.2.2. İki Adet Diferansiyel Denklem Hali

Bu kısımda iki adet diferansiyel denklem takımı için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması aşağıda özetlenmiştir. Diferansiyel denklem ve başlangıç şartı;
Diferansiyel denklem ve başlangıç şartları;

$$y'_1 = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2)$$

$$y_1(x_0) = y_1(0)$$

$$y_2(x_0) = y_2(0)$$

olsun. İki denklem için kullanılacak genel Runge-Kutta algoritması aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} y_1(i+1) &= y_1(i) + \frac{1}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h \\ y_2(i+1) &= y_2(i) + \frac{1}{90} (7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h \end{aligned} \quad (4.11)$$

Burada,

$$k_1 = f_1(x_i, y_{1i}, y_{2i})$$

$$l_1 = f_2(x_i, y_{1i}, y_{2i})$$

$$k_2 = f_1(x_i + \frac{1}{4}h, y_{1i} + \frac{1}{4}k_1h, y_{2i} + \frac{1}{4}l_1h)$$

$$l_2 = f_2(x_i + \frac{1}{4}h, y_{1i} + \frac{1}{4}k_1h, y_{2i} + \frac{1}{4}l_1h)$$

$$k_3 = f_1(x_i + \frac{1}{4}h, y_{1i} + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h, y_{2i} + \frac{1}{8}l_1h + \frac{1}{8}l_2h)$$

$$l_3 = f_2(x_i + \frac{1}{4}h, y_{1i} + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h, y_{2i} + \frac{1}{8}l_1h + \frac{1}{8}l_2h)$$

$$k_4 = f_1(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} - \frac{1}{2}k_2h + k_3h, y_{2i} - \frac{1}{2}l_2h + \frac{1}{2}l_3h)$$

$$l_4 = f_2(x_i + \frac{1}{2}h, y_{1i} - \frac{1}{2}k_2h + k_3h, y_{2i} - \frac{1}{2}l_2h + \frac{1}{2}l_3h)$$

$$k_5 = f_1(x_i + \frac{3}{4}h, y_{1i} + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h, y_{2i} + \frac{3}{16}l_1h + \frac{9}{16}l_4h)$$

$$l_5 = f_2(x_i + \frac{3}{4}h, y_{1i} + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h, y_{2i} + \frac{3}{16}l_1h + \frac{9}{16}l_4h)$$

$$k_6 = f_1(x_i + h, y_{1i} - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{12}{7}k_5h, y_{2i} - \frac{3}{7}l_1h + \frac{2}{7}l_2h + \frac{12}{7}l_3h - \frac{12}{7}l_4h + \frac{12}{7}l_5h)$$

$$l_6 = f_2(x_i + h, y_{1i} - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{12}{7}k_5h, y_{2i} - \frac{3}{7}l_1h + \frac{2}{7}l_2h + \frac{12}{7}l_3h - \frac{12}{7}l_4h + \frac{12}{7}l_5h)$$

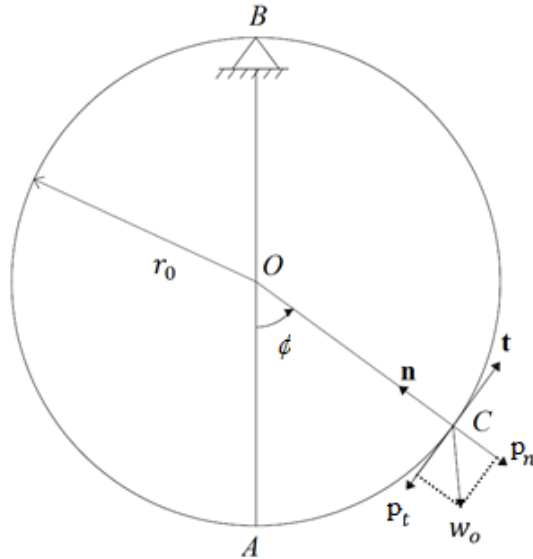
şeklinde tarif edilmektedir. Burada $\Delta x = h$ seçilmiştir.

4.1.3. Statik Yükleme Durumu İçin Sayısal Uygulamalar

Bu kısımda verilen örnekler, 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritmasına dayalı Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile çözülmektedir. Ele alınan örnekler sırasıyla, düzlemi içinde ve kendi ağırlığı etkisi altında yüklü dairesel çember, düzlemi içinde yüklü parabolik kemer, düzlemine dik yüklü dairesel çubuk, düzlemine dik yüklü sikloid çubuk, tonoz ve eksenel dönel simetrik kabuk problemleridir. Karşılaştırma yapmak için literatürden alınan, bu kısımdaki örneklerin tamamının sayısal çözümleri, önceki çalışmalarda 4.mertebe Runge-Kutta (RK4) algoritması ve TFY ile yardımıyla yapılmıştır.

4.1.3.1. Kendi Ağırlığı Etkisi Altındaki Dairesel Çember

Şekil 4.2. de görülen tam kapalı ve üniform kesitli dairesel çember yalnız kendi ağırlığında etkisi altındadır. Çemberin birim uzunluğunun ağırlığı w_0 sabittir.



Şekil 4.2. Kendi ağırlığı etkisi altında yüklü çember

Bölüm 3’de genel olarak incelenen, düzlemsel çubuklar için elde edilen sonuçlar, burada özel olarak daire hali için;

$$r = r_0 = \text{sabit}$$

eşitliği dikkate alınmış ve işlemlere bu şekilde devam edilmiştir.

Aşağıda belirtilen sınır şartları A noktası başlangıç alınarak belirlenmiştir:

$$\phi = 0 \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ \Omega_b = 0 \\ T_n = 0 \end{cases}$$

$$\phi = \pi \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ U_n = 0 \\ \Omega_b = 0 \end{cases}$$

Sadece kendi ağırlığı etkisi altındaki çember için kayma deformasyonları ihmal edilerek elde edilen kapalı formdaki (analitik) çözümleri aşağıda verilmektedir (İnan,1966).

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{r^4 w_0}{D_{bb}} \left[\phi \cos \phi + \frac{\phi^2 - \pi^2}{4} \sin \phi + \phi \right] \\ U_n &= \frac{r^4 w_0}{D_{bb}} \left[\cos \phi - \frac{\phi}{2} \sin \phi + \frac{\phi^2 - \pi^2}{4} \cos \phi + 1 \right] \\ \Omega_b &= \frac{r^3 w_0}{D_{bb}} \left[\phi \cos \phi - \frac{3}{2} \sin \phi + \phi \right] \\ T_t &= r w_0 \left[\phi \sin \phi - \frac{1}{2} \cos \phi \right] \\ T_n &= r w_0 \left[\phi \cos \phi + \frac{1}{2} \sin \phi \right] \\ M_b &= r^2 w_0 \left[1 - \frac{1}{2} \cos \phi - \phi \sin \phi \right] \end{aligned}$$

Kanonik halde verilen (3.57.), (3.58.), (3.62.), (3.63.), (3.64.) ve (3.68.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen $U_t, U_n, \Omega_b, T_t, T_n$ ve M_b büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi)$ değişkenleri kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} U_t(\phi) &= y_1 ; \quad U_n(\phi) = y_2 ; \quad \Omega_b(\phi) = y_3 ; \\ T_t(\phi) &= y_4 ; \quad T_n(\phi) = y_5 ; \quad M_b(\phi) = y_6 ; \\ p_t(\phi) &= p_t ; \quad p_n(\phi) = p_n ; \quad m_b(\phi) = m_b \end{aligned}$$

Düzlemi içinde yüklü dairesel çubukların davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıdaki tariflere göre yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\phi} &= y_2 + r \frac{y_4}{C_{tt}} \\
\frac{dy_2}{d\phi} &= -y_1 + ry_3 + r \frac{y_5 \alpha_n}{GA} \\
\frac{dy_3}{d\phi} &= r \frac{y_6}{D_{bb}} \\
\frac{dy_4}{d\phi} &= y_5 - rp_t \\
\frac{dy_5}{d\phi} &= -y_4 - rp_n \\
\frac{dy_6}{d\phi} &= -r y_5 - rm_b
\end{aligned}$$

Kanonik halde verilen 6 adet denklem takımının TFY ile sayısal çözümleri Ek1 de verilen Mathematica programı yardımıyla yapılmaktadır.

Probleme ait boyutsuz malzeme özellikleri ve geometrik özellikler:

$$\begin{aligned}
r &= r_0 = 1 = sbt ; \quad w_0 = 1 \text{ (Boyutsuz ağırlık değeri)} \\
D_{bb} &= 1 ; \quad C_{tt} = 1 ; C_{nn} = GA/\alpha_n ; GA = 1 \\
\alpha_n &= 0 \text{ (Kayma deformasyonu etkisi ihmal ediliyor)}
\end{aligned}$$

A noktasını başlangıç olarak seçelim. Buna göre herhangi bir C noktasındaki yükün teğetsel ve radyal bileşenleri:

$$\begin{aligned}
p_t &= -w_0 \sin \phi \\
p_n &= -w_0 \cos \phi \\
m_b &= 0 \text{ (yayıllı moment)} \quad \text{olur.}
\end{aligned}$$

Düzlemi içinde ve sadece kendi ağırlığı ile yüklü çemberin deplasman ve kesit tesirlerinin analitik çözümleri ile karşılaştırmaları Çizelge 4.1. de verilmiştir. RK5 algoritması ile yapılan sonuçların analitik sonuçlara oldukça yakın oldukları görülmektedir.

Çizelge 4.1. Deplasman ve kesit tesirlerinin analitik çözümleri ile karşılaştırılması

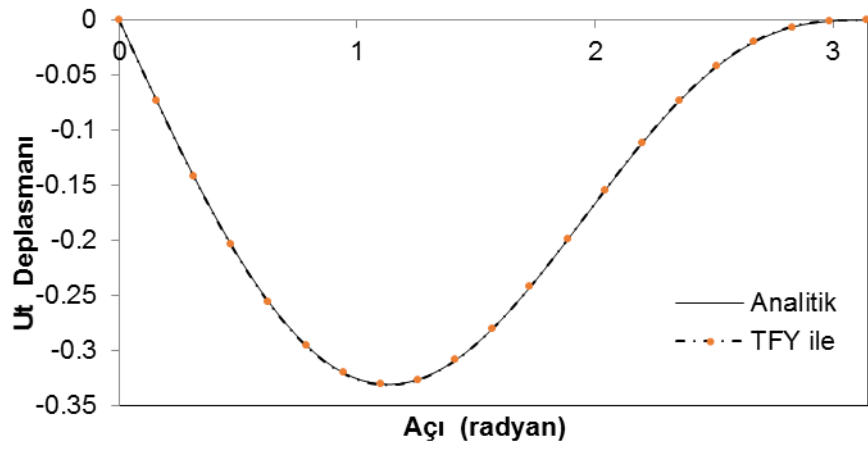
	U_t		U_n		Ω_b	
Açı(radyan)	Analitik	TFY ile	Analitik	TFY ile	Analitik	TFY ile
0	0	0	-0.4674011	-0.4674013	0	-4.40E-17
0.1570796	-0.0727963	-0.0727963	-0.4555287	-0.4555289	0.0775737	0.0775737
0.3141593	-0.1419017	-0.1419018	-0.4206553	-0.4206555	0.149417	0.149417
0.4712389	-0.2038569	-0.2038569	-0.3649674	-0.3649675	0.2101301	0.2101301
0.6283185	-0.255651	-0.2556511	-0.2919638	-0.291964	0.254961	0.2549611
0.7853982	-0.2949128	-0.2949129	-0.2062447	-0.2062448	0.2800984	0.2800984
0.9424778	-0.3200618	-0.320062	-0.1132298	-0.1132299	0.2829269	0.2829269
1.0995574	-0.3304118	-0.3304119	-0.0188209	-0.018821	0.2622363	0.2622363
1.2566371	-0.3262166	-0.3262167	0.0709767	0.0709767	0.2183745	0.2183746
1.4137167	-0.3086554	-0.3086555	0.1504544	0.1504545	0.1533382	0.1533383
1.5707963	-0.2797545	-0.2797546	0.2146018	0.2146019	0.0707963	0.0707964
1.727876	-0.2422471	-0.2422472	0.2594897	0.2594898	-0.0239559	-0.0239558
1.8849556	-0.199376	-0.199376	0.2826134	0.2826135	-0.1241125	-0.1241124
2.0420352	-0.1546461	-0.1546461	0.2831782	0.2831782	-0.2215392	-0.2215391
2.1991149	-0.1115388	-0.1115388	0.2623081	0.2623082	-0.3070179	-0.3070179
2.3561945	-0.0731999	-0.0731999	0.2231659	0.223166	-0.3705468	-0.3705467
2.5132741	-0.0421161	-0.0421161	0.1709713	0.1709713	-0.4016852	-0.4016852
2.6703538	-0.0197979	-0.0197979	0.1129114	0.1129115	-0.3899346	-0.3899346
2.8274334	-0.0064846	-0.0064846	0.0579422	0.0579422	-0.3251411	-0.325141
2.984513	-0.0008894	-0.0008894	0.0164811	0.0164811	-0.1979074	-0.1979074
3.1415927	0	-2.22E-16	0	2.22E-16	0	0.00E+00
	T_t		T_n		M_b	
Açı(radyan)	Analitik	TFY ile	Analitik	TFY ile	Analitik	TFY ile
0	-0.5	-0.5000001	0	0	0.5	0.5000001
0.1570796	-0.4692715	-0.4692716	0.233363	0.233363	0.4815832	0.4815832
0.3141593	-0.3784477	-0.3784478	0.4532917	0.4532917	0.4273912	0.4273913
0.4712389	-0.2315653	-0.2315654	0.6468722	0.6468722	0.3405588	0.3405588
0.6283185	-0.0351921	-0.0351922	0.802213	0.802213	0.2261751	0.2261752
0.7853982	0.201807	0.2018069	0.9089138	0.9089138	0.0910862	0.0910863
0.9424778	0.4685879	0.4685879	0.958483	0.9584831	-0.0563732	-0.0563731
1.0995574	0.7527176	0.7527176	0.9446919	0.944692	-0.2067081	-0.2067081
1.2566371	1.0406244	1.0406243	0.8638505	0.8638505	-0.3496414	-0.3496414
1.4137167	1.3180943	1.3180942	0.7149982	0.7149983	-0.4745287	-0.4745287
1.5707963	1.5707963	1.5707963	0.5	0.5000001	-0.5707963	-0.5707963
1.727876	1.7848202	1.7848202	0.2235448	0.2235449	-0.6283857	-0.6283857
1.8849556	1.9472078	1.9472078	-0.1069551	-0.106955	-0.6381908	-0.6381908
2.0420352	2.046462	2.046462	-0.4815613	-0.4815612	-0.5924715	-0.5924715
2.1991149	2.0730139	2.073014	-0.8880988	-0.8880987	-0.4852287	-0.4852287
2.3561945	2.0196345	2.0196345	-1.3125277	-1.3125276	-0.3125277	-0.3125278
2.5132741	1.881774	1.881774	-1.7393889	-1.7393888	-0.072757	-0.072757
2.6703538	1.6578185	1.6578186	-2.1523074	-2.1523073	0.233188	0.2331879
2.8274334	1.3492532	1.3492533	-2.5345405	-2.5345404	0.6018033	0.6018032
2.984513	0.9607249	0.9607249	-2.8695515	-2.8695514	1.0269635	1.0269634
3.1415927	0.5	0.5000001	-3.1415927	-3.1415926	1.5	1.4999999

Çemberin $\phi = \pi/2$ noktasında hesaplanan bağıl hata değerleri, 4. mertebe Runge-Kutta (RK4) ve 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritmaları ile hesaplanmış, bağıl hatalar Çizelge 4.2. üzerinde karşılaştırılmıştır. $\phi = \pi/2$ noktasında RK5 algoritması ile yapılan çözümler, aynı bölme sayıları için RK4 algoritmasının ile elde edilen sonuçlara göre oldukça küçük bağıl hata değerleri vermektedir. Bu nedenle bundan sonraki bütün sayısal çözümlerde RK5 algoritması kullanılacaktır.

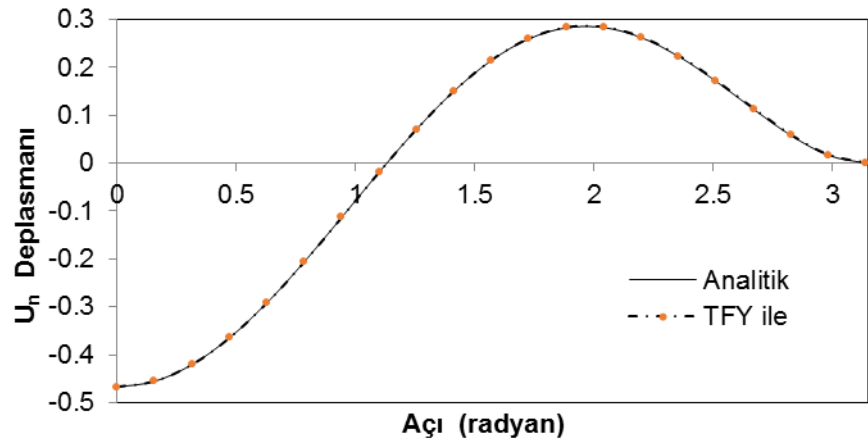
Çizelge 4.2. $\phi = \pi/2$ noktasındaki bağıl hata değerleri (n: bölme sayısı)

RK4 İle Hesaplanmış Bağıl Hatalar						
n	U_t	U_n	Ω_b	T_t	T_n	M_b
6	1.5×10^{-3}	1.0×10^{-3}	5.4×10^{-2}	1.5×10^{-3}	1.2×10^{-2}	1.1×10^{-3}
12	1.2×10^{-3}	2.6×10^{-4}	3.0×10^{-3}	9.7×10^{-5}	7.4×10^{-4}	8.5×10^{-5}
24	7.9×10^{-5}	2.2×10^{-5}	1.6×10^{-4}	6.0×10^{-6}	4.3×10^{-5}	5.6×10^{-6}
RK5 İle Hesaplanmış Bağıl Hatalar						
n	U_t	U_n	Ω_b	T_t	T_n	M_b
6	3.2×10^{-4}	7.1×10^{-5}	4.8×10^{-4}	8.7×10^{-6}	8.5×10^{-5}	1.4×10^{-5}
12	6.0×10^{-6}	2.8×10^{-6}	4.2×10^{-6}	5.8×10^{-8}	8.9×10^{-7}	3.2×10^{-7}
24	1.0×10^{-7}	7.9×10^{-8}	4.1×10^{-7}	1.9×10^{-9}	8.0×10^{-8}	7.0×10^{-9}

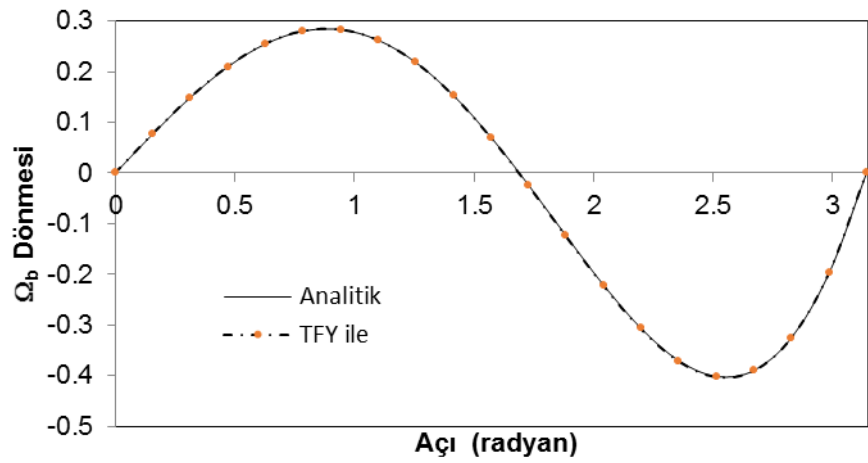
Düzlemi içinde ve kendi ağırlığı ile yüklü çember için deplasmanların açısı ile değişimleri Şekil (4.3.-5.)’de ve kesit tesirlerinin açısı ile değişimleri de Şekil (4.6.-8.)’de gösterilmiştir.



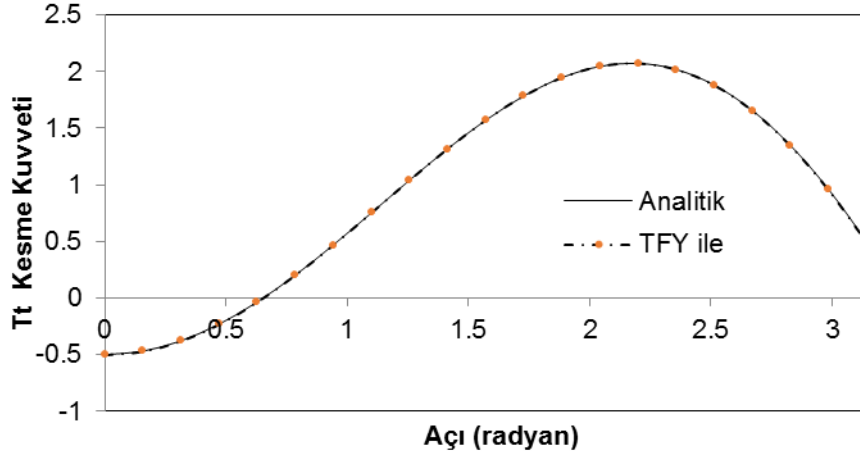
Şekil 4.3 U_t Deplasmanının açı ile değişimi



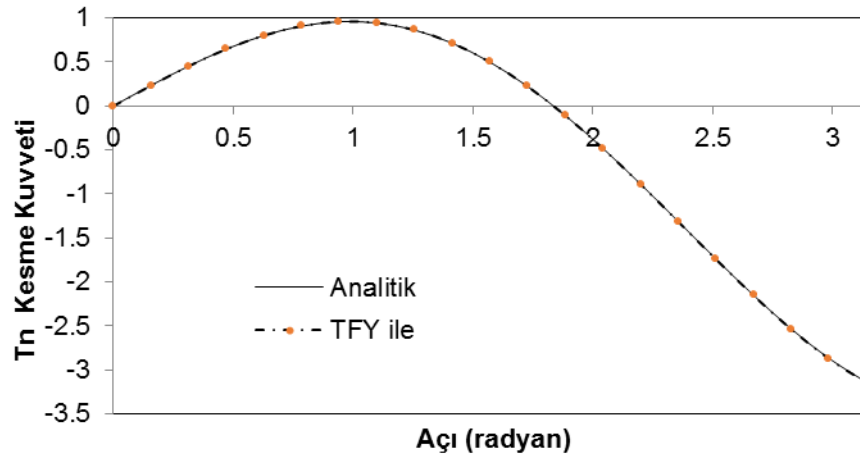
Şekil 4.4. U_n Deplasmanının açı ile değişimi



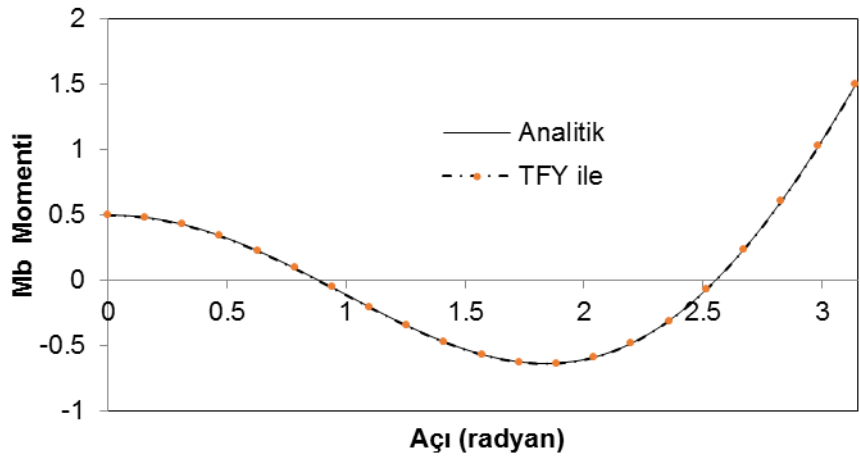
Şekil 4.5. Ω_b Dönmesinin açı ile değişimi



Şekil 4.6. T_t Kesme kuvvetinin açı ile değişimi



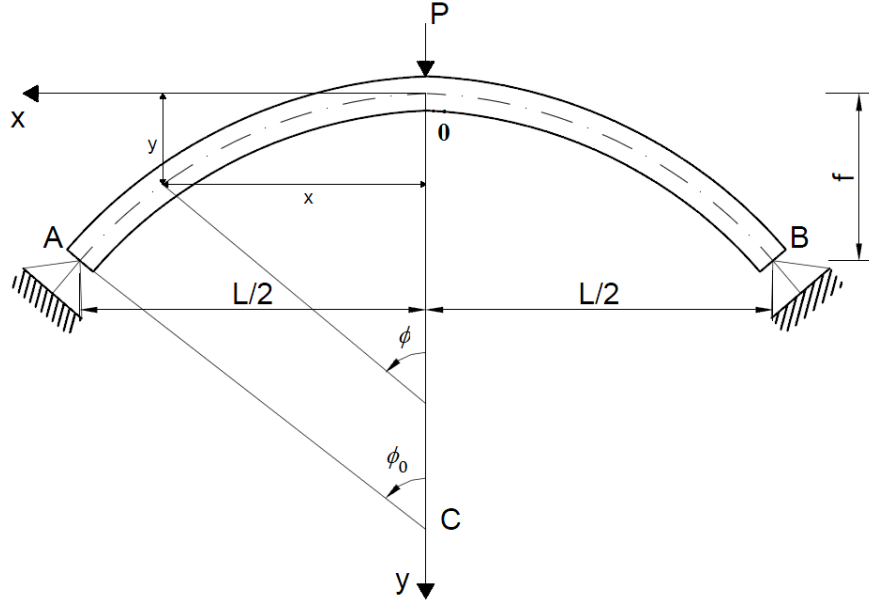
Şekil 4.7. T_n Kesme kuvvetinin açı ile değişimi



Şekil 4.8. M_b Momentinin açı ile değişimi

Bütün grafiklerden, analitik sonuçlar ile TFY ile bulunan sonuçların üst üste çakıştıkları görülmektedir.

4.1.3.2. Tekil Yüklü Parabolik Kemer



Şekil 4.9. Tekil kuvvetle yüklü parabolik kemer

Şekil 4.9. da iki ucu mafsallı ve O noktasında tekil yüklü parabolik kemer görülmektedir. Seçilen kordinat takımına göre çubuk ekseninin denklemi, eğrilik yarıçapı veya r' 'nin eksen boyunca değişimini veren ifadeler:

$$y = \frac{4fx^2}{L^2}, \quad r = \frac{r_0}{\cos^3 \phi}$$

Burada r_0 , O noktasına ait eğrilik yarıçapıdır.

$$r_0 = \frac{L^2}{8f}$$

ϕ açıları, kemerin normali ile y eksenini arasındaki açıyı gösterir. A noktası için ϕ_0 değeri,

$$\tan \phi_0 = \frac{4f}{L}$$

bağıntısından bulunabilir. $I_b(\phi)\cos\phi = I_b(0) = sbt$ olduğu ve kemer eğilme rijitliğinin ise değişken olduğu kabul edilecektir. O halde eğilme rijitliği,

$$D_{bb} = \frac{D_0}{\cos\phi} = \frac{EI_b(0)}{\cos\phi}$$

şeklinde hesaba katılmıştır. Simetri noktası ve mafsallı uca ait sınır şartları,

$$\phi = 0 \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ \Omega_b = 0 \\ T_n = -P/2 \end{cases}$$

$$\phi = \phi_0 \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ U_n = 0 \\ M_b = 0 \end{cases}$$

dikkate alınarak, düzlemi içinde tekil kuvvetle yüklü parabolik kemerin, kayma deformasyonları ihmal edilerek elde edilmiş analitik çözümleri aşağıda verilmektedir (İnan,1966). Çözümlerde ξ boyutsuz parametresi,

$$\xi = \frac{\tan \phi}{\tan \phi_0}$$

şeklinde tanımlanmış olup, deplasman ve kesit tesirleri ϕ 'ye bağlı olarak aşağıda verilmektedir.

$$U_t = \frac{PL^3}{6144 D_0} (1 - \xi)^2 (3 + 6\xi - 5\xi^2) \sin \phi$$

$$U_n = \frac{PL^3}{6144 D_0} (1 - \xi) \left[\frac{64f^2}{L^2} (5\xi - 7) \xi^4 + 25\xi^3 - 39\xi^2 + 3\xi + 3 \right] \cos \phi$$

$$\Omega_b = \frac{PL^2}{768 D_0} \xi (-21 + 48\xi - 25\xi^2)$$

$$T_t = -\frac{P}{32} (16 \sin \phi + \frac{1}{f} \frac{25}{4} \cos \phi)$$

$$T_n = \frac{P}{32} (25\xi - 16) \cos \phi$$

$$M_b = \frac{PL}{128} (1 - \xi) (25\xi - 7)$$

Yukarıdaki ifadeler $0 \leq \phi \leq \phi_0$ çözüm aralığı için geçerlidir.

Kanonik halde verilen (3.57.), (3.58.), (3.62.), (3.63.), (3.64.) ve (3.68.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde, herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen $U_t, U_n, \Omega_b, T_t, T_n$ ve M_b büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi)$ değişkenleri kullanılmıştır.

$$U_t(\phi) = y_1 ; U_n(\phi) = y_2 ; \Omega_b(\phi) = y_3 ;$$

$$T_t(\phi) = y_4 ; T_n(\phi) = y_5 ; M_b(\phi) = y_6 ;$$

$$p_t(\phi) = p_t ; p_n(\phi) = p_n ; m_b(\phi) = m_b$$

Düzlemi içinde yüklü parabolik kemer davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıdaki tariflere göre yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy_1}{d\phi} = y_2 + r \frac{y_4}{c_{tt}}$$

$$\frac{dy_2}{d\phi} = -y_1 + ry_3 + r \frac{y_5 \alpha_n}{GA}$$

$$\frac{dy_3}{d\phi} = r \frac{y_6}{D_{bb}}$$

$$\frac{dy_4}{d\phi} = y_5 - rp_t$$

$$\frac{dy_5}{d\phi} = -y_4 - rp_n$$

$$\frac{dy_6}{d\phi} = -r y_5 - rm_b$$

Kanonik halde verilen denklem takımının sayısal çözümleri TFY ile yapılmış ve analitik çözümleri karşılaştırmaları grafikler üzerinde gösterilmiştir.

Probleme ait boyutsuz malzeme özellikleri ve geometrik özellikler:

$$r_0 = 1 = sbt ; \phi_0 = 26.565; P=1$$

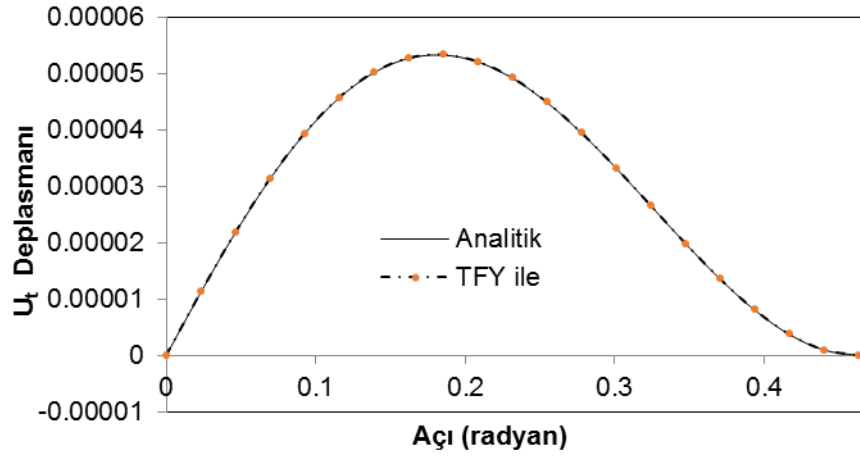
$$E = 1 ; I = 1 ; L = 1 ; C_{tt} = 1 ; C_{nn} = GA/\alpha_n ; GA = 1$$

$$D_0 = 1 ; r_0 = 1 ; f = 1/8$$

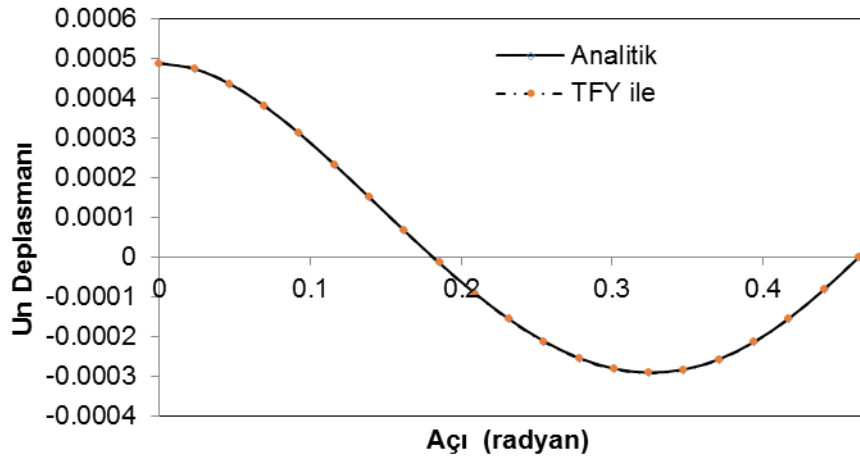
$$\alpha_n = 0 \text{ (Kayma deformasyonu etkisi ihmal ediliyor)}$$

Kapalı (analitik) çözümler ince çubuk teorisine göre verildiğinden, sayısal çözümlerde kayma deformasyonu etkileri ihmal edilmiştir.

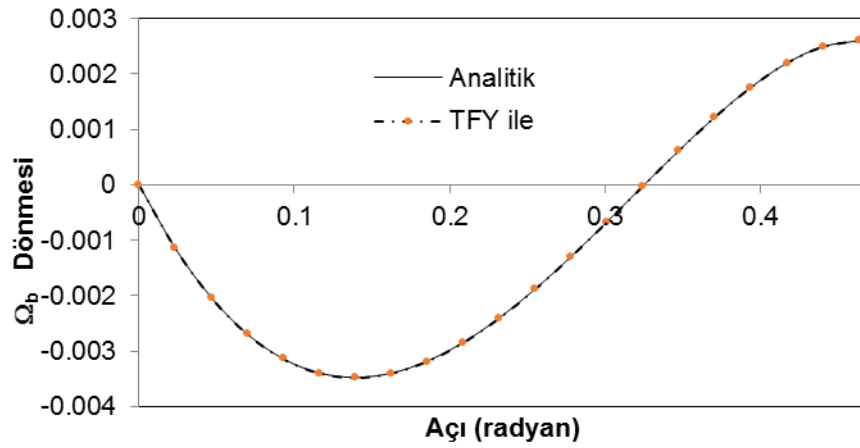
Düzlemi içinde tekil kuvvetle yüklü parabolik kemer için deplasmanların açı ile değişimleri Şekil (4.10.-12.)’de ve kesit tesirlerinin açı ile değişimleri Şekil (4.13-15.)’de gösterilmektedir.



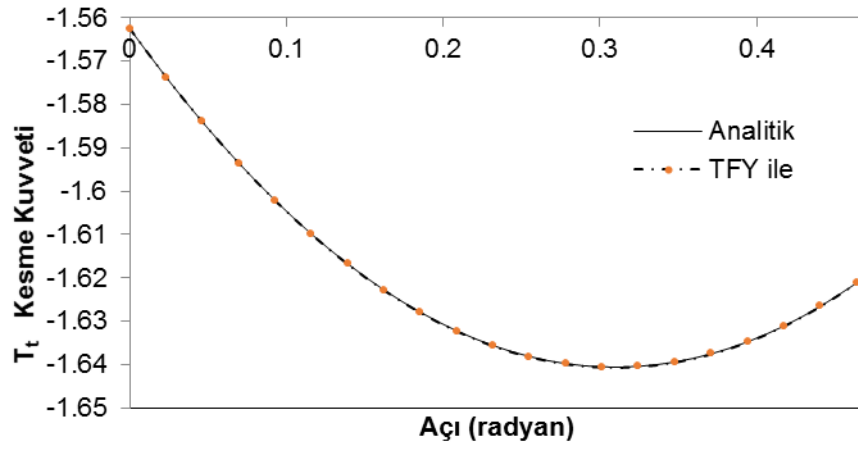
Şekil 4.10. U_t Deplasmanının açı ile değişimi



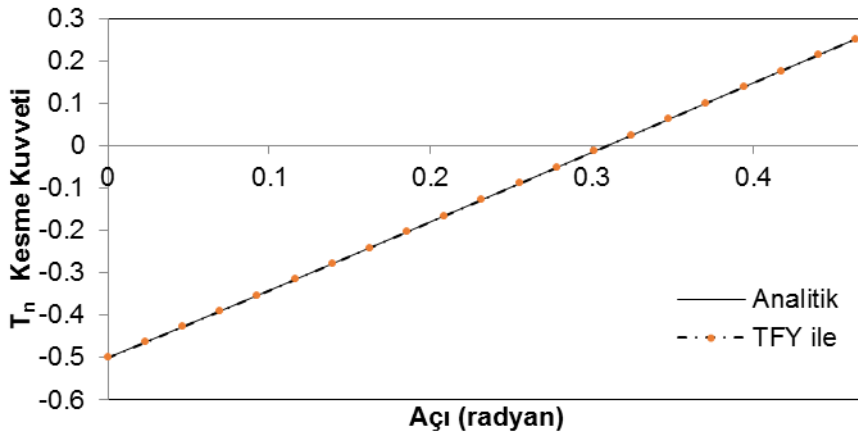
Şekil 4.11. U_n Deplasmanının açı ile değişimi



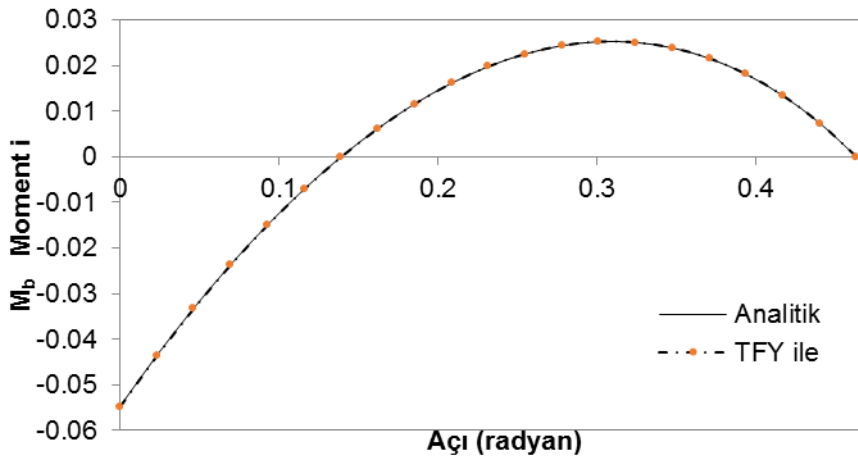
Şekil 4.12. Ω_b Dönmesinin açı ile değişimi



Şekil 4.13. T_t Kesme kuvvetinin açı ile değişimi



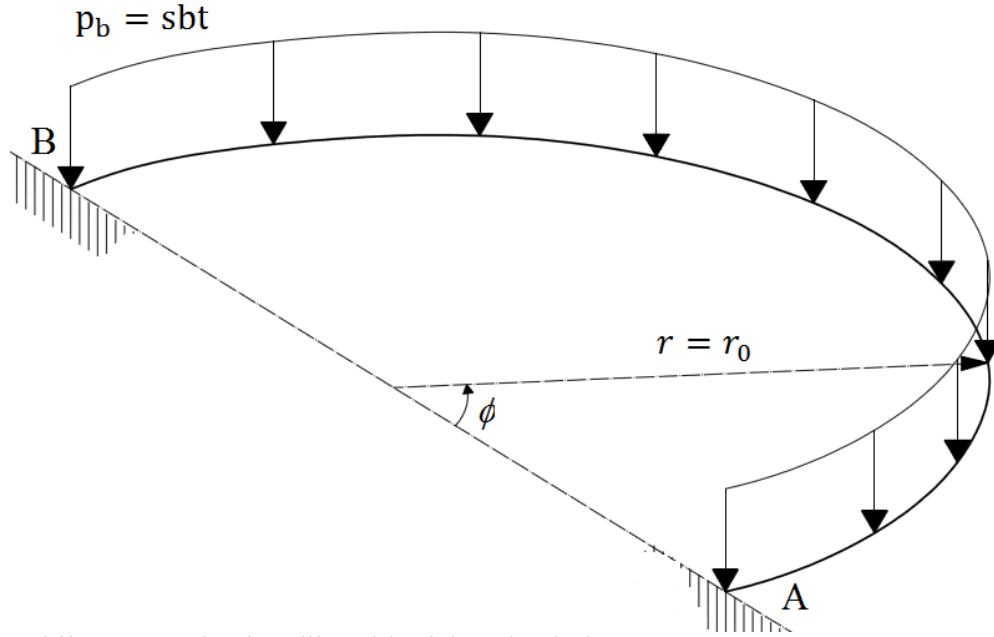
Şekil 4.14. T_n Kesme kuvvetinin açı ile değişimi



Şekil 4.15. M_b Momentinin açı ile değişimi

Deplasmanlar ve kesit tesirleri, grafiklerinden de görüldüğü üzere analitik sonuçlar ile TFY ile bulunan değerler üst üste çakışmaktadır.

4.1.3.3. Düzlemine Dik Yüklü Dairesel Çubuk



Şekil 4.16 Düzlemine dik yüklü daireysel çubuk

Bu örnekte daire eksenli iki ucu ankastre kirişin üniform yükler altında eğilmeli burulması incelenmektedir. Burada $r = r_0 = \text{sabit}$ alınacaktır.

A ve B noktaları için sınır şartları:

$$\begin{aligned} \phi = 0 & \rightarrow \begin{cases} U_b = 0 \\ \Omega_t = 0 \\ \Omega_n = 0 \end{cases} \\ \phi = \pi & \rightarrow \begin{cases} U_b = 0 \\ \Omega_t = 0 \\ \Omega_n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Yukarıda verilen sınır şartları için düzlemine dik yüklü daireysel çubuğun analitik çözümü Ek 2 de verilen Mathematica programı yardımıyla hesaplanmıştır.

Kanonik halde verilen (3.59.), (3.60.), (3.61.), (3.65.), (3.66.) ve (3.67.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde, herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen $U_b, \Omega_t, \Omega_n, T_b, M_t$ ve M_n büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi)$ değişkenleri kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} U_b(\phi) &= y_1 ; \Omega_t(\phi) = y_2 ; \Omega_n(\phi) = y_3 \\ T_b(\phi) &= y_4 ; M_t(\phi) = y_5 ; M_n(\phi) = y_6 \\ p_b(\phi) &= p_t ; m_t(\phi) = p_n ; m_n(\phi) = m_b \end{aligned}$$

Düzlemine dik yüklü dairesel çubuğun davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıdaki tariflere göre yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy_1}{d\phi} = -ry_3 - r \frac{y_4 \alpha_b}{GA}$$

$$\frac{dy_2}{d\phi} = y_3 + r \frac{y_5}{D_{tt}}$$

$$\frac{dy_3}{d\phi} = -y_2 + r \frac{y_6}{D_{nn}}$$

$$\frac{dy_4}{d\phi} = -rp_b$$

$$\frac{dy_5}{d\phi} = y_6 - rm_t$$

$$\frac{dy_6}{d\phi} = -y_5 + ry_4 - rm_n$$

Probleme ait boyutsuz malzeme özellikleri ve geometrik özellikler:

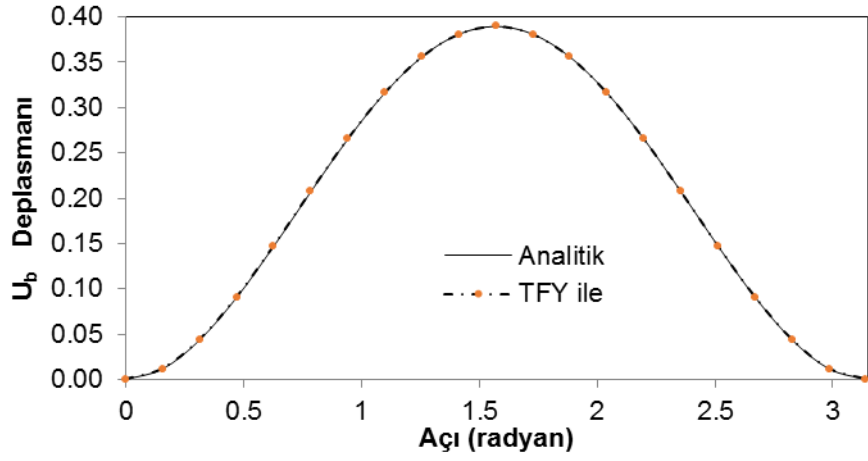
$$p_b = 1 = sbt; \quad m_t = 0; \quad m_n = 0,$$

$$r_0 = r = 1 = sabit$$

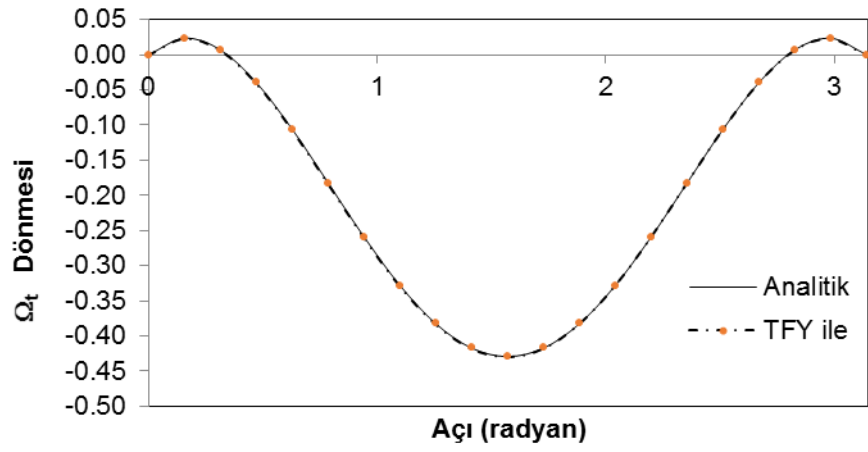
$$D_{tt} = 1; \quad D_{nn} = 1; \quad C_{bb} = GA/\alpha_b; \quad GA = 1$$

$$\alpha_b = 0 \text{ (Kayma deformasyonu etkisi ihmal ediliyor)}$$

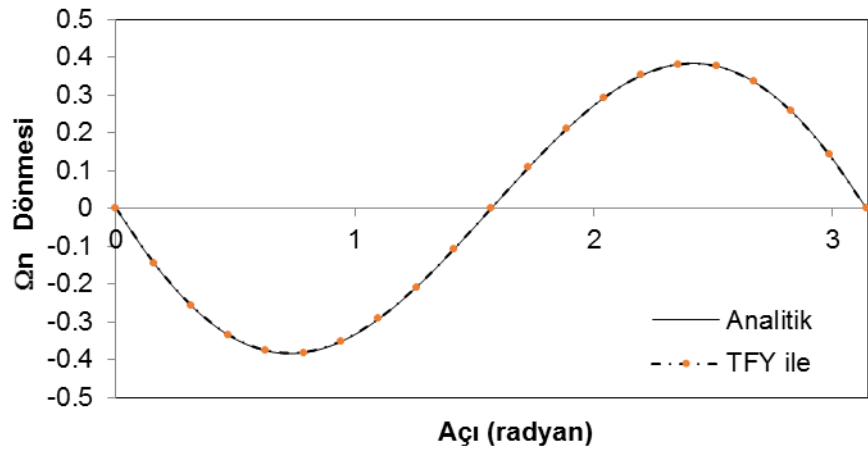
Düzlemine dik yüklü dairesel çubuk için deplasmanların açı ile değişimleri Şekil (4.17-19.)’da ve kesit tesirlerinin açı ile değişimleri Şekil (4.20-22.)’de gösterilmektedir.



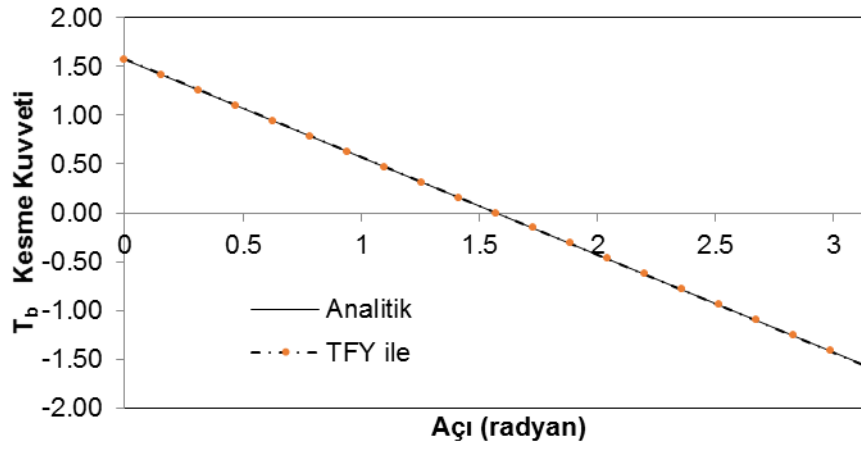
Şekil 4.17. U_b Deplasmanının açı ile değişimi



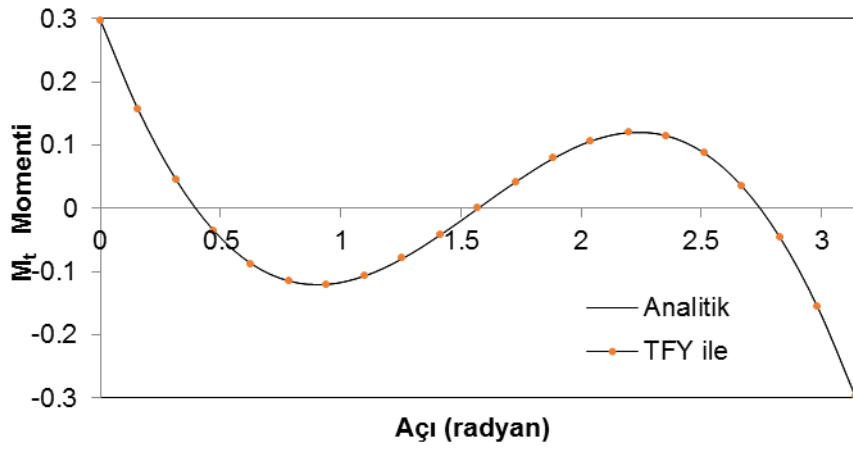
Şekil 4.18. Q_t Dönmesinin açı ile değişimi



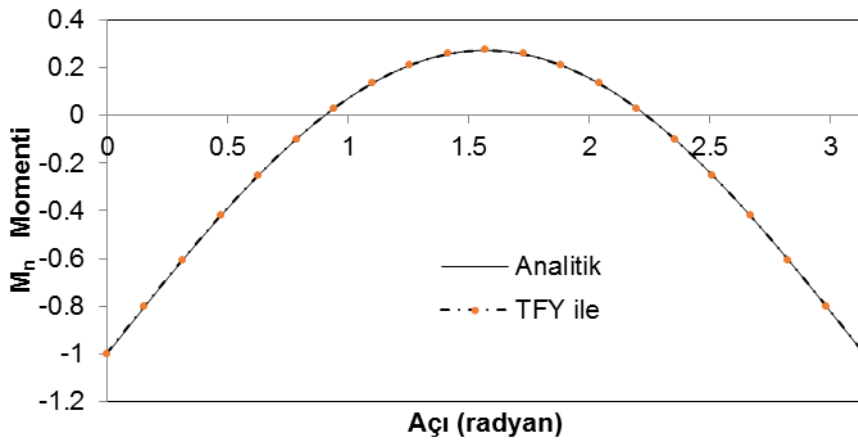
Şekil 4.19. Q_n Dönmesinin açı ile değişimi



Şekil 4.20. T_b Kesme kuvvetinin açı ile değişimi



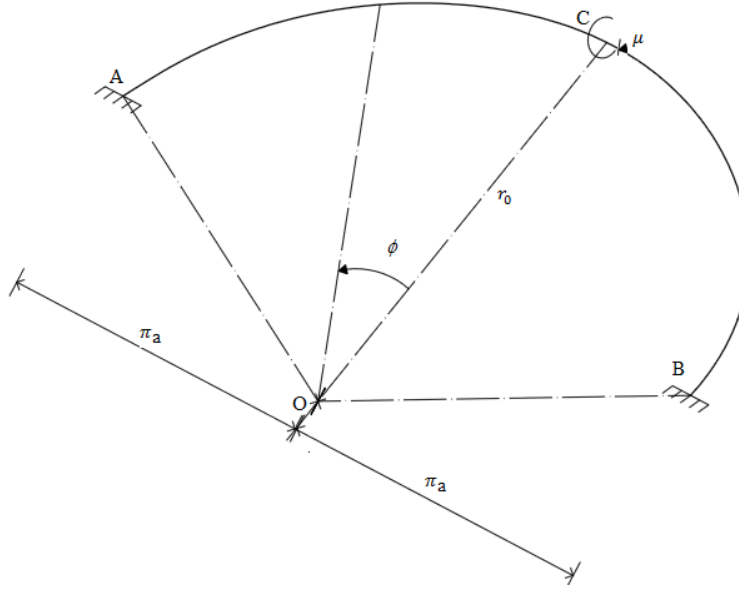
Şekil 4.21. M_t Momentinin açı ile değişimi



Şekil 4.22. M_n Momentinin açı ile değişimi

Grafiklerden de görüldüğü üzere, analitik sonuçlar ile TFY ile bulunan çözümler üst üste düşmektedir.

4.1.3.4. Tekil Momentle Yüklü Sikloid Çubuk



Şekil 4.23. Tekil momentle yüklü sikloid çubuk

Bu örnekte, sabit enkesitli Sikloid kemer, $\phi = 0$ tepe noktasında μ şiddetli tekil burulma atalet momenti etkisi altındadır. İki ucundan ankastre olarak bağlıdır. Sikloid kemer eksenine ait özgül denklem veya eğrilik yarıçapı:

$$r = r_0 \cos \phi$$

olup, burada r_0 , C noktasının eğrilik yarıçapıdır. Sikloidi oluşturan dairenin yarıçapı a ise aralarında;

$$r_0 = 4a$$

gibi bir bağıntı vardır.

Simetri noktası ve ankastre ucun sınır şartları,

$$\phi = 0 \rightarrow \begin{cases} T_b = 0 \\ \Omega_n = 0 \\ M_t = \frac{\mu}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} U_b = 0 \\ \Omega_t = 0 \\ \Omega_n = 0 \end{cases}$$

için Sikloid çubuğun kayma deformasyonu etkileri ihmal edilerek elde edilmiş kapalı formdaki çözümleri aşağıda verilmektedir (İnan,1966).

İki rijitlik değerin oranı olarak tarif edilen δ ;

$$\delta = \frac{D_{tt}}{D_{nn}}$$

boyutsuz büyüklüğüne bağlı olarak hesaplanan deplasman ve kesit tesirleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} U_b &= \frac{\mu \rho_0^2}{72 D_{nn}} \left[\frac{4+8\delta}{\delta} \sin^3 \phi - \frac{-4+4\delta}{\delta} \cos^2 \phi - \frac{12+6\delta}{\delta} \sin^2 \phi - \frac{6-6\delta}{\delta} \sin \phi \cos \phi + \right. \\ &\quad \left. \frac{12-12\delta}{\delta} \sin \phi - \frac{6-6\delta}{\delta} \phi + \frac{(10-3\pi)\delta+3\pi-4}{\delta} \right] \\ \Omega_t &= \frac{\mu \rho_0}{6 D_{nn}} \left[\frac{(1-\delta)(2+\delta)}{\delta(1+2\delta)} \cos^2 \phi + \frac{2+\delta}{\delta} \sin \phi \cos \phi + \frac{1-\delta}{\delta} \sin \phi - \frac{2+\delta}{\delta} \cos \phi - \frac{1-\delta}{\delta} \right] \\ \Omega_n &= \frac{\mu \rho_0}{6 D_{nn}} \left[\frac{1+2\delta}{\delta} \cos^2 \phi + \frac{\delta-1}{\delta} \sin \phi \cos \phi + \frac{1-\delta}{\delta} \cos \phi + \frac{2+\delta}{\delta} \sin \phi - \frac{2+\delta}{\delta} \right] \\ T_b &= 0 \\ M_t &= \frac{\mu}{2} \left[\cos \phi + \frac{\delta-1}{1+2\delta} \sin \phi \right] \\ M_n &= \frac{\mu}{2} \left[-\sin \phi + \frac{\delta-1}{1+2\delta} \cos \phi \right] \end{aligned}$$

Kanonik halde verilen (3.59.), (3.60.), (3.61.), (3.65.), (3.66.) ve (3.67.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde, herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen $U_b, \Omega_t, \Omega_n, T_b, M_t$ ve M_n büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi)$ değişkenleri kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} U_b(\phi) &= y_1 ; \quad \Omega_t(\phi) = y_2 ; \quad \Omega_n(\phi) = y_3 \\ T_b(\phi) &= y_4 ; \quad M_t(\phi) = y_5 ; \quad M_n(\phi) = y_6 \\ p_b(\phi) &= p_t ; \quad m_t(\phi) = p_n ; \quad m_n(\phi) = m_b \end{aligned}$$

Sikloid çubukların davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıdaki tariflere göre yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\phi} &= -ry_3 - r \frac{y_4 \alpha_b}{GA} \\ \frac{dy_2}{d\phi} &= y_3 + r \frac{y_5}{D_{tt}} \\ \frac{dy_3}{d\phi} &= -y_2 + r \frac{y_6}{D_{nn}} \\ \frac{dy_4}{d\phi} &= -rp_b \\ \frac{dy_5}{d\phi} &= y_6 - rm_t \\ \frac{dy_6}{d\phi} &= -y_5 + ry_4 - rm_n \end{aligned}$$

Probleme ait boyutsuz malzeme özellikleri ve geometrik özellikler:

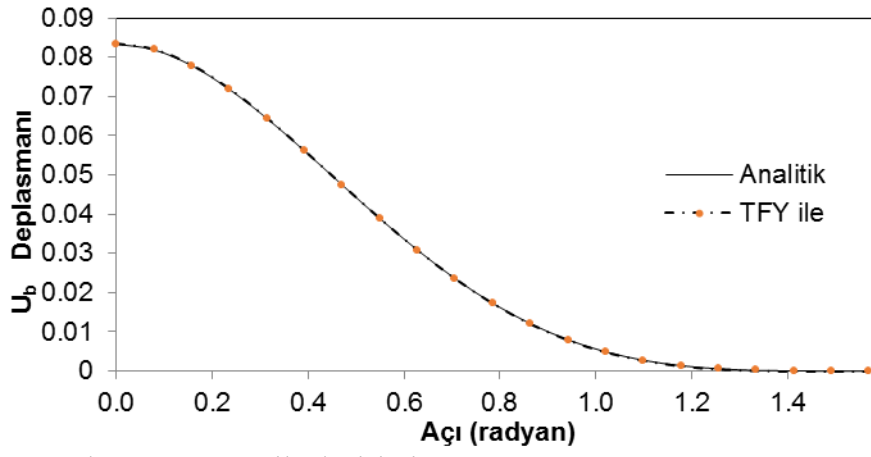
$$\mu = 1 = sbt$$

$$r_0 = 1 ; L = 1$$

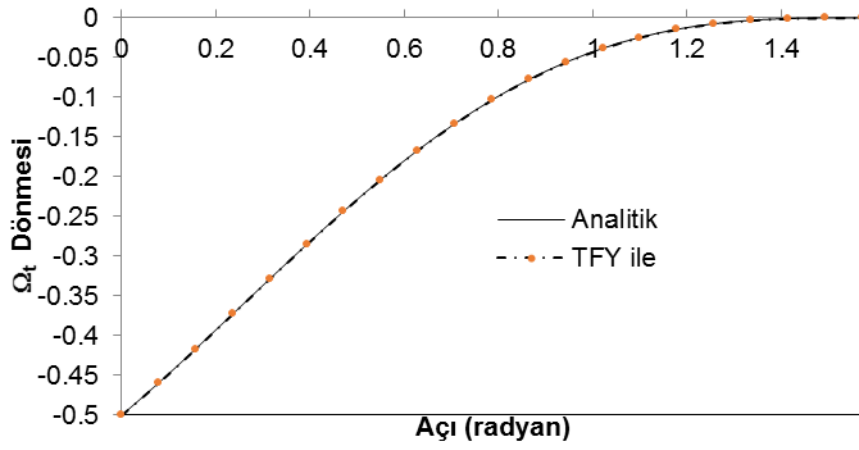
$$D_{tt} = 1 ; D_{nn} = 1 ; C_{bb} = GA/\alpha_b ; GA = 1$$

$$\alpha_b = 0 \text{ (Kayma deformasyonu etkisi ihmal ediliyor)}$$

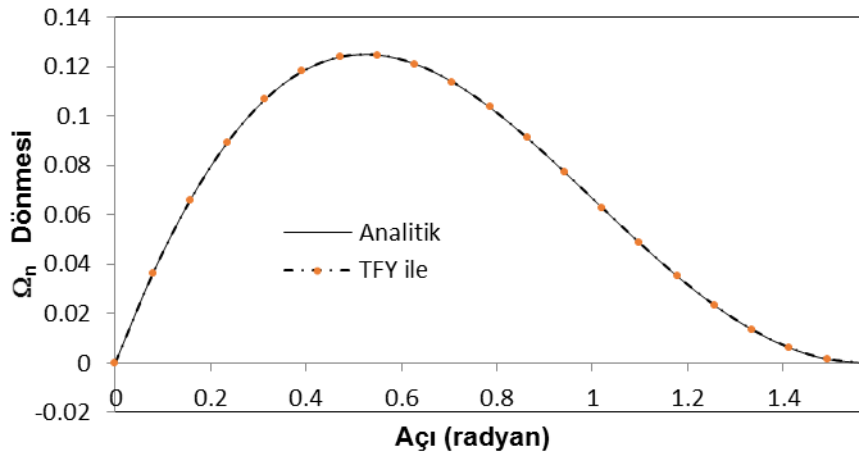
Düzlemine dik yüklü sikloid çubuk için deplasmanların açı ile değişimleri Şekil (4.24-26.)’da ve kesit tesirlerinin açı ile değişimleri de Şekil (4.27-29.)’da gösterilmektedir.



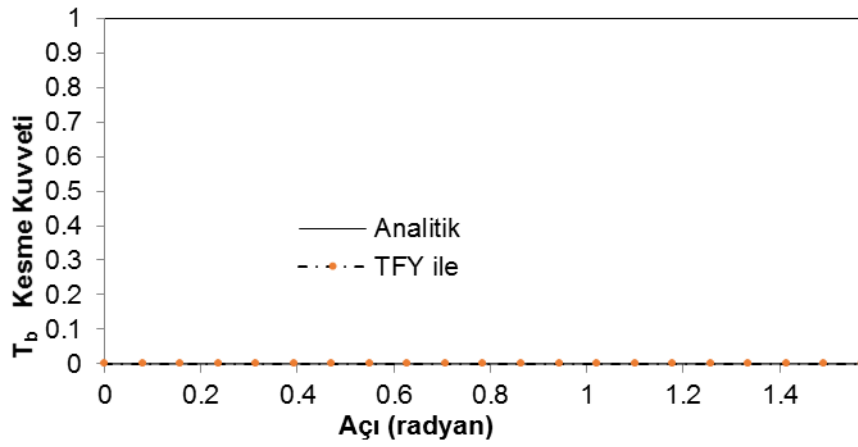
Şekil 4.24. U_b Deplasmanının açı ile değişimi



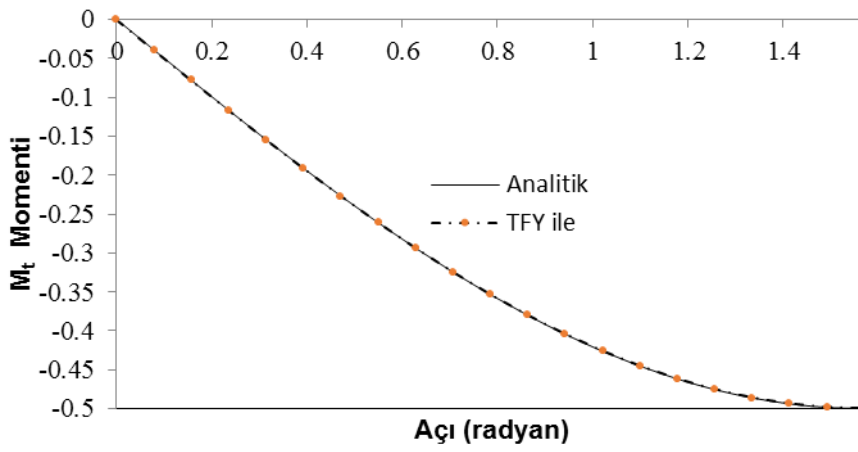
Şekil 4.25. Ω_t Dönmesinin açı ile değişimi



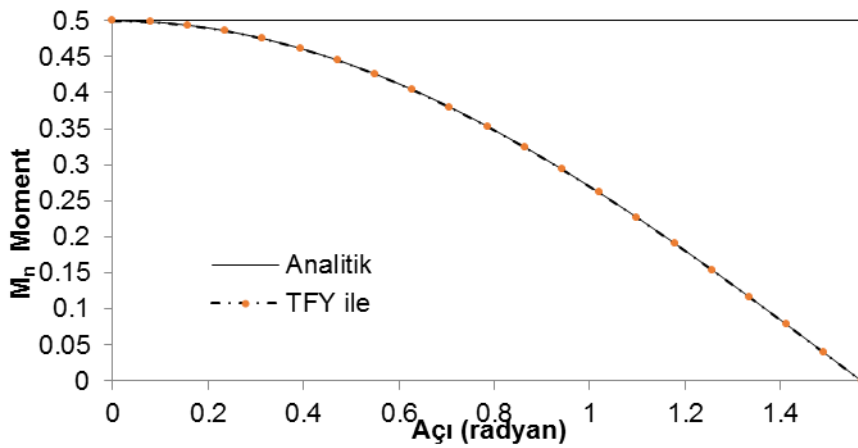
Şekil 4.26. Ω_n Dönmesinin açı ile değişimi



Şekil 4.27. T_b Kesme kuvvetinin açı ile değişimi



Şekil 4.28. M_t Momentinin açı ile değişimi

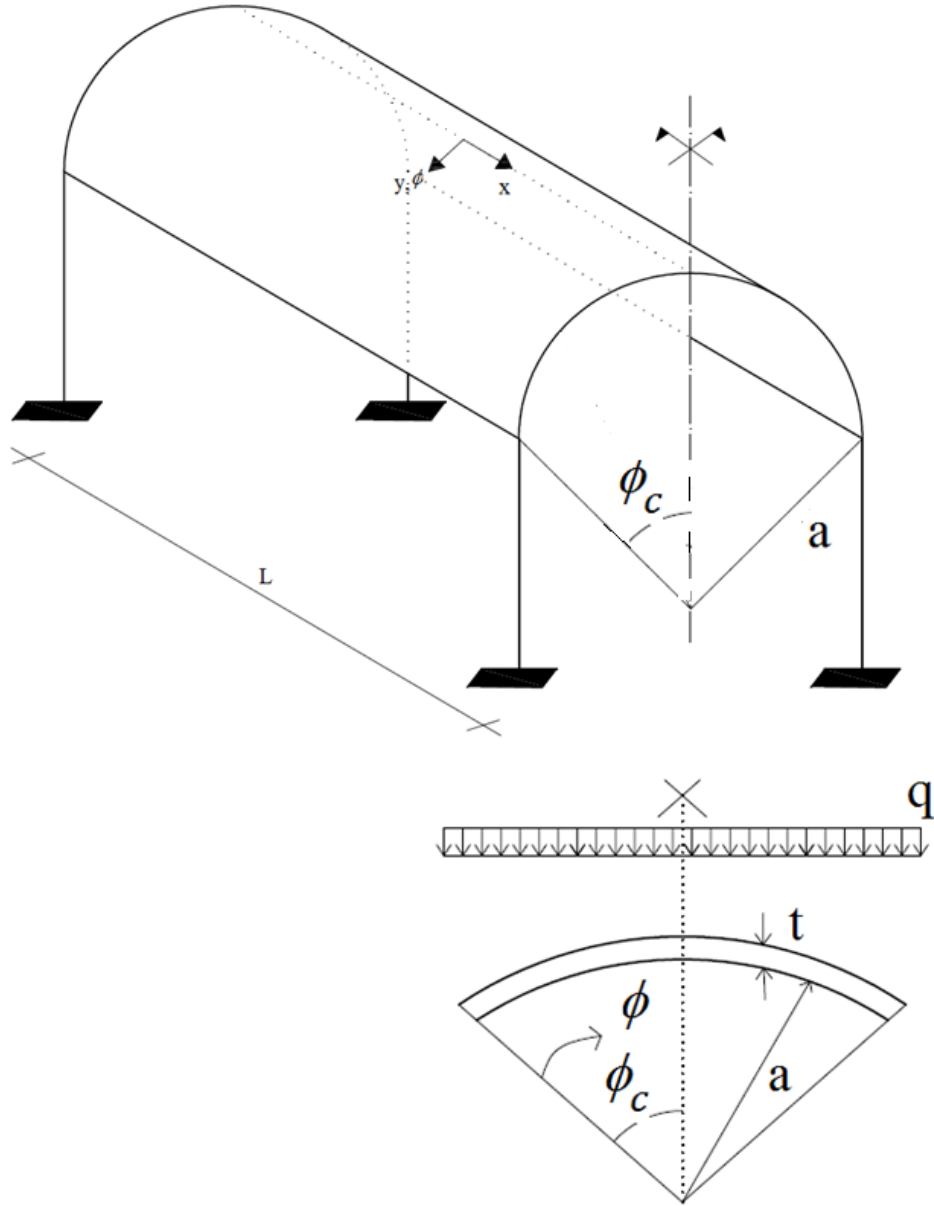


Şekil 4.29. M_n Momentinin açı ile değişimi

Grafiklerden de anlaşıldığı gibi, kayma deformasyonu etkisi ihmal edilerek bulunan, analitik sonuçlar ile TFY ile bulunan değerler üst üste çakışmaktadır.

4.1.3.5 Tek Açıklıklı Uzun Silindirik Tonz

Bu örnekte boyuna doğrultuda serbest kenarlı, üniform yüklü, tek açıklıklı uzun silindirik bir tonoz ele alınacaktır Şekil(4.30.).



Şekil 4.30. Tek açıklıklı uzun silindirik tonoz çatı

Serbest uç ve simetri noktasındaki sınır şartları:

$$\phi = 0 \rightarrow \begin{cases} M_\phi = 0 \\ Q_\phi = 0 \\ N_\phi = 0 \\ N_{x\phi} = 0 \end{cases} \quad (\text{Serbest uçta})$$

$$\phi = \phi_c \rightarrow \begin{cases} v = 0 \\ \theta = 0 \\ Q_\phi = 0 \\ N_{x\phi} = 0 \end{cases} \quad (\text{Simetri eksenini üzerinde})$$

Yukarıda verilen sınır şartlarına bağlı olarak tonozun analitik çözümü (Gibson,1980) Ek 3’de verilen Mathematica programı yardımıyla hesaplanmıştır.

Kanonik halde verilen (3.102.-109.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde, herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen $w, \theta, M_\phi, Q_\phi, N_\phi, N_{x\phi}, N_x, v$ büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi)$ değişkenleri kullanılmıştır.

$$w = y_1(\phi). \cos(kx)$$

$$\theta = y_2(\phi). \cos(kx)$$

$$M_\phi = y_3(\phi). \cos(kx)$$

$$Q_\phi = y_4(\phi). \cos(kx)$$

$$N_\phi = y_5(\phi). \cos(kx)$$

$$\frac{dN_{x\phi}}{dx} = y_6(\phi). \cos(kx)$$

$$\frac{du}{dx} = y_7(\phi). \cos(kx)$$

$$v = y_8(\phi). \cos(kx)$$

Altıncı ve yedinci ifadede türevler alınmış olmasının nedeni, tüm ifadelerde $\cos(kx)$ bulunması ve ileriki işlemlerde kolaylık sağlamasıdır. Bu iki ifade daha sonra ilgili sabitlerle çarpılıp, $N_{x\phi}$ ve N_x büyüklüklerin hesabında kullanılmaktadır.

Tonoz sistemin davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıdaki tariflere göre yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy_1}{d\phi} = ay_2$$

$$\frac{dy_2}{d\phi} = -\frac{a}{D}y_3$$

$$\frac{dy_3}{d\phi} = ay_4$$

$$\frac{dy_4}{d\phi} = -y_5 - aZ$$

$$\frac{dy_5}{d\phi} = -ay_6 - aY$$

$$\frac{dy_6}{d\phi} = E.t.k^2.a.y_7$$

$$\frac{dy_7}{d\phi} = a.k^2.y_8$$

$$\frac{dy_8}{d\phi} = y_1$$

Bu örneğe ait yükleme ve boyutlar, ilgili kaynakta aşağıdaki gibi verilmektedir (Gibson,1980).

Kabuk boyutları:

Boy(Kabuk uzunluğu) L : 120 ft

a(Kabuk yarıçapı) : 30 ft

t (kabuk et kalınlığı) : 0.25 ft

ϕ_c (kabuk yarı açısı) : 40°

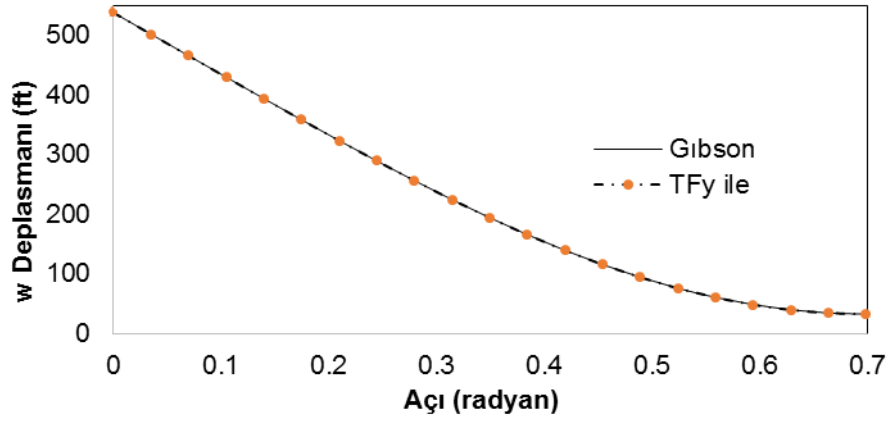
Ölü yük: : 36 lb/ft²

+Kar yükü : 14 lb/ft²

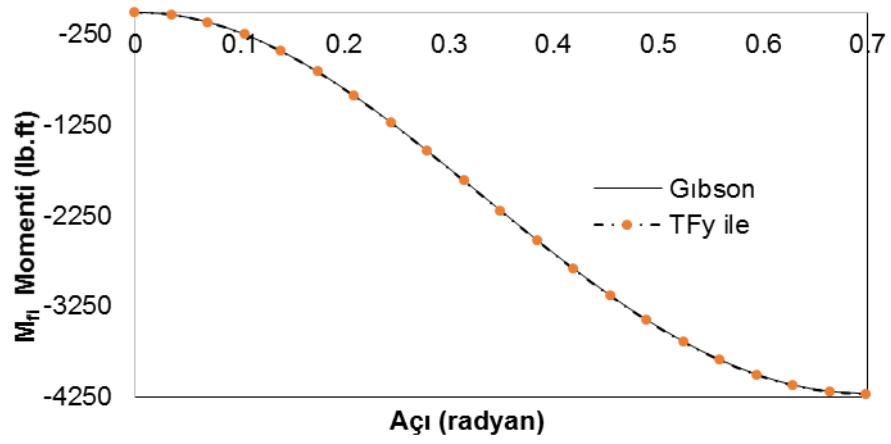
q(Toplam yük) : 50 lb/ft²

E(Elastisite Modülü) : 1.0 * 10⁶ lb/ft²

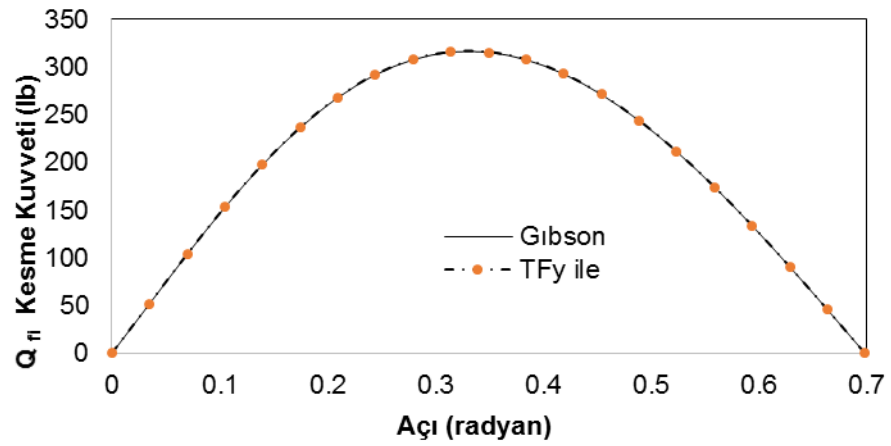
Uzun tek açıklıklı silindirik Tonoz için deplasmanların ve kesit tesirlerinin açı ile değişimleri Şekil (4.31.-36.)'da gösterilmektedir. Deplasman ve kesit tesirleri x=0 noktasına ve tonoz açıklığında hesaplanmıştır.



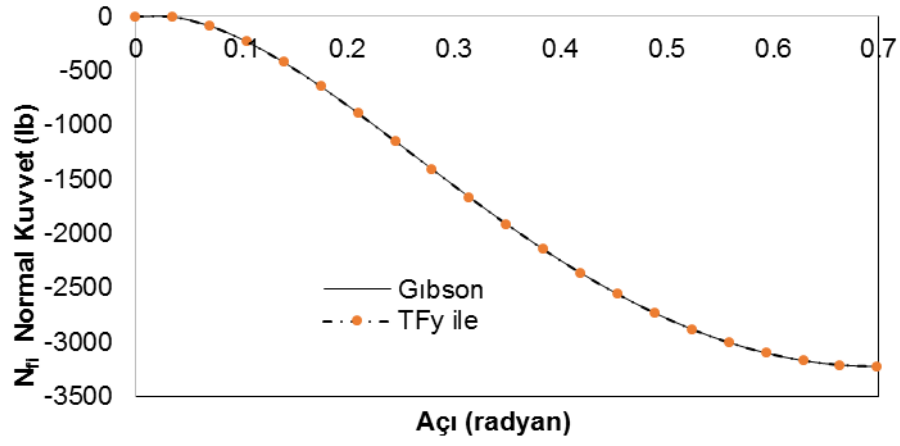
Şekil 4.31. w Deplasmanının açı ile değişimi



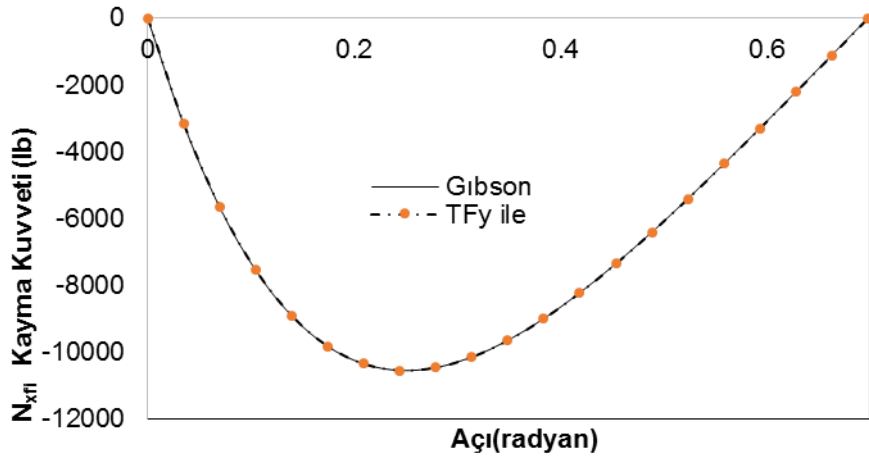
Şekil 4.32. M_{fi} Momentinin açı ile değişimi



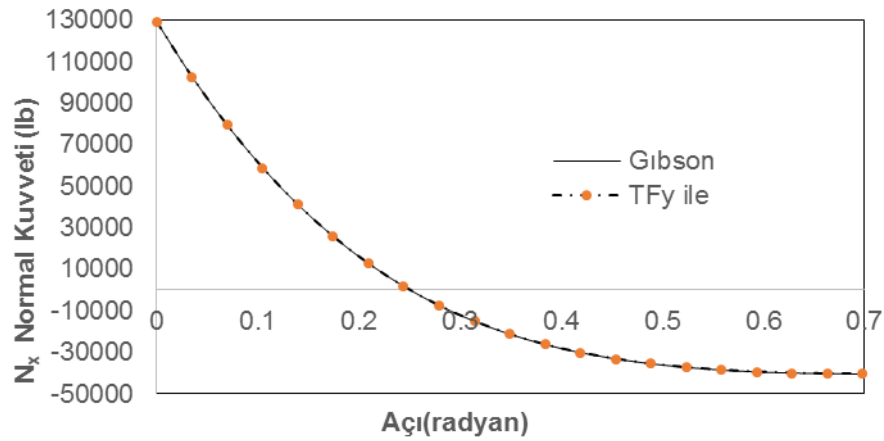
Şekil 4.33. Q_{fi} Kesme kuvvetinin açı ile değişimi



Şekil 4.34. N_{fi} Kuvvetinin açı ile değişimi



Şekil 4.35. N_{xfi} Kuvvetinin açı ile değişimi

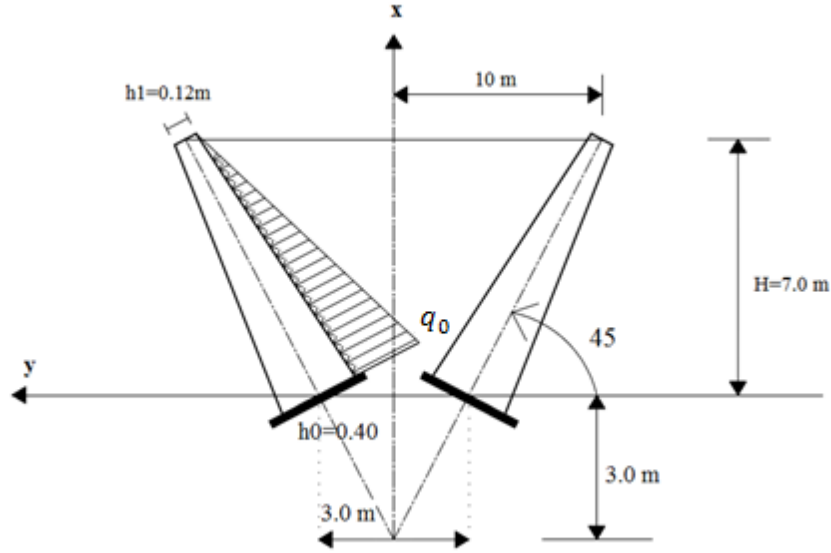


Şekil 4.36. N_x Normal kuvvetinin açı ile değişimi

Tüm grafiklerde TFY ile bulunan değerlerin kapalı çözümler ile çakıştıkları görülmektedir.

4.1.3.6. Lineer Değişken Kalınlıklı Konik Su Deposu

Şekil 4.37.'de görülen lineer değişken kalınlıklı konik su deposunun su basıncı altındaki statik davranışı incelenmiştir.



Şekil 4.37. Lineer değişken kalınlıklı konik su deposu

Ankastre ve serbest ucun sınır şartları aşağıda verilmektedir.

$$s = 0 \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \chi = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$s = L \rightarrow \begin{cases} N_s = 0 \\ M_s = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

Kanonik halde verilen (3.119.-124.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılmak üzere, herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen w, χ, v, N_s, M_s ve Q büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi)$ değişkenleri kullanılmıştır.

Yer değişimi $w(\phi) = y_1$

Eğim $\chi(\phi) = y_2$

Meridyen boyunca deplasman $v(\phi) = y_3$

Eksenel kuvvet	$N_s(\phi) = y_4$
Moment	$M_s(\phi) = y_5$
Kesme kuvveti	$Q(\phi) = y_6$

Lineer değiken kalınlıklı konik kabuğa davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıda verilen ifadeler ile yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy_1}{ds} = -y_2$$

$$\frac{dy_2}{ds} = -\mu \frac{k_1}{y} y_2 + \frac{1}{K} y_5$$

$$\frac{dy_3}{ds} = \mu \frac{k_2}{y} y_1 - \mu \frac{k_1}{y} y_3 + \frac{1}{D} y_4$$

$$\frac{dy_4}{ds} = -D(1 - \mu^2) \frac{k_1 k_2}{y^2} y_1 + D(1 - \mu^2) \frac{k_1^2}{y^2} y_3 - (1 - \mu) \frac{k_1}{y} y_4 - P_s$$

$$\frac{dy_5}{ds} = K(1 - \mu^2) \frac{k_1^2}{y^2} y_2 - (1 - \mu) \frac{k_1}{y} y_5 + y_6$$

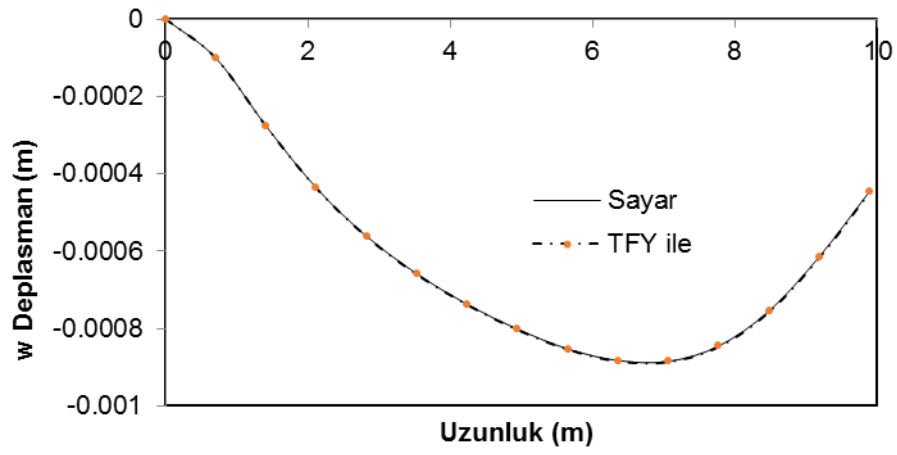
$$\frac{dy_6}{ds} = \left(D(1 - \mu^2) \frac{k_2^2}{y^2} \right) y_1 + (-D(1 - \mu^2) \frac{k_1 k_2}{y^2}) y_3 + \mu \frac{k_2}{y} y_4 - \frac{k_1}{y} y_6 - P_z$$

Probleme ait malzeme özellikleri ve geometrik özellikler:

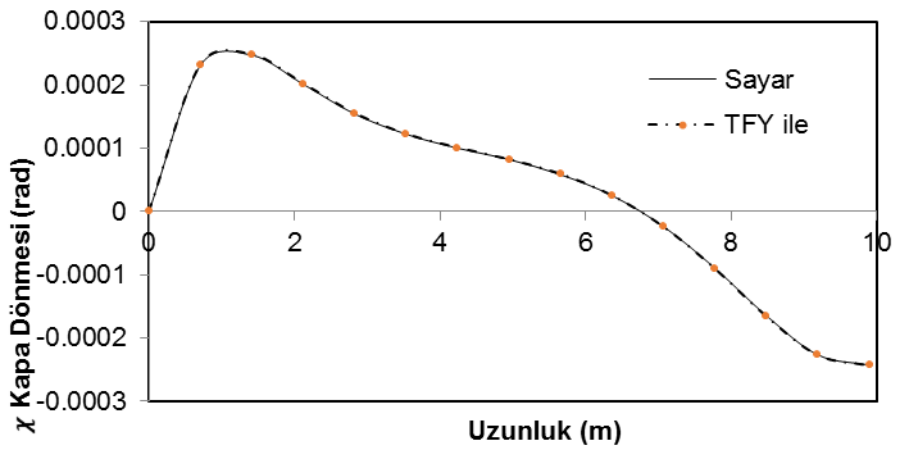
$$h_0=0.40 \text{ m} ; h_1=0.12 \text{ m} ; q_0=1 \text{ Mp}$$

$$E=2.1 \cdot 10^6 \text{ Mp/m}^2 ; \mu = \frac{1}{6} = 0.166667$$

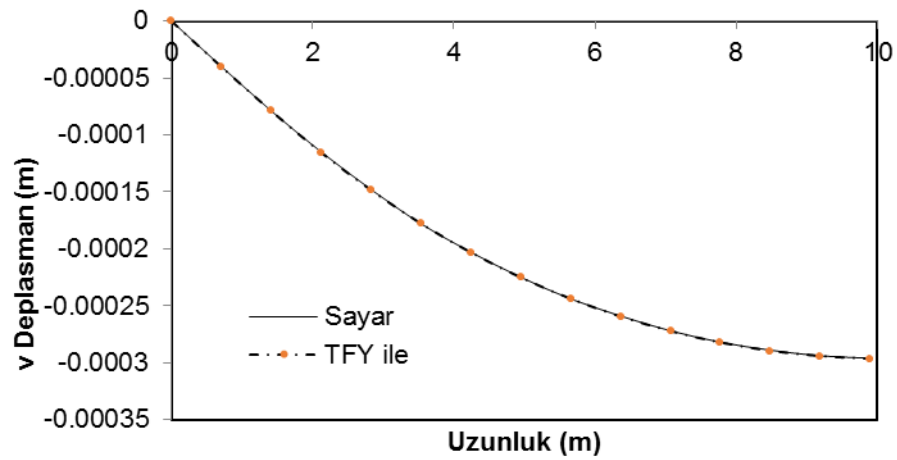
Lineer değiken kalınlıklı konik kabuğa ait bu problem için Şekil (4.38-43.)’da deplasmanların ve kesit tesirlerinin açı ile değişimi gösterilmektedir.



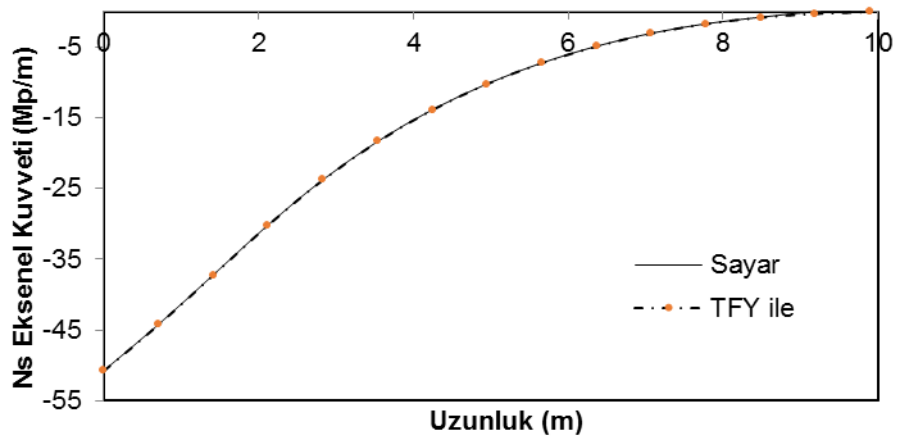
Şekil 4.38. w Deplasmanının açı ile değişimi



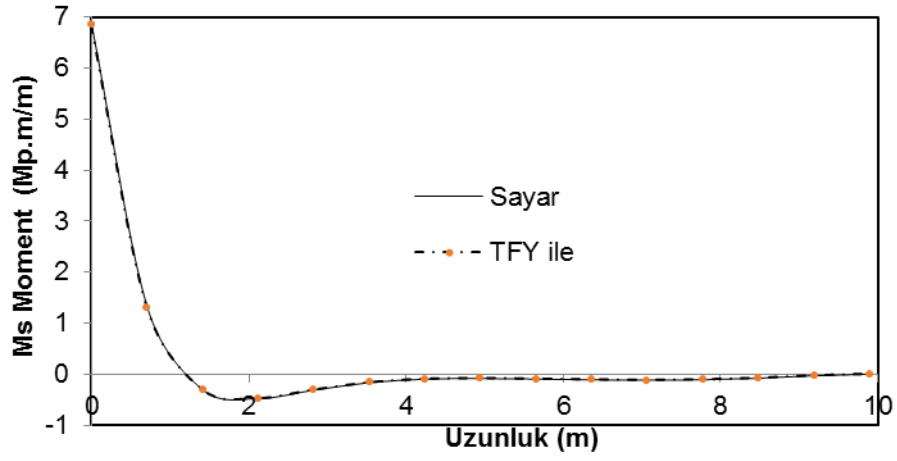
Şekil 4.39. χ Dönmesinin açı ile değişimi



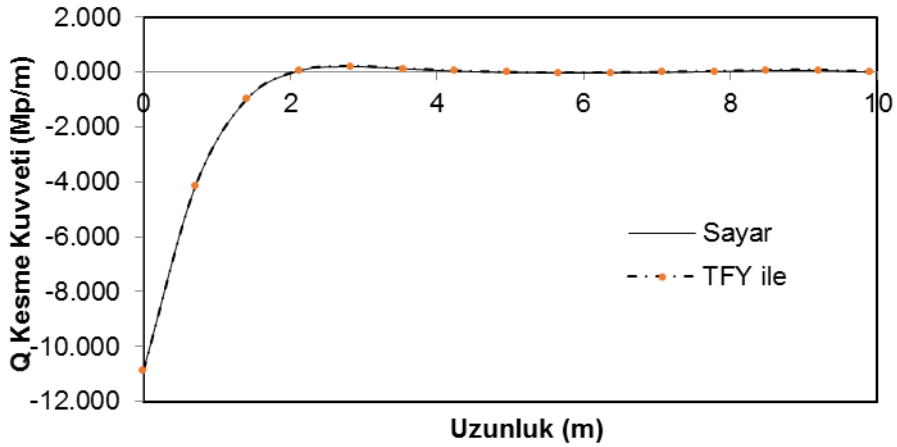
Şekil 4.40. v Deplasmanının açı ile değişimi



Şekil 4.41. N_s Eksesel kuvvetinin açı ile değişimi



Şekil 4.42. M_s Momentinin açı ile değişimi

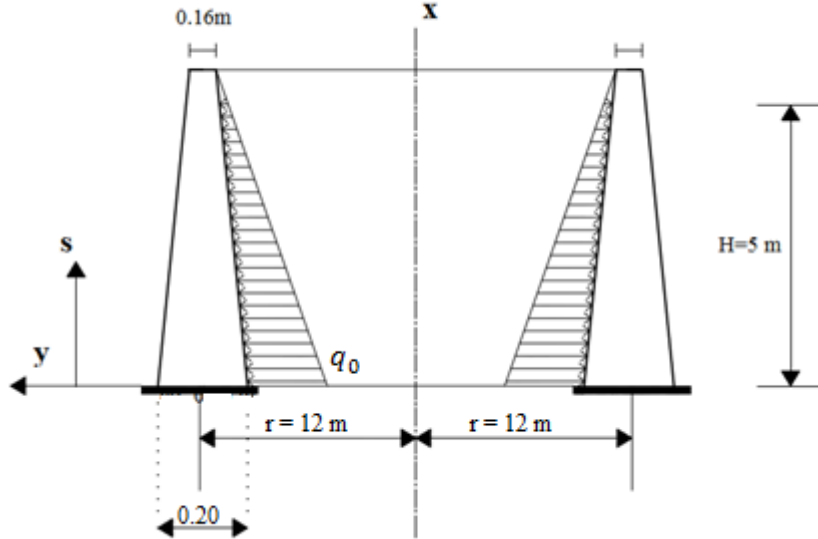


Şekil 4.43. Q Kesme Kuvvetinin açı ile değişimi

Grafiklerden de anlaşıldığı gibi, TFY ile çözümden elde edilen değerler ile ilgili kaynakta verilen sonuçlar üst üste düşmektedir (Sayar,1970'e bakınız).

4.1.3.7. Lineer Değişken Kalınlıklı Silindirik Su Deposu

Şekil 4.44.'de görülen lineer değişken kalınlıklı su deposunun su basıncı altındaki statik davranışı incelenmiştir.



Şekil 4.44. Lineer değişken kalınlıklı silindirik su deposunu

Ankastre ve serbest uçtaki sınır şartları,

$$s = 0 \rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ \chi = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

$$s = L \rightarrow \begin{cases} N_s = 0 \\ M_s = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$$

dikkate alınarak kanonik halde verilen (3.127.-132.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılmak üzere, herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen w, χ, v, N_s, M_s ve Q büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi)$ değişkenleri kullanılmıştır.

Yer değişimi	$w(\phi) = y_1$
Eğim	$\chi(\phi) = y_2$
Meridyen boyunca Deplasman	$v(\phi) = y_3$
Eksenel kuvvet	$N_s(\phi) = y_4$
Moment	$M_s(\phi) = y_5$
Kesme kuvveti	$Q(\phi) = y_6$

Lineer değiken kalınlıklı silindirik su deposuna davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıda verilen ifadeler ile yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

$$\frac{dy_1}{ds} = -y_2$$

$$\frac{dy_2}{ds} = \frac{1}{K} y_5$$

$$\frac{dy_3}{ds} = \mu \frac{1}{r_0} y_1 + \frac{1}{D} y_4$$

$$\frac{dy_4}{ds} = -P_s$$

$$\frac{dy_5}{ds} = y_6$$

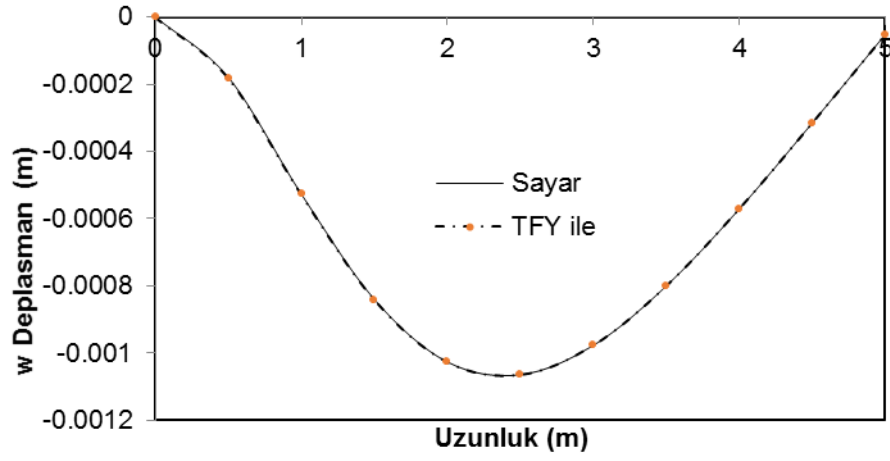
$$\frac{dy_6}{ds} = \left(D(1 - \mu^2) \frac{1}{r_0^2} \right) y_1 + \frac{1}{r_0} y_4 - P_z$$

Probleme ait malzeme özellikleri ve geometrik özellikler:

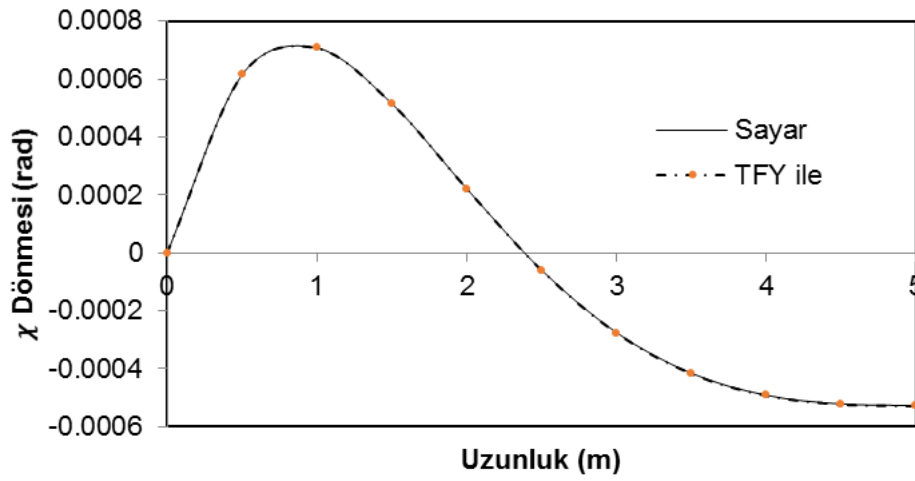
$$h_0=0.20 \text{ m} ; h_I=0.12 \text{ m} ; q_0=1 \text{ Mp}$$

$$E=2.1 \cdot 10^6 \text{ Mp/m}^2 ; \mu = \frac{1}{6} = 0.166667$$

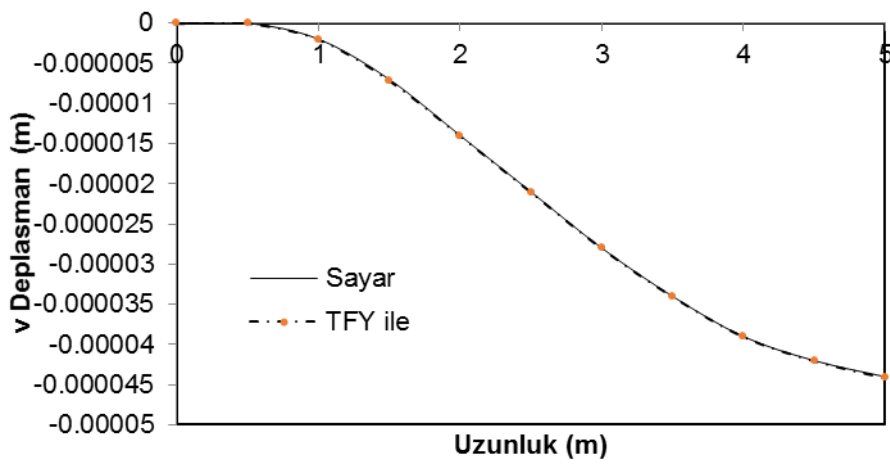
Lineer değiken kalınlıklı silindirik su deposuna ait bu problem için Şekil (4.45-50.)'da deplasmanların ve kesit tesirlerinin açısı ile değişimi gösterilmektedir.



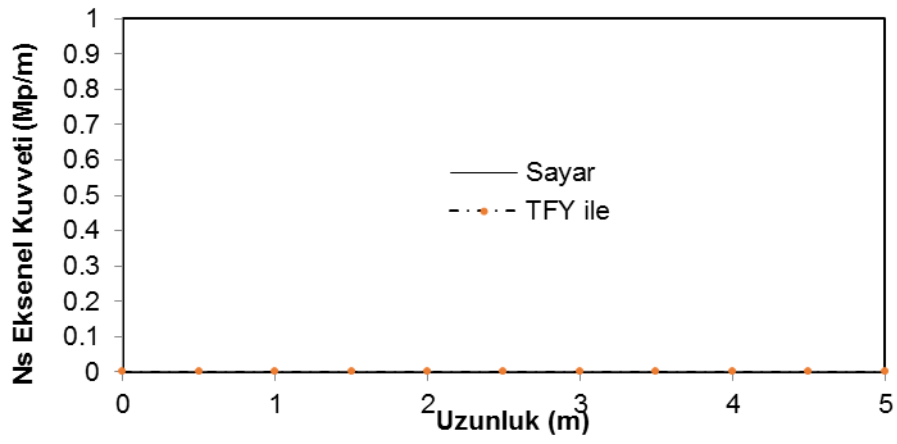
Şekil 4.45. w deplasmanının açı ile değişimi



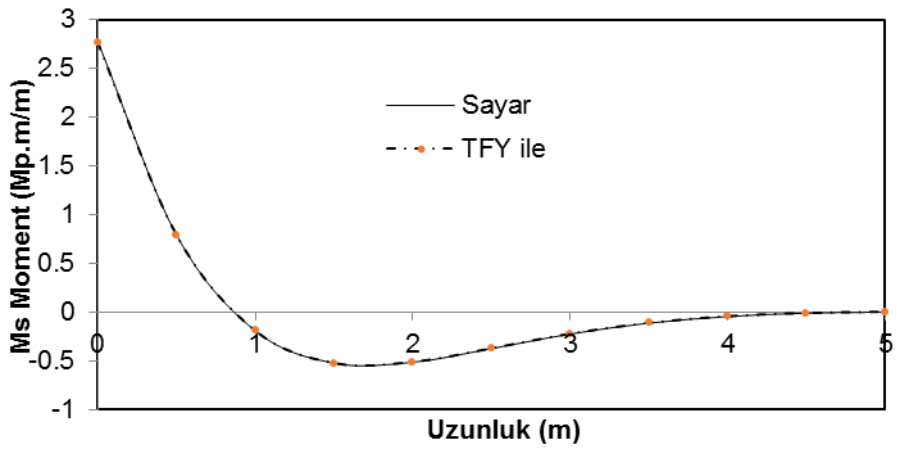
Şekil 4.46. χ Dönmesinin açı ile değişimi



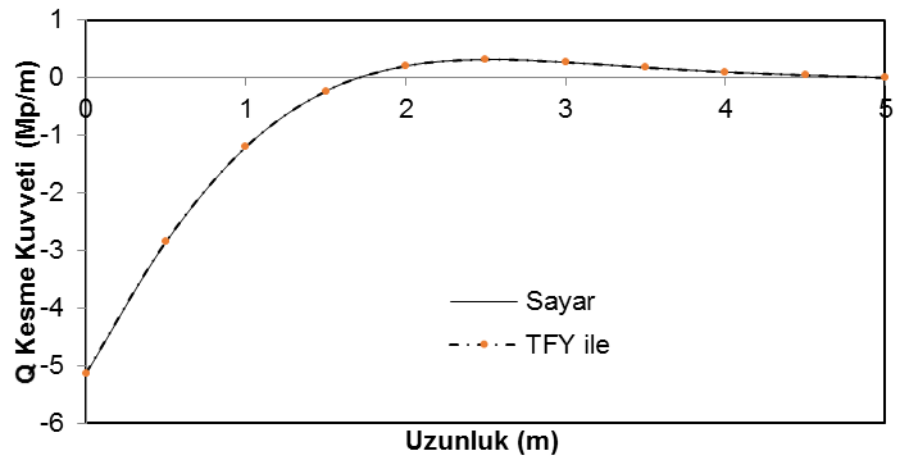
Şekil 4.47. v Deplasmanının açı ile değişimi



Şekil 4.48. N_s Eksenel kuvvetinin açı ile değişimi



Şekil 4.49. M_s Momentinin açı ile değişimi



Şekil 4.50. Q Kesme kuvvetinin açı ile değişimi

Grafiklerden de anlaşıldığı gibi, TFY ile çözümden elde edilen değerler ile Sayar (1970)'ın verdiği sonuçlar üst üste gelmektedir.

4.2. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine Dayalı Rijitlik Matrisi

Bu bölümde, geometrik özellikleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde veya düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuklarda ara mesnet ve yükleme olması halinde davranışını idare eden diferansiyel denklemlerin çözümü Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine Dayalı Rijitlik Matrisi ile yapılmaktadır. Çözüm aralığında kesit ve geometrik özellikleri değişen iki noktalı sınır değer problemlerinin direk statik analizleri için FORTRAN dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan programlarda 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmış olup, TFY'nin adımları aşağıda verilmiştir.

4.2.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Birinci mertebeden 6 adet diferansiyel denklem,

$$\frac{d\{Y(\phi)\}}{d\phi} = [A(\phi)]_{n \times n} [Y(\phi)]_{n \times 1} + [F(\phi)]_{n \times 1} \quad (4.12.)$$

şeklinde olsun. Burada ϕ bağımsız değişken, $\{Y\}$ bilinmeyen bağımlı değişkenleri içeren kolon matris, $[A]$ diferansiyel geçiş matrisi, $\{F\}$ yüklemeyi içeren kolon matristir. Düzlem içinde yüklü daire eksenli çubuklar için durum vektörünün elemanları

$$Y(\phi) = \{U_t(\phi), U_n(\phi), \Omega_b(\phi), T_t(\phi), T_n(\phi), M_b(\phi)\}^T \quad (4.13.)$$

olarak tanımlanmaktadır. gibi tanımlanmaktadır. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi, başlangıç şartları yardımıyla (4.12.) denkleminin çözümüne dayanmaktadır. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. Denklemin genel çözümü ise,

$$\{Y(\phi)\} = \sum_{m=1}^6 C_m \left(U^{(m)}(\phi) \right) + \{V(\phi)\} \quad (4.14.)$$

şeklinde. $U^{(m)}(\phi)$ m'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümdür. $V(\phi)$ ise, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. Burada C_m integrasyon sabiti sınır şartlarından elde edilmektedir.

4.2.2. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemine Dayalı Rijitlik Matrisinin Hesaplanması

Eleman denklemi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır.

$$\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{k}]\{\mathbf{d}\} + \{\mathbf{f}\} \quad (4.15.)$$

Her düğümde üç serbestlik derecesi olmak üzere, bunun ikisi deplasman birisi dönmedir. Elemanın başlangıç düğümü i, diğerucu j düğümü olmak üzere eleman deplasman ve eleman uç kuvvetleri

$$\{\mathbf{d}\} = \{U_t(\phi_i), U_n(\phi_i), \Omega_b(\phi_i), U_t(\phi_j), U_n(\phi_j), \Omega_b(\phi_j)\}^T \quad (4.16.)$$

$$\{\mathbf{p}\} = \{T_t(\phi_i), T_n(\phi_i), M_b(\phi_i), T_t(\phi_j), T_n(\phi_j), M_b(\phi_j)\}^T \quad (4.17.)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Eleman rijitlik matrisini hesaplamak için (4.12.) ifadesindeki eleman uç deplasmanlarına sırasıyla birim deplasman uygulanır. Bu işlem 6 kez tekrarlanır. Ankastrelik uç kuvvetleri ise, bütün uç deplasmanları sıfıra eşitleyerek (4.12.) denkleminin çözümünden hesaplanmaktadır.

$$\{\mathbf{f}\} = \{-T_t(\phi_i), -T_n(\phi_i), -M_b(\phi_i), T_t(\phi_j), T_n(\phi_j), M_b(\phi_j)\}^T \quad (4.18.)$$

Eleman koordinatlarında elde edilen bu denklemlerden sistem koordinatlarına geçmek için aşağıdaki transformasyon işlemi uygulanmalıdır.

$$[\mathbf{k}'] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{k}] [\mathbf{T}] \quad ; \quad [\mathbf{f}'] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{f}] \quad (4.19.)$$

Burada T transformasyon matrisi olup eğri eksenli düzlemsel çubuklar için aşağıda verilmektedir. Çubuğun i ve j uçları için dönüşüm matrisleri:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{t}}_i & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{t}}_j \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{t}}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{t}}_j = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20.)$$

Bu şekilde sistem koordinatlarında elde edilen eleman matrislerinin uygun bileşenleri kullanılarak, kodlama tekniği ile sistem rijitlik matrisi ve sistem yük vektörü oluşturulmaktadır.

Düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuklar için de işlemler benzer şekilde yapılmaktadır.

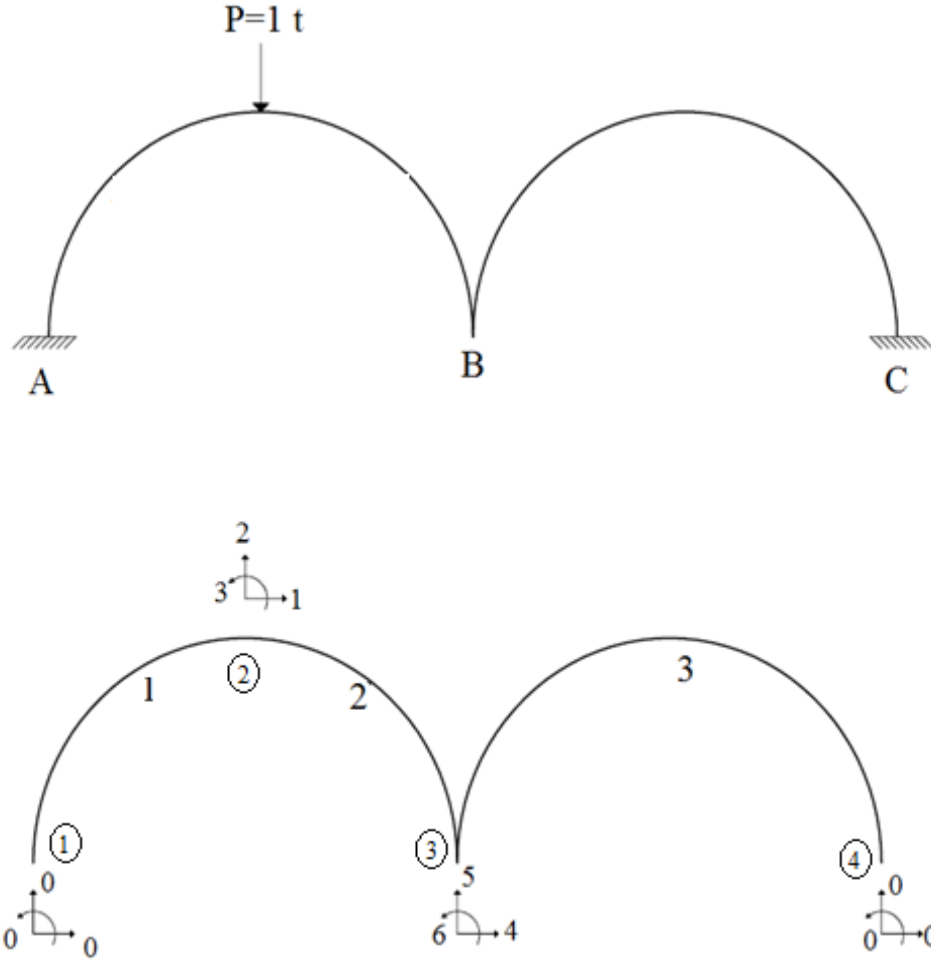
modülü $E=1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, poisson oranı $\nu= 0.3$ ve $A = 1 \text{ m}^2$ olarak verilmiştir. Bulunan sonuçlar Çizelge 4.3’de verilmektedir. Ayrıca ANSYS programı yardımıyla, 90 adet doğru eksenli elaman kullanılarak bulunan kesit tesirleri Çizelge 4.3.de karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.3 Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubukların uç kuvvetleri

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bu Çalışma	Taşıma Matrisi Bayhan (1993)	ANSYS (90 Eleman)
1	T_{ti}	4.318	4.318	4.32
	T_{ni}	-6.203	-6.203	-6.204
	M_{bi}	-19.052	-19.052	-19.07
	T_{tj}	-1.787	-1.787	-1.788
	T_{nj}	-1.819	-1.819	-1.814
	M_{bj}	-6.262	-6.262	-6.26
2	T_{ti}	1.787	1.787	1.788
	T_{ni}	1.819	1.819	1.814
	M_{bi}	6.262	6.262	6.26
	T_{tj}	-2.457	-2.457	-2.456
	T_{nj}	-0.682	-0.682	-0.68
	M_{bj}	0.438	0.438	0.428
3	T_{ti}	2.457	2.457	2.456
	T_{ni}	1.682	1.682	1.68
	M_{bi}	-0.438	-0.438	-0.428
	T_{tj}	-1.682	-1.682	-1.68
	T_{nj}	2.457	2.457	2.456
	M_{bj}	-7.316	-7.316	-7.333
4	T_{ti}	1.174	1.174	1.207
	T_{ni}	1.675	1.675	1.7
	M_{bi}	7.316	7.316	7.333
	T_{ij}	-1.675	-1.675	-1.7
	T_{nj}	1.174	1.174	1.207
	M_{bj}	-2.309	-2.309	-2.398

Çizelge 4.3. de görüldüğü gibi, bu çalışma da elde edilen sonuçlar, ANSYS ve literatürde (Bayhan, 1993, Çalım,1996) verilen sonuçlar ile uyum içerisindedir.

4.2.2.2. Düzlemi İçinde Yüklü İki Açıklıklı Daire Eksenli Çubuk



Şekil 4.52. Düzlemi içinde yüklü iki açıklıklı daire eksenli çubuk ve kodlama durumu

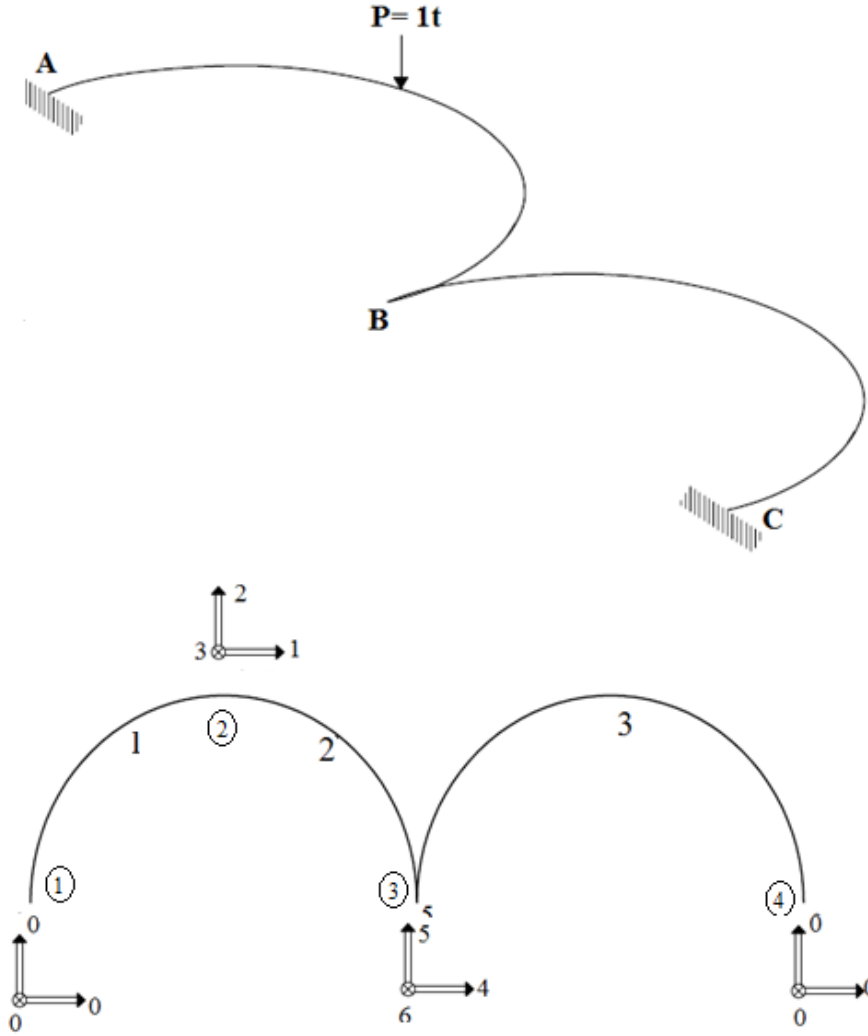
Düzlemi içinde yüklü iki yarım daireden oluşan iki ucu ankastre daire eksenli çubuk problemi ele alınmaktadır (Şekil 4.52). Daire eksenli kirişe, $P = 1\text{ t}$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri: atalet momenti $I_b=1/12\text{ m}^4$, yarıçap $r=10\text{ m}$, elastisite modülü $E=1\times 10^6\text{ t/m}^2$, poisson oranı $\nu = 0.3$ ve $A = 1\text{ m}^2$ olarak verilmiştir. Bulunan sonuçlar, (Bayhan,1993) ve ANSYS programı yardımıyla 100 adet doğru eksenli elaman kullanılarak bulunan kesit tesirleri Çizelge 4.4 de kıyaslanarak verilmektedir.

Çizelge 4.4 Düzlemi içinde yüklü iki açıklıklı daire eksenli çubukların uç kuvvetleri

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bu Çalışma	Taşıma Matrisi Bayhan(1993)	ANSYS (100 eleman)
1	T_{ti}	0.811	0.811	0.811
	T_{ni}	0.227	0.227	0.228
	M_{bi}	-3.173	-3.173	-3.169
	T_{tj}	-0.227	-0.227	-0.228
	T_{nj}	0.811	0.811	0.811
	M_{bj}	-2.661	-2.661	-2.657
2	T_{ti}	0.227	0.227	0.227
	T_{ni}	0.189	0.189	0.189
	M_{bi}	2.661	2.661	2.657
	T_{tj}	-0.19	-0.189	-0.189
	T_{nj}	0.227	0.227	0.227
	M_{bj}	-3.037	-3.037	-3.042
3	T_{ti}	-0.189	-0.189	-0.189
	T_{ni}	0.227	0.227	0.227
	M_{bi}	3.037	3.037	3.042
	T_{tj}	-0.19	-0.189	-0.189
	T_{nj}	0.227	0.227	0.227
	M_{bj}	0.753	0.753	0.747

Çizelge 4.4.'de görüldüğü gibi, bu çalışma da elde edilen sonuçlar ile (Bayhan,1993) ve ANSYS değerleri uyum içerisindedir.

4.2.2.3. Düzlemine Dik Yüklü İki Açıklıklı Daire Eksenli Çubuk



Şekil 4.53. Düzlemine dik yüklü iki açıklıklı daire eksenli çubuk ve kodlama durumu

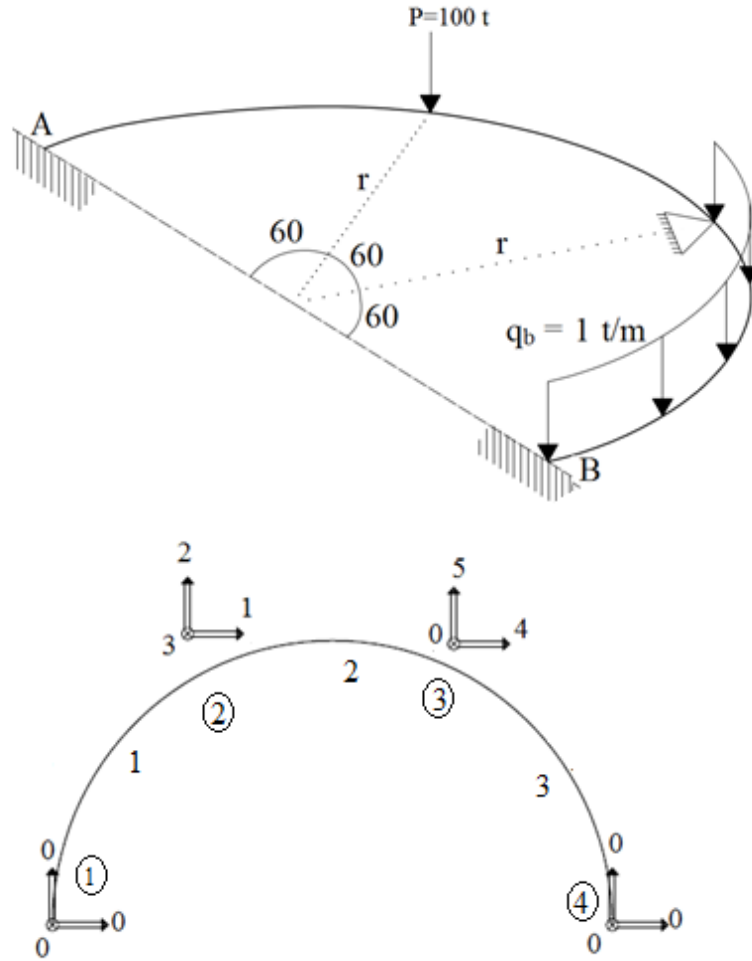
İki yarım daireden oluşan iki ucu ankastre düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuk problemi ele alınmaktadır (Şekil 4.53). Daire eksenli kirişe, $P = 1 t$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri: atalet momenti $I_n=1/12 m^4$, $I_t=0.141m^4$, yarıçap $r=10 m$, elastisite modülü $E=1 \times 10^6 t/m^2$, Poisson oranı $\nu = 0.3$ ve $A = 1 m^2$ olarak verilmiştir. Bulunan sonuçlar, (Bayhan,1993) ve ANSYS programı yardımıyla 100 adet doğru eksenli elaman kullanılarak bulunan kesit tesirleri Çizelge 4.5’de kıyaslanmıştır.

Çizelge 4.5 Düzlemine dik yüklü iki açıklıklı daire eksenli çubukların uç kuvvetleri

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bu Çalışma TFY ile $I_t=0.141 \text{ m}^4$	ANSYS (100 Eleman) $I_t=0.141 \text{ m}^4$	Taşıma Matrisi Bayhan (1993) $I_t=0.208 \text{ m}^4$	Bu Çalışma TFY ile $I_t=0.208 \text{ m}^4$
1.	M_{ti}	-4.531	-4.728	-4.543	-4.544
	M_{ni}	7.933	8.34	7.869	7.869
	T_{bi}	-0.806	-0.816	-0.807	-0.807
	M_{tj}	0.128	0.196	0.199	0.199
	M_{nj}	3.530	3.44	3.522	3.524
	T_{bj}	0.806	0.816	0.807	0.807
2.	M_{ti}	-0.128	-0.196	-0.199	-0.199
	M_{ni}	-3.530	-3.44	-3.524	-3.524
	T_{bi}	0.194	0.184	0.193	0.193
	M_{tj}	1.592	1.589	1.592	1.592
	M_{nj}	-2.067	-1.660	-2.131	-2.131
	T_{bj}	-0.194	-0.184	-0.193	-0.193
3.	M_{ti}	1.592	1.589	1.592	1.592
	M_{ni}	-2.067	-1.66	-2.131	-2.131
	T_{bi}	0.194	0.184	0.193	0.193
	M_{tj}	-2.286	-2.09	-2.273	-2.273
	M_{nj}	-2.067	-1.66	-2.131	-2.131
	T_{bj}	-0.194	-0.184	-0.193	-0.193

Bu problem Çizelge 4.5. üzerinde literatür (Bayhan,1993) ile karşılaştırılmıştır. Ancak literatürde verilen burulma atalet momenti değeri, $I_t=0.208 \text{ m}^4$ hatalı verilmiş olup, bu hatalı atalet momenti için literatür ile karşılaştırılmış ve uyum içerisinde oldukları görülmüştür. Ayrıca, doğru burulma atalet momenti, $I_t=0.141 \text{ m}^4$ değeri için problem tekrar çözülmüş ve ANSYS ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

4.2.2.4. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuk



Şekil 4.54. Düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuk ve kodlama durumu

Düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır (Şekil 4.54). Daire eksenli kirişe, $q_b = 1 \text{ t/m}$ yayılı ve $P = 100 \text{ t}$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri: atalet momentleri $I_n = 1/12 \text{ m}^4$, $I_t = 0.141 \text{ m}^4$, yarıçap $r = 10 \text{ m}$, elastisite modülü $E = 1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, poisson oranı $\nu = 0.3$ ve $A = 1 \text{ m}^2$ olarak verilmiştir. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4.6.de verilmektedir.

Çizelge 4.6 . Düzlemine dik yüklü daire eksenli çubukların uç kuvvetleri

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bu Çalışma TFY ile $I_t=0.141 \text{ m}^4$	TaşımaMatrisi Bayhan (1993) $I_t=0.208 \text{ m}^4$	Bu Çalışma TFY ile $I_t=0.208 \text{ m}^4$
1.	M_{ti}	-69.620	-65.538	-65.538
	M_{ni}	394.220	387.815	387.815
	T_{bi}	-60.024	-59.595	-59.595
	M_{tj}	-6.475	-5.115	-5.115
	M_{nj}	262.418	265.441	265.441
	T_{bj}	60.024	59.595	59.595
2	M_{ti}	6.475	5.115	5.115
	M_{ni}	-262.418	-265.441	-265.441
	T_{bi}	39.976	40.4	40.405
	M_{tj}	24.143	25.65	25.295
	M_{nj}	-209.387	-212.77	-212.77
	T_{bj}	-39.976	-40.4	-40.405
3	M_{ti}	-24.143	-25.3	-25.295
	M_{ni}	209.387	212.77	212.77
	T_{bi}	-34.652	-34.414	-34.414
	M_{tj}	-14.179	-17.662	-17.662
	M_{nj}	124.498	119.746	119.745
	T_{bj}	24.181	23.942	23.942

Bu problem Çizelge 4.6. üzerinde literatür (Bayhan,1993) ile karşılaştırılmıştır. Ancak literatürde verilen burulma atalet momenti değeri $I_t = 0.208 \text{ m}^4$ hatalı olup, bu hatalı atalet momenti için literatür ile karşılaştırılmış ve uyum içerisinde oldukları görülmüştür. Ayrıca, doğru burulma atalet momenti, $I_t = 0.141 \text{ m}^4$ değeri için problem tekrar çözülmüştür.

4. 3. Dinamik Çözümlerle İlgili Araştırma Bulguları

Bu bölümde, düzlemsel ve daire eksenli çubukların dinamik yükler altında elastik ve viskoelastik titreşimleri incelenmiştir. Kanonik halde verilen diferansiyel denklemlere zamana göre Laplace dönüşümü uygulandığında, dinamik problem statik hale dönüşmektedir. Böylece, Laplace uzayında elde edilen lineer denklem takımı sayısal olarak kolayca çözülebilmektedir. Bir dizi parametre için Laplace uzayında elde edilen sayısal çözümlerden zaman uzayına geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş sayısal ters Laplace metodu uygulanmıştır (Ek-5'e bakınız). Viskoelastik malzeme için Kelvin tipi sönüm modeli kullanılmıştır. Direk TFY ile Laplace uzayında çözümleri bulabilmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemine dayalı başlangıç değer probleminin Laplace uzayındaki çözümleri için beşinci mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır.

4.3.1. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Eğri eksenli düzlemi içinde yüklü dairesel çubukları idare eden diferansiyel denklemler (3.150.), (3.151.), (3.155.), (3.156.), (3.157.) ve (3.161.) eşitliklerinde verilmiştir. Bu denklemlerin herbiri yere göre birinci mertebe türevler içermektedir. Bu denklemler matris notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{d(\bar{\mathbf{Y}}(\phi, z))}{d\phi} = [\bar{\mathbf{A}}(\phi, z)][\bar{\mathbf{Y}}(\phi, z)] + [\bar{\mathbf{F}}(\phi, z)] \quad (4.21.)$$

Burada ϕ bağımsız değişken; z ise, Laplace parametresidir. Eğri eksenli çubuklar için, durum vektörünün elemanları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\bar{\mathbf{Y}}(\phi, z) = \{\bar{U}_t(\phi, z), \bar{U}_n(\phi, z), \bar{Q}_b(\phi, z), \bar{T}_t(\phi, z), \bar{T}_n(\phi, z), \bar{M}_b(\phi, z)\}^T$$

Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, başlangıç şartları yardımı ile (4.21.) denkleminin çözümüne dayanmaktadır. Bu yöntem ile sınır değer problemi başlangıç değer problemine indirgenmektedir. (4.21.)denkleminin genel çözümü,

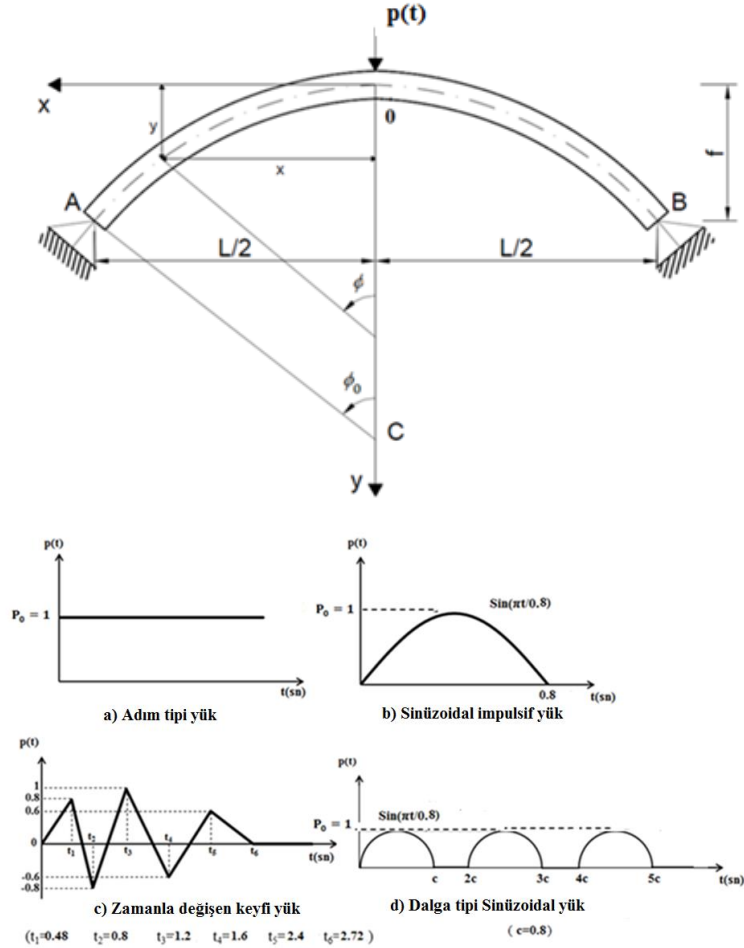
$$\bar{\mathbf{Y}}(\phi, z) = \sum_{m=1}^n C_m \left(\bar{\mathbf{U}}^{(m)}(\phi, z) \right) + \bar{\mathbf{V}}(\phi, z)$$

şeklinde. $\bar{\mathbf{U}}^{(m)}(\phi, z)$ m 'inci bileşenine 1, diğerlerine sıfır değeri verilerek elde edilen homojen çözümdür. $\bar{\mathbf{V}}(\phi, z)$ ise, başlangıç şartları sıfır alınarak elde edilen özel çözümdür. Burada C_m integrasyon sabiti sınır şartlarından elde edilmektedir.

4.3.2 Dinamik Yükleme Durumu İçin Sayısal Uygulamalar

Bu kısımda, farklı tip dinamik yüklemeler altındaki parabolik kemer örneği incelenmiştir. Eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınarak yapılan çözümlerde 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmış ve bu amaçla Fortran dilinde programı hazırlanmıştır. Hazırlanan programın veri dosyası hazırlama kılavuzu Ek 6'da sunulmuştur. Bu çalışmada bulunan sonuçların doğruluğu, ANSYS programından elde edilen çözümler ile karşılaştırılarak test edilmiştir.

4.3.2.1 Dinamik Tekil kuvvetle Yüklü Parabolik Kemer



Şekil 4.55. Dinamik tekil kuvvetle yüklü parabolik kemer ve yükleme tipleri

Şekil 4.9.'da iki ucu mafsallı ve simetri ekseninde dinamik tekil yüklü parabolik kemer görülmektedir. Şekilde görülen kordinat takımına göre çubuk ekseninin denklemi, eğrilik yarıçapı veya r 'nin eksen boyunca değişimini veren ifadeler:

$$y = \frac{4fx^2}{L^2}, \quad r = \frac{r_0}{\cos^3 \phi}$$

Burada r_0 , O noktasına göre eğrilik yarıçapıdır.

$$r_0 = \frac{L^2}{8f}$$

ϕ açıları normali ile y eksenini arasındaki açıyı gösterir. A noktası için ϕ_0 değeri

$$\tan \phi_0 = \frac{4f}{L}$$

bağıntısından bulunabilir. $I_b(\phi)\cos\phi = I_b(0) = \text{sabit}$ olduğu, dolayısıyla kemer eğilme rijitliğinin ve kesit alanının değişken olduğu kabul edilecektir. O halde eğilme rijitliği,

$$D_b = \frac{EI_b(0)}{\cos\phi}; A(\phi) = \frac{A(0)}{\cos\phi}$$

şeklinde hesaba katılmıştır. Simetri noktası ve mafsallı uca ait sınır şartları,

$$\phi = 0 \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ \Omega_b = 0 \\ T_n = -P/2 \end{cases}$$

$$\phi = \phi_0 \rightarrow \begin{cases} U_t = 0 \\ U_n = 0 \\ M_b = 0 \end{cases}$$

dikkate alınarak kanonik halde verilen (3.150.), (3.151.), (3.155.), (3.156.), (3.157.) ve (3.161.) denklemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılmak üzere, herhangi bir kesitteki bağımlı bilinmeyen $\bar{U}_t, \bar{U}_n, \bar{\Omega}_b, \bar{T}_t, \bar{T}_n$ ve $\bar{M}_b$ büyüklükleri için aşağıda tanımlanan $y_i(\phi, z)$ değişkenleri kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \bar{U}_t(\phi, z) &= y_1; \quad \bar{U}_n(\phi, z) = y_2; \quad \bar{\Omega}_b(\phi, z) = y_3; \\ \bar{T}_t(\phi, z) &= y_4; \quad \bar{T}_n(\phi, z) = y_5; \quad \bar{M}_b(\phi, z) = y_6; \\ \bar{p}_t(\phi, z) &= p_t; \quad \bar{p}_n(\phi, z) = p_n; \quad \bar{m}_b(\phi, z) = m_b \end{aligned}$$

Düzlemi içinde dinamik tekil kuvvetle yüklü parabolik kemer davranışını idare eden, birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı yukarıda verilen tanımlamalar yardımıyla yeniden düzenlenerek aşağıda verilmiştir.

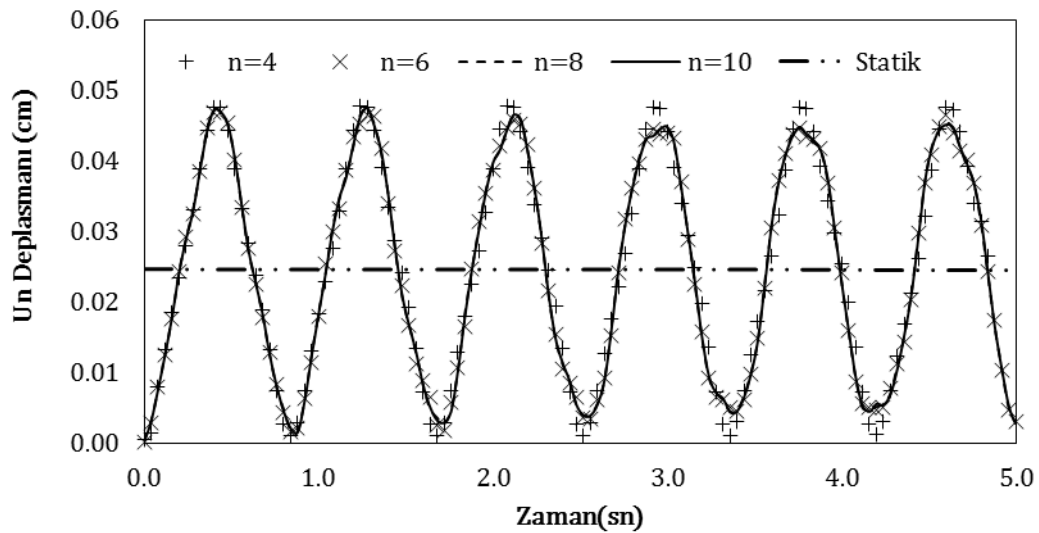
$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\phi} &= y_2 + r \frac{y_4}{EA(\phi)} \\
\frac{dy_2}{d\phi} &= -y_1 + r y_3 + r \frac{y_5 \alpha_n}{GA(\phi)} \\
\frac{dy_3}{d\phi} &= r \frac{y_6}{EI_b(\phi)} \\
\frac{dy_4}{d\phi} &= rz^2 \rho A(\phi) y_1 + y_5 - r p_t \\
\frac{dy_5}{d\phi} &= rz^2 \rho A(\phi) y_2 - y_4 - r p_n \\
\frac{dy_6}{d\phi} &= rz^2 \rho I_b(\phi) y_3 - r y_5 - r m_b
\end{aligned}$$

Burada z , Laplace parametresini göstermektedir. Kanonik halde verilen denklem takımının sayısal çözümleri Laplace uzayında TFY ile yapılmış ve ANSYS çözümleri karşılaştırmaları grafikler üzerinde gösterilmiştir. Çözümlerde kayma deformasyonu etkisi dikkate alınmıştır.

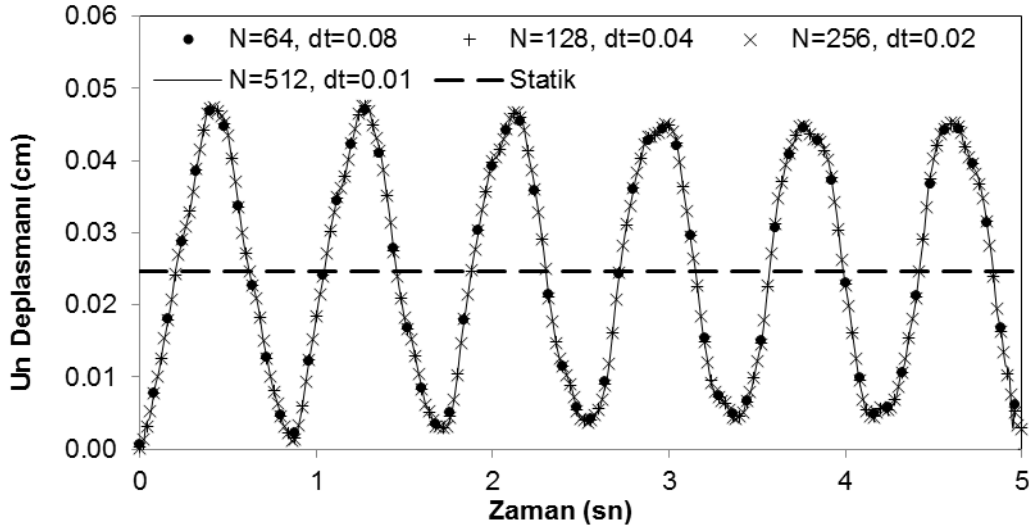
Probleme ait malzeme özellikleri ve geometrik özellikler:

$$\begin{aligned}
\rho &= 7850 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3 ; \nu = 0.3 ; A(0) = 1 \text{ cm}^2 \\
E &= 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 ; I_b(0) = 0.0833 \text{ cm}^4 ; L = 200 \text{ cm} \\
r_0 &= 100 \text{ cm} ; f = 50 \text{ cm} ; P_o = 1 \text{ kg} \\
\phi_0 &= 45 ; \alpha_n = 1 \text{ (Kayma deformasyonu etkisi dikkate alınmıştır)}
\end{aligned}$$

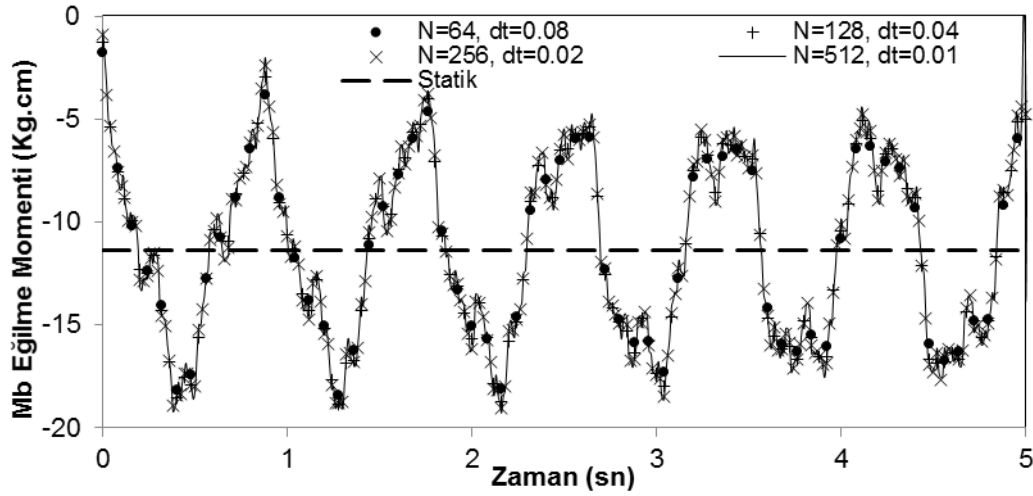
Bu çalışmada hazırlanan programın doğruluğunu test etmek için $(0, \frac{\pi}{4})$ çözüm aralığını $n=4,6,8,10$ eşit parçalara bölerek adım tipi yükleme altında dinamik analizler yapılmış ve çözümler Şekil 4.56 üzerinde topluca verilmiştir. $n=6$ ve daha fazla bölme sayıları için istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilmiş olup, bundan sonraki tüm çözümlerde bölme sayıları $n=10$ seçilmiştir.



Şekil 4.56. Bölme sayısının deplasman hassasiyetine etkisi



Şekil 4.57. Laplace parametresi (N) ve zaman artımının (dt) deplasman üzerindeki etkisi

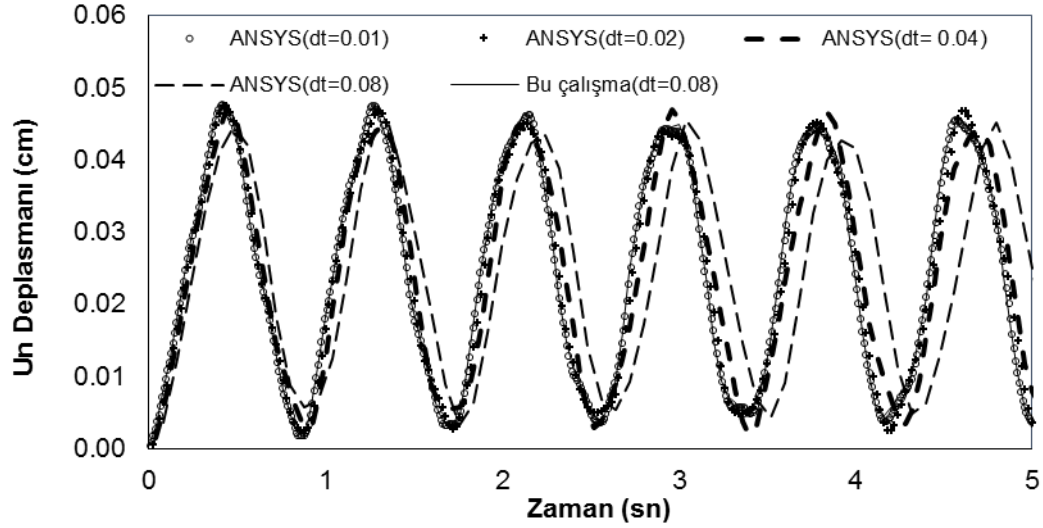


Şekil 4.58. Laplace parametresi (N) ve zaman artımının (dt) moment üzerindeki etkisi

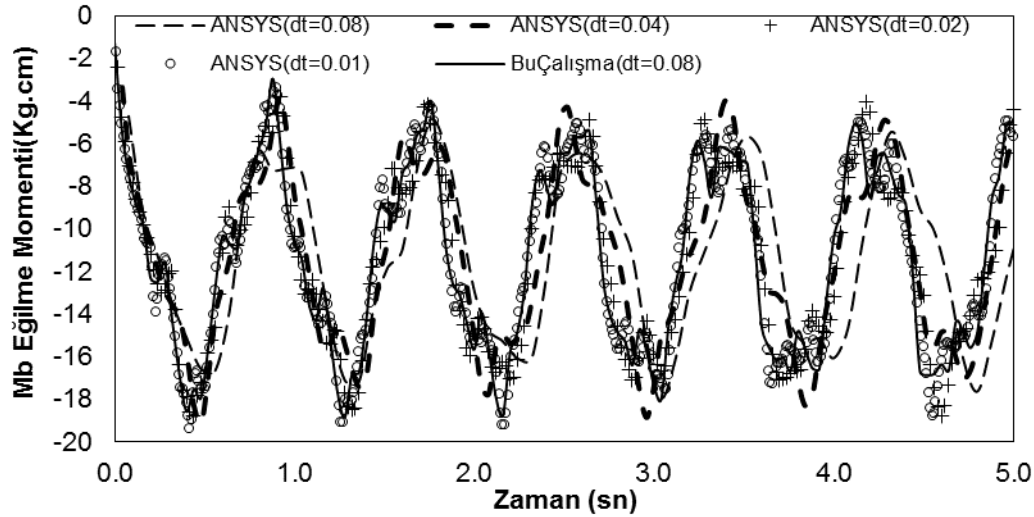
Ayrıca, sırasıyla 64 adım ($dt=0.08$ sn), 128 adım ($dt=0.04$ sn), 256 adım ($dt=0.02$ sn) ve 512 adım ($dt=0.01$ sn) seçilerek parabolik kemerin adım tipi yükleme etkisindeki çözümleri yapılmış, simetri noktasının düşey deplasmanı ve eğilme momentinin zamanla değişimleri Şekil (4.57.-58.) de gösterilmiştir. Bu iki grafikten görüleceği üzere, dinamik yükleme altında ve farklı zaman artım miktarları için bu çalışmada bulunan bütün çözümlerin birbirleri ile üstüste düştükleri görülmüştür. Ancak, Şekil (4.59.-60.) grafiklerinde görüldüğü gibi, Newmark metodu ile ANSYS programından elde edilen sonuçlar zaman artım miktarlarına karşı çok hassas olup, tutarlı sonuç alabilmek için zaman artımlarının çok küçük seçilmesi gerekmektedir. ANSYS ile yapılan çözümlerde sabit kesitli parabolik kemer 40 adet doğru eksenli çubuk elemanı ile modellenmiştir. Bu bakımdan adım tipi yükleme için yapılan tüm çözümlerde; doğru eksenli çubuk elemanı kullanılan ANSYS sonuçları ile, diferansiyel denklemlerin doğrudan çözümüne

dayalı TFY sonuçlarının uyum sağlayabilmesi için adım tipi yükleme durumunda çubuk eğilme rijitliği ve kesit alanı, $D_b = EI_b(0)$ ve $A(\phi) = A(0)$ alınarak karşılaştırmalar yapılmıştır.

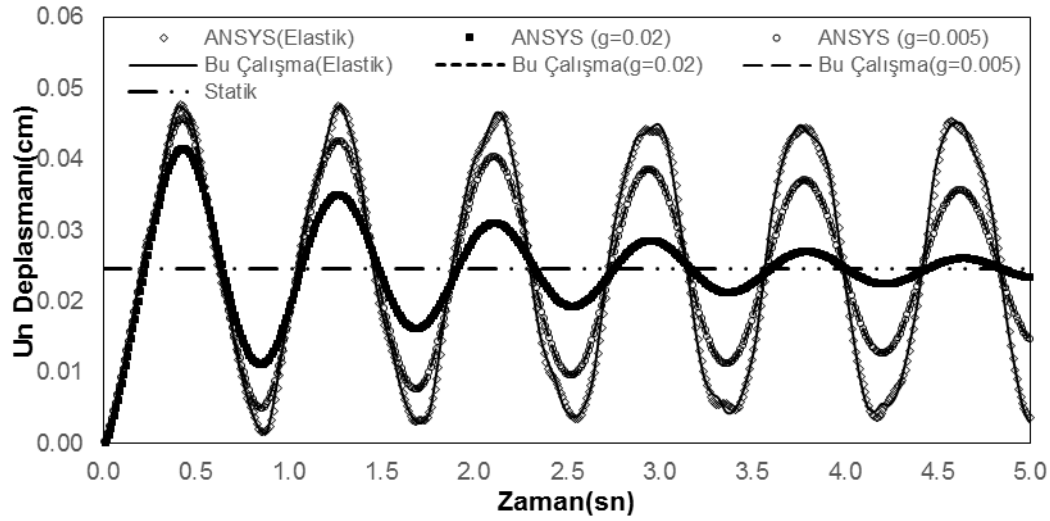
Şekil 4.59. incelendiğinde, Laplace uzayında kaba zaman artımı (0.08 sn) kullanılarak elde edilen değerler ile, çok sık zaman artımı (0.01 sn) artımı alınarak ANSYS programından elde edilen deplasman ve momentlerin birbiri ile örtüştüğü görülmektedir.



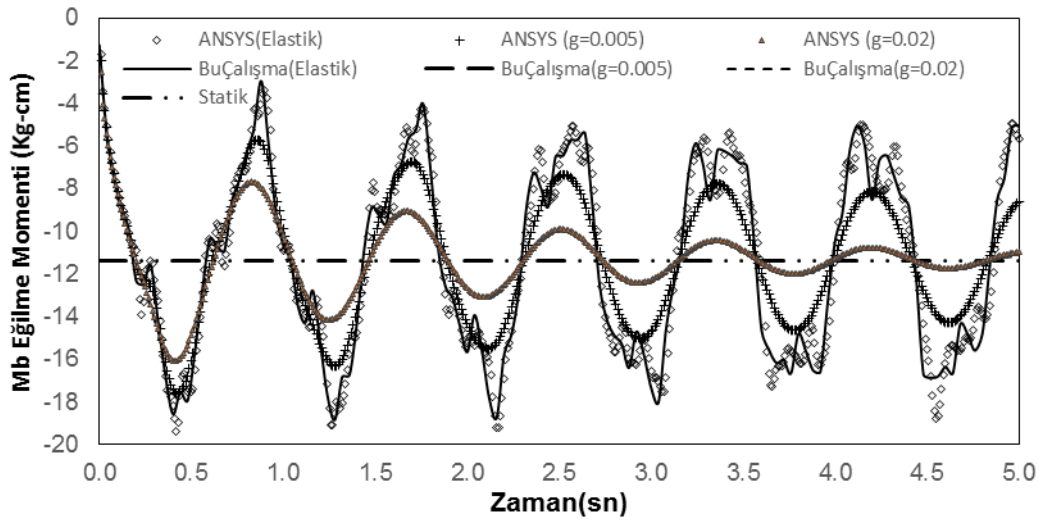
Şekil 4.59. Bu Çalışma ve ANSYS deplasman sonuçlarının karşılaştırılması



Şekil 4.60. Bu Çalışma ve ANSYS moment sonuçlarının karşılaştırılması



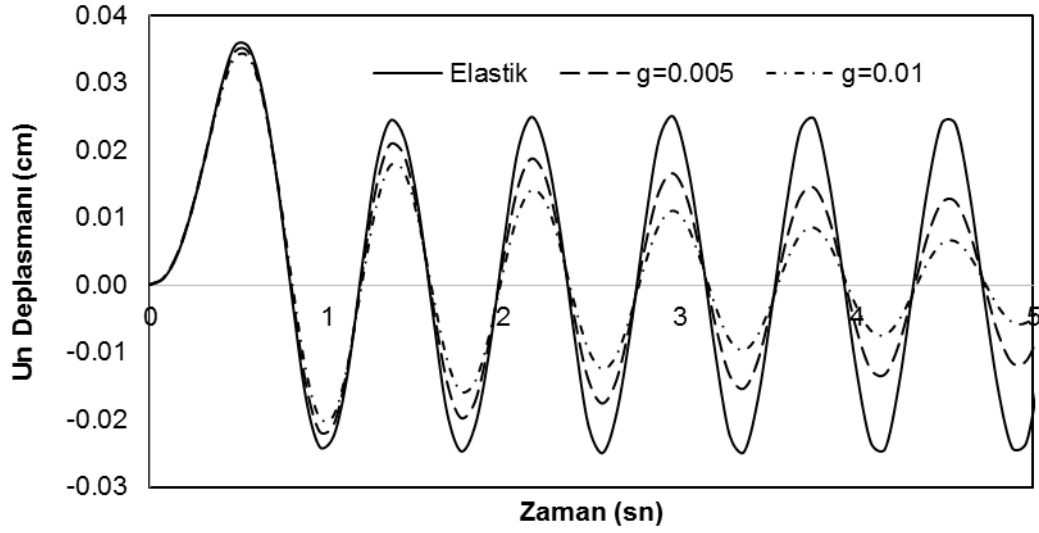
Şekil 4.61. Bu Çalışma ve ANSYS elastik-viskoelastik deplasman sonuçlarının karşılaştırılması



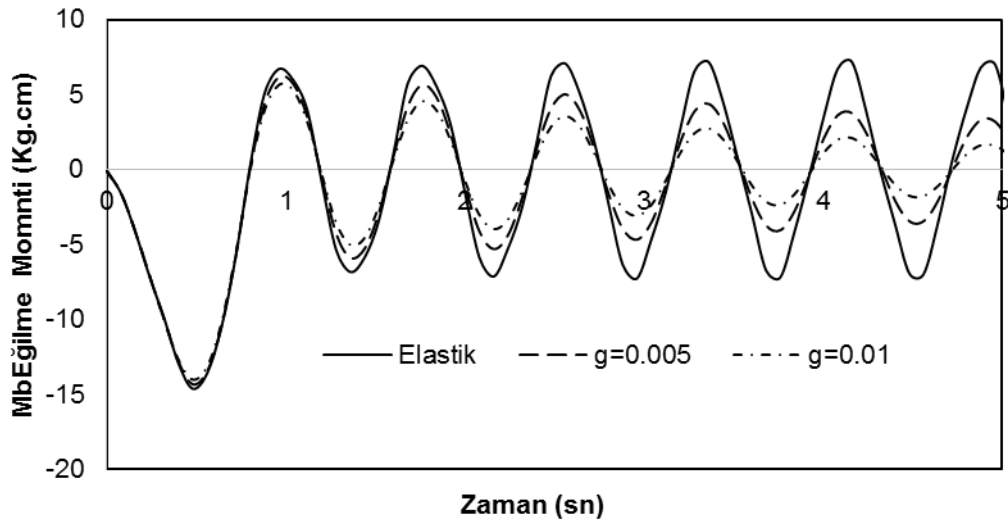
Şekil (4.62.) Bu Çalışma ve ANSYS elastik-viskoelastik moment sonuçlarının karşılaştırılması

ANSYS programında kullanılan yapısal sönüm oranı (ξ) ile bu çalışmada kullanılan sönüm oranı (g) arasındaki ilişki $g=2\xi/w_1$ şeklindedir. Burada w_1 , kemerin birinci doğal titreşim frekansıdır. Çeşitli sönüm oranları $g=0$, $g=0.02$ ve $g=0.005$ için adım tipi yük etkisindeki parabolik kemerin elastik ve viskoelastik analizleri yapılmış olup, deplasmanın zaman ile değişimleri Şekil 4.61.'de, momentin zaman ile değişimleri Şekil 4.62.'de gösterilmiştir. Sönüm oranları arttıkça davranışın genlikleri küçülerek statik değere yaklaşmaktadır.

Sinüzoidal, zamanla keyfi değişen ve dalga tipi sinüzoidal impulsif yükleme durumları için kemer kesitinin değişken olduğu kabul edilerek analizler yapılmıştır. Çeşitli sönüm oranları $g=0$, $g=0.01$ ve $g=0.005$ için sinüzoidal impulsif yük etkisindeki parabolik kemerin elastik ve viskoelastik analizleri yapılmış olup, deplasmanın zaman ile değişimleri Şekil 4.63’de, momentin zaman ile değişimleri Şekil 4.64’de gösterilmiştir.



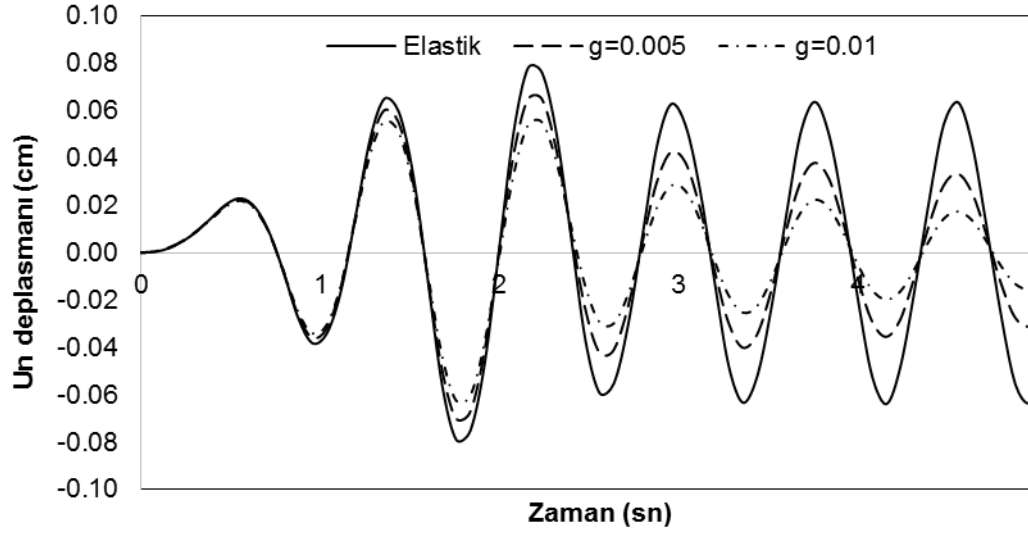
Şekil 4.63. Sinüzoidal yük için U_n deplasmanının zamanla değişimi



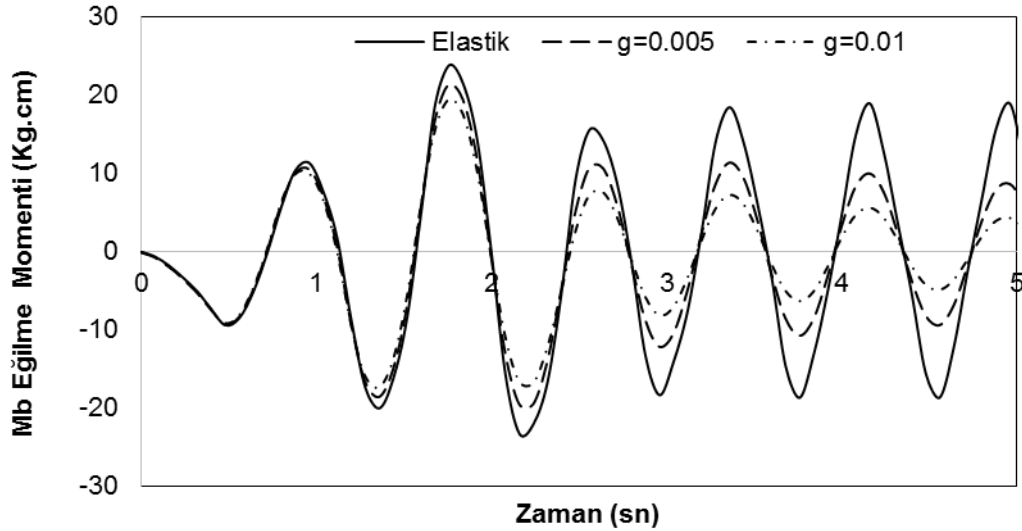
Şekil 4.64. Sinüzoidal yük için M_b eğilme momentinin zamanla değişimi

Grafiklerden de anlaşıldığı üzere, sönüm oranları arttıkça davranışın genlikleri küçülmektedir.

Zaman-yük değerleri Şekil (4.55.c.)’de verilen keyfi yük altında, çeşitli sönüm oranları $g=0$, $g=0.01$ ve $g=0.005$ için parabolik kemerin elastik ve viskoelastik analizleri yapılmış olup, deplasmanın zaman ile değişimleri Şekil (4.65)’de, momentin zaman ile değişimleri Şekil (4.66)’de gösterilmiştir.



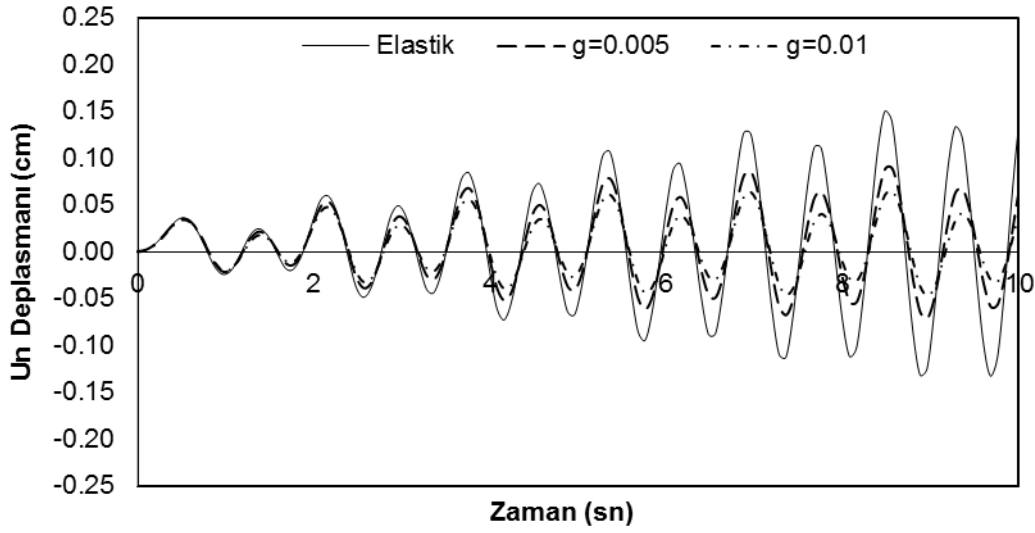
Şekil 4.65. Zamanla keyfi değişen yük için U_n deplasmanının zamanla değişimi



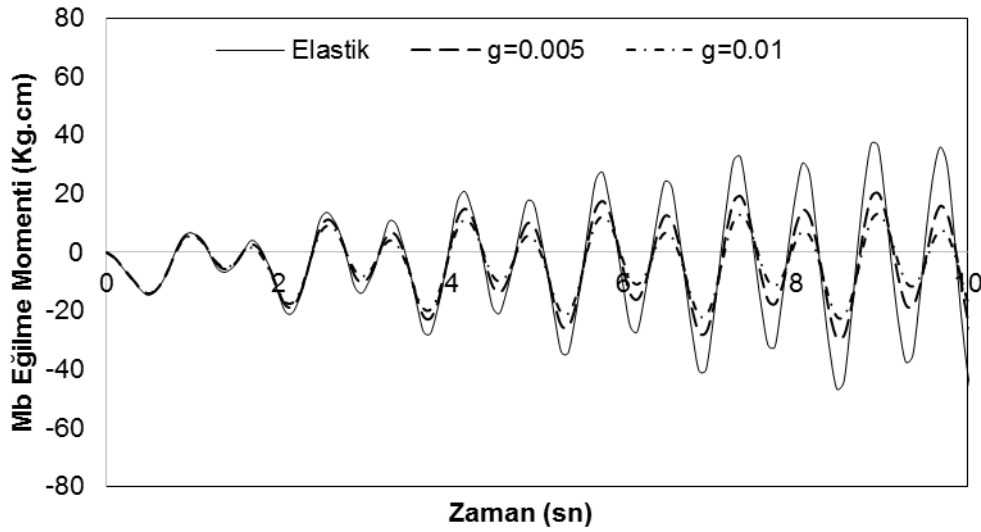
Şekil 4.66. Zamanla keyfi değişen yük için M_b eğilme momentinin zamanla değişimi

Grafiklerden de anlaşıldığı üzere, sönüm oranları arttıkça davranışın genlikleri küçülmektedir.

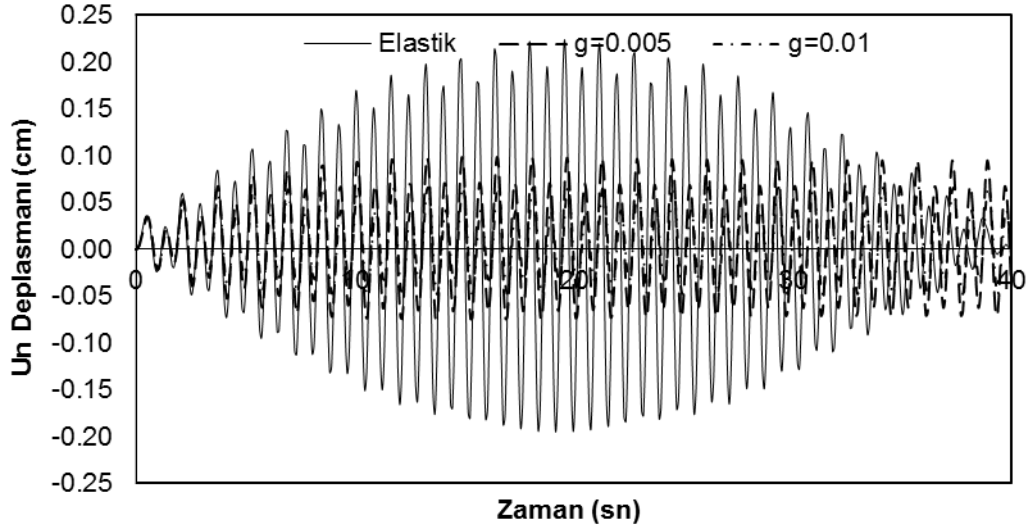
Çeşitli sönüm oranları $g=0$, $g=0.01$ ve $g=0.005$ için dalga tipi sinüzoidal yük etkisindeki parabolik kemerin elastik ve viskoelastik analizleri yapılmış olup, 10 saniye için deplasmanların ve momentlerin zaman ile değişimleri Şekil (4.67.-68.), 40 saniye için ise, Şekil (4.69.-70.) de verilmiştir.



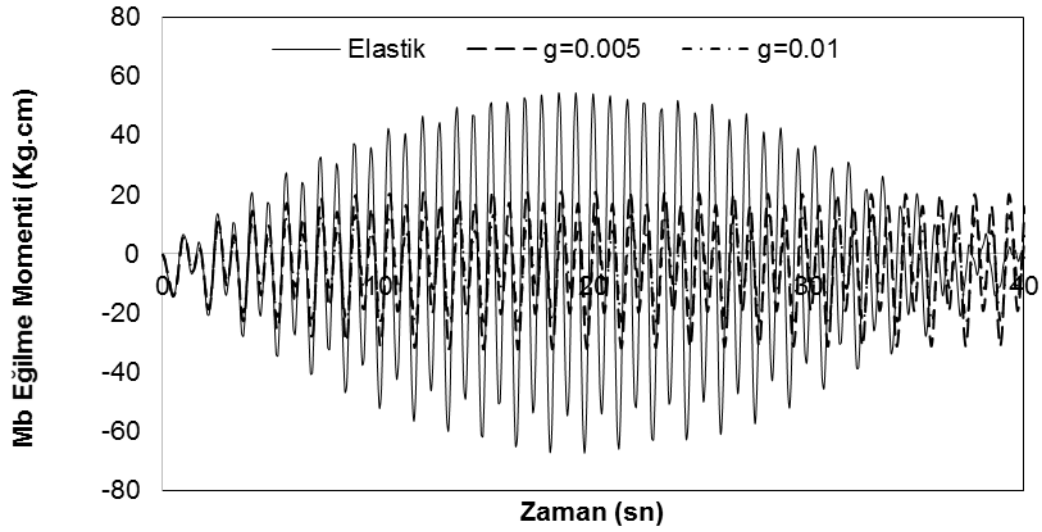
Şekil 4.67. Dalga tipi sinüzoidal yük için U_n deplasmanının zamanla değişimi



Şekil 4.68. Dalga tipi sinüzoidal yük için M_b eğilme momentinin zamanla değişimi

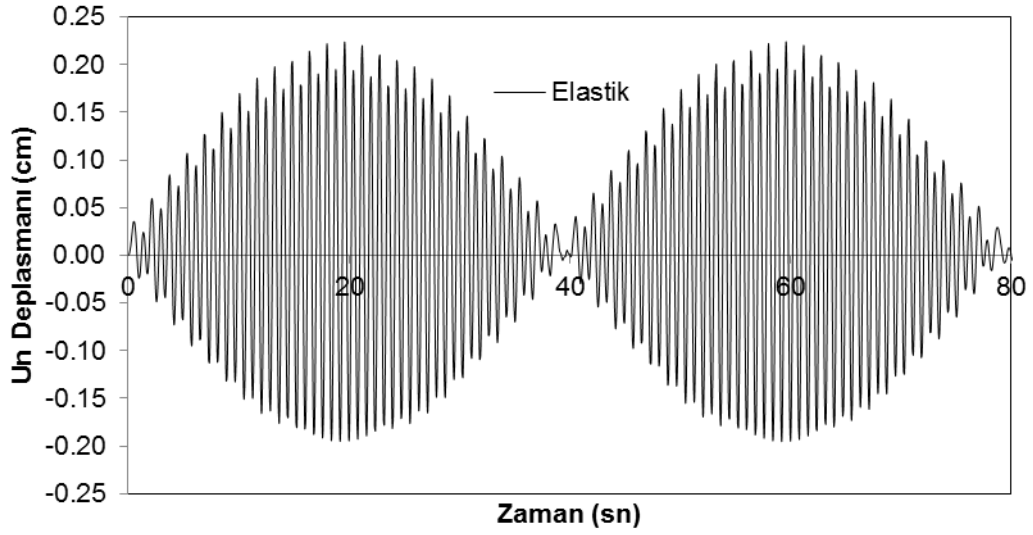


Şekil 4.69. Dalga tipi sinüzoidal yük için U_n deplasmanının zamanla değişimi

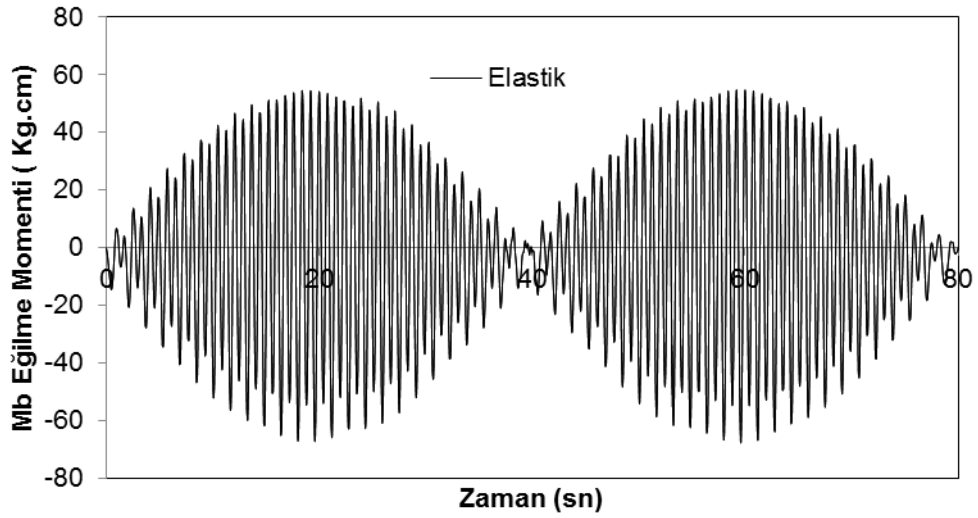


Şekil 4.70. Dalga tipi sinüzoidal yük için M_b eğilme momentinin zamanla değişimi

Grafiklerden de görüldüğü gibi, viskoelastik sönüm oranı arttıkça dinamik davranışın pik değerlerinde hızlı bir şekilde azalma olmaktadır.



Şekil 4.71. Dalga tipi sinüzoidal yük için U_n deplasmanının zamanla değişimi



Şekil 4.72. Dalga tipi sinüzoidal yük için M_b eğilme momentinin zamanla değişimi

Dalga tipi sinüzoidal yük etkisindeki parabolik kemerin 80 saniye için elastik analizi yapılmış olup, simetri noktasındaki deplasmanın zaman ile değişimleri Şekil (4.71)'de, momentin zaman ile değişimleri Şekil (4.72)'de gösterilmiştir. Dalga tipi sinüzoidal yük altındaki deplasman ve moment genlikleri, 40 saniye periyotlarda tekrarlayan sinüzoidal bir salınım yapmaktadır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, geometrisi ve özellikleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü eğri eksenli çubukların, silindirik tonozların ve eksenel dönel simetrik yapı elemanlarının statik ve dinamik yükler altında analizleri incelenmiştir. Analizlerde homojen, izotropik, elastik veya viskoelastik malzemeler seçilmiştir. Bu tür yapı elemanlarının statik yükler altında davranışını idare eden temel denklemler özetlenmiş, kanonik formda elde edilen birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımlarının çözümleri Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile yapılmıştır.

Uzaysal eğri eksenli çubukların statik davranışı için denge denklemleri, bünye denklemleri ve uygunluk şartlarından dört adet vektörel denklem elde edilmiştir. Bunlar, hareketli koordinat takımındaki bileşenlerine ayrıldığında birinci dereceden on iki adet diferansiyel denklem bulunmaktadır. Bunların altısı düzlemi içinde, altısı düzlemine dik olarak iki gruba ayrılıp, hesaplarda büyük kolaylık sağlamaktadır. Ele alınan problemlerde, RK5 algoritması ile yapılan çözümlerin, aynı bölme sayıları için RK4 algoritması ile elde edilen sonuçlara göre oldukça küçük bağıl hata değerleri verdiği anlaşılmış olup, tüm sayısal çözümlerde RK5 algoritması kullanılmıştır. Eksenel ve kayma deformasyon etkileri gözardı edilerek yapılan çözümlerde, Runge-kutta 5 algoritması kullanılarak genel amaçlı Mathematica programı hazırlanmıştır. Hazırlanan program yardımıyla bulunan sonuçlar ile analitik çözümlerin karşılaştırılması grafik üzerinde yapılmış ve bu çalışmada bulunan sayısal sonuçların analitik çözümlere çok yakın olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada Schorer teorisi kullanılarak, açık tonoz çatı sistemlerin denklemleri özetlenmiştir. Silindirik tonoz yapılarda sekiz adet kanonik halde birinci mertebeden diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümünde, Mathematica programı yardımıyla bulunan sonuçlar literatürde verilen sonuçlar ile grafikler üzerinde karşılaştırılmış ve uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

Geometrik özellikleri farklı dönel simetrik kabukların deplasman ve kesit tesirlerinin açılı ile değişimi hazırlanan program ile hesaplanmıştır.

Programdan elde edilen sayısal sonuçların analitik çözümlere çok yakın olduğu görülmüştür.

Daire eksenli çubuklarda ara mesnet ve ara tekil yüklerin bulunduğu durumlarda, eleman rijitlik matrisleri ve eleman yük vektörleri TFY ile bulunarak, analizler rijitlik matrisi metodu ile yapılabilmektedir. Eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınarak

yapılan çözümler için Fortran dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan programdan elde edilen sonuçlar, literatürde verilen analitik çözümler ile tablolar üzerinde karşılaştırılmış ve sonuçların uyum içerisinde olgu görülmüştür.

Ayrıca, düzlemsel ve daire eksenli çubukların farklı tip dinamik yükler altında elastik ve viskoelastik titreşimleri incelenmiştir. Bu tür yapıların dinamik davranışları Laplace uzayında TFY yardımıyla araştırılmıştır. TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin Laplace uzayındaki çözümleri için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmış ve bu amaçla Fortran dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu çalışmada elde edilen çözümler, ANSYS programı, ki bu programda hareket denklemlerinin çözümleri Newmark metodu ile yapılmaktadır, yardımıyla elde edilen çözümler ile karşılaştırılmıştır. Sistem davranışını idare eden hareket denklemleri zaman uzayında elde edilmiştir. Ardından, sistem hareket denkleminin Laplace dönüşümü uygulanarak elde edilen lineer cebrik denklem takımı bir dizi Laplace parametresi için dönüşmüş uzayda TFY ile çözülmektedir. Bu çalışmada, viskoelastik malzeme için Kelvin sönüm modeli uygulanmıştır. Viskoelastik malzeme durumunda elastik sabitler, elastik-viskoelastik analojisi yardımıyla, Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile yer değiştirmektedir. Laplace uzayından zaman uzayına dönüşüm için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace metodu kullanılmıştır

Yapılan çözümlerden anlaşılmıştır ki; ele alınan örnekte istenilen hassasiyette sonuçları elde etmek için bölme sayısının en az $n=6$ alınması gerekmektedir. Newmark metodu ile ANSYS programından elde edilen sonuçlar zaman artım miktarlarına karşı çok hassas olup, tutarlı sonuç alabilmek için zaman artımlarının çok küçük seçilmesi gerekmektedir. Farklı sönüm oranları için çizilen grafiklerden anlaşıldığı üzere sönüm oranları arttıkça davranışın genlikleri küçülerek statik değere yaklaşmaktadır.

Sonuç olarak, statik ve dinamik yüklemeler altındaki yapı elemanlarının analizi için hazırlanan genel amaçlı Mathematica ve Fortran programlarının kontrolü, analitik çözümlerle, literatürdeki bazı örneklerle ve ANSYS programı sonuçlarıyla karşılaştırılarak yapılmıştır.

KAYNAKLAR

- AKKURT,F.G., Elastik Zeminde Oturan Doğru Ve Daire Eksenli Çubukların Dinamik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Hatay.63 s.
- AKTAN, H., Daire Eksenli Çubukların Düzlemli Dinamik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.45 s.
- ANSYS, 2013, Inc Release 15.0, Canonsburg, PA
- BAYHAN, S., 1993 Daire Eksenli Düzlemsel Çubukların Taşıma Ve Rijitlik Matrisi İle Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.193 s.
- BOLEY, B. A., WEINER, J. H., 1960. Theory of Thermal Stresses.John Wiley And Sons, New York
- BOZKURT, M., 1995. Silindirik Tonozlar Daire Ve Helisel Eksenli Taşıyıcı Sistemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi İle Analizi –Mathematica Uygulamaları-. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.213s.
- BRIGHAM, E. O, 1974., The Fast Fourier Transform. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J
- CHAPRA, S.C.,CANALE, R.P., 2003, Yazılım Ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler, Literatür Yayınevi, İstanbul,1004 s.
- ÇALIM,F.F.,1996. Eğri Eksenli Çubuk Sistemler Ve Silindirik Tonoz Yapıların Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu Ve Rijitlik Yöntemi İle Statik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.166 s.
- _____,2003. Viskoelastik, Anizotropik, Eğri Eksenli Uzaysal Çubuk Sistemlerin Dinamik Analizi. Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.160 s.
- ÇOBAN, M., Daire Eksenli Kirişlerin Karışık Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Dinamik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.52 s.
- DURBIN;F., 1974. Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. Computer Journal, 17: 371-376
- GIBSON, J.E.,1980. Thin Shells Computing And Theory. Pergemon Press, New York, 289s.
- HAKTANIR,V.,2004. A New Method For The Element Stiffness Matrix Of Arbitrary Planar Bars, 4;679-691.
- HAKTANIR,V., KIRAL E.,1991. Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yönteminin Düzlemsel Çubukların Statiğine Doğrudan Uygulanması, Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi., Adana, 2;155-167

- İNAN, M.,1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi. Berksoy Matbaası, İstanbul, 179s.
- KARACA, N.,2014. Düzlemsel Çubukların Taşıma Ve Rijitlik Matrisi Metodu İle Statik Ve Dinamik Analizi. Yüksek Lisans Tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Hatay.67 s.
- LAMAN, M., 1990. Dairesel Silindirik Tonoz Çatıların Taşıma Matrisi Yöntemi İle Çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana.193 sayfa
- NARAYANAN, G.V., 1979, Numerical Operational Methods in Structural Dynamics . Ph.D. thesis, Universty of Minnesota,Minneapolis,Minn
- ÖZBEK, T., 1963. Bulletin of Technical University of İstanbul vol. 15
- SAYAR, K., 1970. Dönel kabuk sistemlerin diferansiyel geçiş matrisiyle çözümü İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.135 s.
- TEMEL, B.,ÇALIM, F.F., BARAN, T.,2003. Değişken Kesitli, Viskoelastik Doğru Eksenli Düzlemsel Çubukların Dinamik Dış Yük Altında Davranışı Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi., Adana, 2;101-114
- TEMEL, B., ÇALIM, F.F., TÜTÜNCÜ, N., 2004, Quasi-Static and Dynamic Response of Viscoelastic Helical Rods, J. Sounds Vib., 271: 921.-935.

EKLER

EK1: Düzlemi İçinde Yüklü Dairesel Çubukların TFY ve Runge-Kutta(RK5) Algoritması ile Çözümü

```
Print["Düzlemi İçinde Yüklü Daire Çubuk Örneği:Runge-Kutta(RK5) ile TFY sistem"]
```

```
Clear["Global`*"];
```

```
(*=====*)
```

```
EM=1. ; AT=1. ; qama=0. ; Ctt=1. ; Cnn=1. ; Mb=0. ; ro=1. ; Dbb=1. ;
```

```
(*=====*)
```

```
fic=N[180.0*Pi/180.0]
```

```
Pt[x_]=-W*Sin[x] ; Pn[x_]=-W*Cos[x] ;
```

```
XA=0
```

```
XB=N[fic]
```

```
nn=20
```

```
h=N[(XB-XA)/nn]
```

```
(*=====*)
```

```
(*olayi idare eden dif. denk. takimi*)
```

```
f1[x_,y1_,y2_,y3_,y4_,y5_,y6_]:=y2+(( ro/Ctt)*y4) ;
```

```
f2[x_,y1_,y2_,y3_,y4_,y5_,y6_]:= -y1+(ro*y3)+((qama*ro/Cnn)*y5);
```

```
f3[x_,y1_,y2_,y3_,y4_,y5_,y6_]:= (ro/Dbb)*y6;
```

```
f4[x_,y1_,y2_,y3_,y4_,y5_,y6_]:=y5 -(ro*Pt[x]);
```

```
f5[x_,y1_,y2_,y3_,y4_,y5_,y6_]:= -y4 -(ro*Pn[x]);
```

```
f6[x_,y1_,y2_,y3_,y4_,y5_,y6_]:= -(ro*y5)-(ro*Mb));
```

```
(*homojen olmiyan cozum*)
```

```
Print["homojen olmiyan cozum"]
```

```
W=1.;
```

```
x[0]=xa; y1[0]=0.; y2[0]=0.; y3[0]=0.; y4[0]=0.; y5[0]=0.; y6[0]=0.;
```

```
Print[x[0]," ",y1[0]," ", y2[0]," ",y3[0]," ",y4[0]," ",y5[0]," ",y6[0]] ;
```

```
v1[0]=y1[0] ;
```

```
v2[0]=y2[0] ;
```

```
v3[0]=y3[0] ;
```

```
v4[0]=y4[0] ;
```

v5[0]=y5[0];

v6[0]=y6[0];

Do[

k1=f1[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];

l1=f2[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];

p1=f3[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];

s1=f4[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];

m1=f5[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];

n1=f6[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];

k2=f1[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4, y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];

l2=f2[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4, y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];

p2=f3[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4, y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];

s2=f4[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4, y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];

m2=f5[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4, y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];

n2=f6[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4, y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];

k3=f1 [x[i]+h/4, y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8,
y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8, y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];

l3=f2 [x[i]+h/4, y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8,
y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];

p3=f3[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8,
y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];

s3=f4[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8,
y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];

$m3=f5[\ x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, \ y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, \ y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8, \\ y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];$

$n3=f6[\ x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, \ y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, \ y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8, \\ y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];$

$k4=f1[\ x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \ y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \ y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \ y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, \ y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, \ y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$

$l4=f2[\ x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \ y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \ y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \ y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, \ y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, \ y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$

$p4=f3[\ x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \ y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \ y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \ y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, \ y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, \ y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$

$s4=f4[\ x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \ y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \ y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \ y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, \ y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, \ y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$

$m4=f5[\ x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \ y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \ y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \ y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, \ y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, \ y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$

$n4=f6[\ x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \ y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \ y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \ y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, \ y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, \ y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$

$k5=f1[x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \ y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \ y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, \ y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$l5=f2[\ x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \ y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \ y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, \ y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$p5=f3[\ x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \ y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \ y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, \ y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$s5=f4[\ x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \ y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \ y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, \ y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$m5=f5[\ x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \ y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \ y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, \ y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$n5=f6[\quad x[i]+3*h/4, y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \quad y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16,$
 $y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \quad y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16,$
 $y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$k6y1=y1[i]-(3*k1*h)/7+(2*k2*h)/7+(12*k3*h)/7-(12*k4*h)/7+(8*k5*h)/7;$
 $l6y2=y2[i]-(3*l1*h)/7+(2*l2*h)/7+(12*l3*h)/7-(12*l4*h)/7+(8*l5*h)/7;$
 $p6y3=y3[i]-(3*p1*h)/7+(2*p2*h)/7+(12*p3*h)/7-(12*p4*h)/7+(8*p5*h)/7;$
 $s6y4=y4[i]-(3*s1*h)/7+(2*s2*h)/7+(12*s3*h)/7-(12*s4*h)/7+(8*s5*h)/7;$
 $m6y5=y5[i]-(3*m1*h)/7+(2*m2*h)/7+(12*m3*h)/7-(12*m4*h)/7+(8*m5*h)/7;$
 $n6y6=y6[i]-(3*n1*h)/7+(2*n2*h)/7+(12*n3*h)/7-(12*n4*h)/7+(8*n5*h)/7;$

$k6=f1[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $l6=f2[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $p6=f3[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $s6=f4[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $m6=f5[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $n6=f6[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$

$y1[i+1]=y1[i]+h*(7*k1+32*k3+12*k4+32*k5+7*k6)/90.;$
 $y2[i+1]=y2[i]+h*(7*l1+32*l3+12*l4+32*l5+7*l6)/90.;$
 $y3[i+1]=y3[i]+h*(7*p1+32*p3+12*p4+32*p5+7*p6)/90.;$
 $y4[i+1]=y4[i]+h*(7*s1+32*s3+12*s4+32*s5+7*s6)/90.;$
 $y5[i+1]=y5[i]+h*(7*m1+32*m3+12*m4+32*m5+7*m6)/90.;$
 $y6[i+1]=y6[i]+h*(7*n1+32*n3+12*n4+32*n5+7*n6)/90.;$

$v1[i+1]=y1[i+1];$
 $v2[i+1]=y2[i+1];$
 $v3[i+1]=y3[i+1];$
 $v4[i+1]=y4[i+1];$
 $v5[i+1]=y5[i+1];$
 $v6[i+1]=y6[i+1];$

$x[i+1]=x[i]+h;$

```
Print[x[i+1]," ",v1[i+1]," ",v2[i+1]," ",v3[i+1]," ",v4[i+1]," ",v5[i+1]," ",v6[i+1]];

, {i,0,nn-1}]
```

(*homojen cozum*)

```
Print["homojen cozum"]
```

```
W=0.;
```

```
(m=1;Print["m=",m];
```

```
x[0]=xa; y1[0]=1.; y2[0]=0.; y3[0]=0.; y4[0]=0.;y5[0]=0.;y6[0]=0. ;
```

```
Print[x[0]," ",y1[0]," ", y2[0]," ",y3[0]," ",y4[0]," ",y5[0]," ",y6[0]] ; Goto[basla];
```

```
Label[tekrar2];Print["m=",m];
```

```
x[0]=xa; y1[0]=0.; y2[0]=1.; y3[0]=0.; y4[0]=0.;y5[0]=0.;y6[0]=0. ;
```

```
Print[x[0]," ",y1[0]," ", y2[0]," ",y3[0]," ",y4[0]," ",y5[0]," ",y6[0]] ; Goto[basla];
```

```
Label[tekrar3];Print["m=",m];
```

```
x[0]=xa; y1[0]=0.; y2[0]=0.; y3[0]=1.; y4[0]=0.;y5[0]=0.;y6[0]=0. ;
```

```
Print[x[0]," ",y1[0]," ", y2[0]," ",y3[0]," ",y4[0]," ",y5[0]," ",y6[0]] ; Goto[basla];
```

```
Label[tekrar4];Print["m=",m];
```

```
x[0]=xa; y1[0]=0.; y2[0]=0.; y3[0]=0.; y4[0]=1.;y5[0]=0.;y6[0]=0. ;
```

```
Print[x[0]," ",y1[0]," ", y2[0]," ",y3[0]," ",y4[0]," ",y5[0]," ",y6[0]] ; Goto[basla];
```

```
Label[tekrar5];Print["m=",m];
```

```
x[0]=xa; y1[0]=0.; y2[0]=0.; y3[0]=0.; y4[0]=0.;y5[0]=1.;y6[0]=0. ;
```

```
Print[x[0]," ",y1[0]," ", y2[0]," ",y3[0]," ",y4[0]," ",y5[0]," ",y6[0]] ; Goto[basla];
```

```
Label[tekrar6];Print["m=",m];
```

```
x[0]=xa; y1[0]=0.; y2[0]=0.; y3[0]=0.; y4[0]=0.;y5[0]=0.;y6[0]=1. ;
```

```
Print[x[0]," ",y1[0]," ", y2[0]," ",y3[0]," ",y4[0]," ",y5[0]," ",y6[0]] ;
```

Label[basla];

u1[m,0]=y1[0] ;
u2[m,0]=y2[0] ;
u3[m,0]=y3[0] ;
u4[m,0]=y4[0] ;
u5[m,0]=y5[0] ;
u6[m,0]=y6[0] ;

Do[

k1=f1[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];
l1=f2[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];
p1=f3[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];
s1=f4[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];
m1=f5[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];
n1=f6[x[i],y1[i],y2[i],y3[i],y4[i],y5[i],y6[i]];

k2=f1[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4 , y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];
l2=f2[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4 , y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];
p2=f3[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4 , y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];
s2=f4[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4 , y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];
m2=f5[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4 , y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];
n2=f6[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/4, y2[i]+(l1*h)/4, y3[i]+(p1*h)/4 , y4[i]+(s1*h)/4,
y5[i]+(m1*h)/4, y6[i]+(n1*h)/4];

k3=f1[x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8,
y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];

$l3=f2[\quad x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, \quad y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, \quad y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8, \\ y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];$
 $p3=f3[\quad x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, \quad y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, \quad y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8, \\ y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];$
 $s3=f4[\quad x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, \quad y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, \quad y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8, \\ y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];$
 $m3=f5[\quad x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, \quad y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, \quad y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8, \\ y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];$
 $n3=f6[\quad x[i]+h/4,y1[i]+(k1*h)/8+(k2*h)/8, \quad y2[i]+(l1*h)/8+(l2*h)/8, \quad y3[i]+(p1*h)/8+(p2*h)/8, \\ y4[i]+(s1*h)/8+(s2*h)/8,y5[i]+(m1*h)/8+(m2*h)/8,y6[i]+(n1*h)/8+(n2*h)/8];$

$k4=f1[\quad x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \quad y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \quad y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \quad y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$
 $l4=f2[\quad x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \quad y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \quad y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \quad y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$
 $p4=f3[\quad x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \quad y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \quad y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \quad y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$
 $s4=f4[\quad x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \quad y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \quad y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \quad y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$
 $m4=f5[\quad x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \quad y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \quad y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \quad y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$
 $n4=f6[\quad x[i]+h/2,y1[i]-(k2*h)/2+k3*h, \quad y2[i]-(l2*h)/2+l3*h, \quad y3[i]-(p2*h)/2+p3*h, \quad y4[i]- \\ (s2*h)/2+s3*h, y5[i]-(m2*h)/2+m3*h, y6[i]-(n2*h)/2+n3*h];$

$k5=f1[\quad x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \quad y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \quad y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$
 $l5=f2[\quad x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \quad y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \quad y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$
 $p5=f3[\quad x[i]+3*h/4,y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \quad y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16, \\ y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \quad y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16, \\ y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$s5=f4[\quad x[i]+3*h/4, y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \quad y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16,$
 $y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \quad y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16,$
 $y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$
 $m5=f5[\quad x[i]+3*h/4, y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \quad y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16,$
 $y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \quad y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16,$
 $y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$
 $n5=f6[\quad x[i]+3*h/4, y1[i]+(3*k1*h)/16+(9*k4*h)/16, \quad y2[i]+(3*l1*h)/16+(9*l4*h)/16,$
 $y3[i]+(3*p1*h)/16+(9*p4*h)/16, \quad y4[i]+(3*s1*h)/16+(9*s4*h)/16,$
 $y5[i]+(3*m1*h)/16+(9*m4*h)/16, y6[i]+(3*n1*h)/16+(9*n4*h)/16];$

$k6y1=y1[i]-(3*k1*h)/7+(2*k2*h)/7+(12*k3*h)/7-(12*k4*h)/7+(8*k5*h)/7;$
 $l6y2=y2[i]-(3*l1*h)/7+(2*l2*h)/7+(12*l3*h)/7-(12*l4*h)/7+(8*l5*h)/7;$
 $p6y3=y3[i]-(3*p1*h)/7+(2*p2*h)/7+(12*p3*h)/7-(12*p4*h)/7+(8*p5*h)/7;$
 $s6y4=y4[i]-(3*s1*h)/7+(2*s2*h)/7+(12*s3*h)/7-(12*s4*h)/7+(8*s5*h)/7;$
 $m6y5=y5[i]-(3*m1*h)/7+(2*m2*h)/7+(12*m3*h)/7-(12*m4*h)/7+(8*m5*h)/7;$
 $n6y6=y6[i]-(3*n1*h)/7+(2*n2*h)/7+(12*n3*h)/7-(12*n4*h)/7+(8*n5*h)/7;$

$k6=f1[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $l6=f2[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $p6=f3[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $s6=f4[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $m6=f5[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$
 $n6=f6[\quad x[i]+h, k6y1, l6y2, p6y3, s6y4, m6y5, n6y6] ;$

$y1[i+1]=y1[i]+h*(7*k1+32*k3+12*k4+32*k5+7*k6)/90.;$
 $y2[i+1]=y2[i]+h*(7*l1+32*l3+12*l4+32*l5+7*l6)/90.;$
 $y3[i+1]=y3[i]+h*(7*p1+32*p3+12*p4+32*p5+7*p6)/90.;$
 $y4[i+1]=y4[i]+h*(7*s1+32*s3+12*s4+32*s5+7*s6)/90.;$
 $y5[i+1]=y5[i]+h*(7*m1+32*m3+12*m4+32*m5+7*m6)/90.;$
 $y6[i+1]=y6[i]+h*(7*n1+32*n3+12*n4+32*n5+7*n6)/90.;$

$u1[m,i+1]=y1[i+1] ;$
 $u2[m,i+1]=y2[i+1] ;$
 $u3[m,i+1]=y3[i+1] ;$

```

u4[m,i+1]=y4[i+1] ;
u5[m,i+1]=y5[i+1] ;
u6[m,i+1]=y6[i+1] ;

```

```

x[i+1] = x[i] + h ;

```

```

Print[x[i+1]," ",y1[i+1]," ", y2[i+1]," ",y3[i+1]," ",y4[i+1]," ",y5[i+1]," ", y6[i+1]] ;
      ,{i,0,nn-1}];

```

```

m=m+1;

```

```

If[m==2 ,Goto[tekrar2],Continue];
If[m==3 ,Goto[tekrar3],Continue];
If[m==4 ,Goto[tekrar4],Continue];
If[m==5 ,Goto[tekrar5],Continue];
If[m==6 ,Goto[tekrar6],Continue])

```

(*cozum linear kombinasyon olarak elde ediliyor*)

```

Do[yx1[i]=J1*u1[1,i]+J2*u1[2,i]+J3*u1[3,i]+J4*u1[4,i]+J5*u1[5,i]+J6*u1[6,i]+v1[i],{i,0,nn}
];
Do[yx2[i]=J1*u2[1,i]+J2*u2[2,i]+J3*u2[3,i]+J4*u2[4,i]+J5*u2[5,i]+J6*u2[6,i]+v2[i],{i,0,nn}
];
Do[yx3[i]=J1*u3[1,i]+J2*u3[2,i]+J3*u3[3,i]+J4*u3[4,i]+J5*u3[5,i]+J6*u3[6,i]+v3[i],{i,0,nn}
];
Do[yx4[i]=J1*u4[1,i]+J2*u4[2,i]+J3*u4[3,i]+J4*u4[4,i]+J5*u4[5,i]+J6*u4[6,i]+v4[i],{i,0,nn}
];
Do[yx5[i]=J1*u5[1,i]+J2*u5[2,i]+J3*u5[3,i]+J4*u5[4,i]+J5*u5[5,i]+J6*u5[6,i]+v5[i],{i,0,nn}
];
Do[yx6[i]=J1*u6[1,i]+J2*u6[2,i]+J3*u6[3,i]+J4*u6[4,i]+J5*u6[5,i]+J6*u6[6,i]+v6[i],{i,0,nn}
];

```

(*sinir sartlari*)

denk1=yx1[0]

denk2=yx5[0]

denk3=yx3[0]

denk4=yx1[nn]

denk5=yx3[nn]

denk6=yx2[nn]

coz=Solve[{denk1==0,denk2==0,denk3==0,denk4==0,denk5==0,denk6==0},{J1,J2,J3,J4,J5,J6}]

J1=J1/.coz[[1,1]]

J2=J2/.coz[[1,2]]

J3=J3/.coz[[1,3]]

J4=J4/.coz[[1,4]]

J5=J5/.coz[[1,5]]

J6=J6/.coz[[1,6]]

Ut=Table[{x[i],yx1[i]},{i,0,nn}]

Un=Table[{x[i],yx2[i]},{i,0,nn}]

omegab=Table[{x[i],yx3[i]},{i,0,nn}]

Tt=Table[{x[i],yx4[i]},{i,0,nn}]

Tn=Table[{x[i],yx5[i]},{i,0,nn}]

Mb=Table[{x[i],yx6[i]},{i,0,nn}]

TableForm[Ut]

TableForm[Ub]

TableForm[omegab]

TableForm[Tt]

TableForm[Tn]

TableForm[Mb]

EK2: Düzlemine Dik Yüklü Dairesel Çubukların Analitik Çözümü

```
Print["Düzlemine Dik Yüklü Daire Çubuk Örneği :Analitik çözüm"]
```

```
Clear["Global`*"];
```

```
(*=====*)
```

```
p0=1 ; pb=1 ; delta=1 ; Dnn=1 ; Dtt=1 aci=180.
```

```
fic=N[aci*Pi/180.]
```

```
(*=====*)
```

```
Ub=(c1+c2* $\phi$ +c3*Sin[ $\phi$ ]+c4*Cos[ $\phi$ ]+c5* $\phi$ *Sin[ $\phi$ ]+c6* $\phi$ *Cos[ $\phi$ ])-(p0^4*pb/2/Dtt* $\phi$ ^2)
```

```
on=1/p0*(-c2-c3*Cos[ $\phi$ ]+c4*Sin[ $\phi$ ]-c5( $\phi$ *Cos[ $\phi$ ]+Sin[ $\phi$ ])-c6*(Cos[ $\phi$ ]-
```

```
 $\phi$ *Sin[ $\phi$ ]))+p0^3*pb/Dtt* $\phi$ 
```

```
ot=-1/p0*(c3*Sin[ $\phi$ ]+c4*Cos[ $\phi$ ]+c5( $\phi$ *Sin[ $\phi$ ]-2*Cos[ $\phi$ ]/(1+delta))+c6*( $\phi$ *Cos[ $\phi$ ]+2*Sin[ $\phi$ ]/(1+delta)))-(p0^3*pb/Dtt*(1+delta))
```

```
Mn=(Dnn/(p0^2)*2*delta/(1+delta))*(c6*Sin[ $\phi$ ]-c5*Cos[ $\phi$ ])-(p0^2)*pb
```

```
Mt=(Dnn/(p0^2)*2*delta/(1+delta))*(((1+delta)/2)*c2-c5*Sin[ $\phi$ ]-c6*Cos[ $\phi$ ])-(p0^2)*pb* $\phi$ 
```

```
Tb=Dnn/(p0^3)*delta*c2-p0*pb* $\phi$ 
```

```
denk1=Ub/. $\phi$  ->0;
```

```
denk2=ot/. $\phi$  ->0;
```

```
denk3=on/. $\phi$  ->0;
```

```
denk4=Ub/. $\phi$  ->fic;
```

```
denk5=ot/. $\phi$  ->fic;
```

```
denk6=on/. $\phi$  ->fic;
```

```
coz=Solve[{denk1=0,denk2=0,denk3=0,denk4=0,denk5=0,denk6=0},{c1,c2,c3,c4,c5,c6}]
```

```
Ubb=Ub/.coz
```

```
ott=ot/.coz
```

```
onn=on/.coz
```

```
Tbb=Tb/.coz
```

```
Mtt=Mt/.coz
```

```
Mnn=Mn/.coz
```

```

Ub=Table[Ubb,{ $\phi$ ,0,fic,fic/20}]
ot=Table[ott,{ $\phi$ ,0,fic,fic/20}]
on=Table[onn,{ $\phi$ ,0,fic,fic/20}]
Tb=Table[Tbb,{ $\phi$ ,0,fic,fic/20}]
Mt=Table[Mtt,{ $\phi$ ,0,fic,fic/20}]
Mn=Table[Mnn,{ $\phi$ ,0,fic,fic/20}]

```

```

TableForm[Ub]
TableForm[ot]
TableForm[on]
TableForm[Tb]
TableForm[Mt]
TableForm[Mn]

```

EK 3: Silindirik Uzun Tonzlara ait Analitik Çözüm

```
Clear["Global`*"];
Print["silindirik kabuk/Gibson,say.96"]
(*=====*)
a=30.;boy=120.;aci=40.;q0=50.;Em=1*10^6;et=.25
(*=====*)
k=Pi/boy
G=(et*a^6*k^4/At)^(1/8)
alfa=G*Cos[Pi/8];beta=G*Sin[Pi/8]
At=et^3/12.
fic=(aci*Pi/180.)
p=4*q0/Pi
Cr=2.*a^4/(1.+et*a^6*k^4/At)/Em/At
J=(Em*At*Cr/a^4 )-2.

t1x=Cos[beta*x] Cosh[alfa*x]
t2x=Sin[beta*x] Sinh[alfa*x]
t3x=Cos[alfa*x] Cosh[beta*x]
t4x=Sin[alfa*x] Sinh[beta*x]

Whx=a1*t1x+a2*t2x+a3*t3x+a4*t4x ;

Mfih=-(Em*At/a^2)*D[Whx,{x,2}]
Qfih=-(Em*At/a^3)*D[Whx,{x,3}]
Nfih=(Em*At/a^3)*D[Whx,{x,4}]
Nxfh=-(Em*At/a^4/k)*D[Whx,{x,5}]
Nxbh=-(Em*At/a^5/k^2)*D[Whx,{x,6}]

Wox=Cr*p*Cos[x]
Mfio=(Em*At/a^2)*Cr*p*Cos[x]
```

```

Qfio=-(Em*At/a^3)*Cr*p*Sin[x]
Nfio=(Cr*Em*At/a^3 -a)*p*Cos[x]
Nxfo=(J*p/k)*Sin[x]
Nxo=(J*p/a/k^2)*Cos[x]

denk1=(Mfih+Mfio)/.x->fic
denk2=(Qfih+Qfio)/.x->fic
denk3=(Nfih+Nfio)/.x->fic
denk4=(Nxfh+Nxfo)/.x->fic
coz=NSolve[{denk1==0,denk2==0,denk3==0,denk4==0},{a1,a2,a3,a4}]

a1=a1/.coz[[1,1]]
a2=a2/.coz[[1,2]]
a3=a3/.coz[[1,3]]
a4=a4/.coz[[1,4]]

Mfi=Mfih+Mfio;
Qfi=Qfih+Qfio;
Nfi=Nfih+Nfio;
Nxf=Nxfh+Nxfo;
Nx=Nxh+Nxo;
wx= Whx+Wox;

Print["liste cikariyor, Mfi, Qfi, Nfi, Nxf, Nx, wx "]
list1=Table[{m/Degree,Mfi/.x->m},{m,0,fic,fic/20}];
list2=Table[{m/Degree,Nfi/.x->m},{m,0,fic,fic/20}];
list3=Table[{m/Degree,Nxf/.x->m},{m,0,fic,fic/20}];
list4=Table[{m/Degree,Qfi/.x->m},{m,0,fic,fic/20}];
list5=Table[{m/Degree,Nx /.x->m},{m,0,fic,fic/20}];
list6=Table[{m/Degree,wx /.x->m},{m,0,fic,fic/20}];

pmfi=Plot[Mfi,{x,-fic,fic},PlotRange->All,PlotLabel->"Mfi"]
pqfi=Plot[Qfi,{x,-fic,fic},PlotRange->All,PlotLabel->"Qfi"]

```

```
pnfi=Plot[Nfi,{x,-fic,fic},PlotRange->All,PlotLabel->"Nfi"]  
pnxf=Plot[Nxf,{x,-fic,fic},PlotRange->All,PlotLabel->"Nxf"]  
pnx=Plot[Nx,{x,-fic,fic},PlotRange->All,PlotLabel->"Nx"]  
pwx=Plot[wx,{x,-fic,fic},PlotRange->All,PlotLabel->"wx"]
```

EK 4: Düzlemi İçinde yüklü dairesel çubukların Statik Yükler Altında TFY ve Rijitlik matrisi yöntemiyle Çözümünü yapan DUZLEMIC programı için veri dosyası hazırlama kılavuzu

.....
NOT: Altı çizilmiş olan satırlar veri dosyasına yazılacak bilgiler olup, diğerleri ise bu bilgilerin açıklamalarıdır.

NEL IDS NBIL MCS “Kontrol Bilgileri”

- NEL** : Toplam çubuk elemanı sayısı
IDS : Toplam düğüm sayısı
NBIL : Toplam bilinmeyen sayısı (En büyük KOD numarası)
MCS : Malzeme çeşidi sayısı

MLZ AT AL EL PO RA AFN AFT “Malzeme ve kesit özellikleri Özellikleri”

- MLZ** : Malzeme çeşidi no
AT : Çubuk atalet momenti (I_b)
AL : Çubuk kesit alanı
EL : Çubuk elastisite modülü
PO : Poisson oranı
RA : Çubuk eğrilik yarıçapı
AFN : Kayma şekil değiştirmesi durumunda değeri girilir.
AFT : Kayma şekil değiştirmesi durumunda değeri girilir.

Not : Malzeme çeşidi sayısı kadar alt alta yazılmalıdır.

NOD(I) NOD(J) MLZ ACI1 ACI2 “Çubuk tarifleri, malzeme no ve çubuk uçlarının açıları”

- NOD(I)** : Çubuk elemanının ilk düğüm no
NOD(J) : Çubuk elemanın ikinci düğüm no
MLZ : Çubuk malzeme çeşidi no
ACI1 : Çubuğun ilk ucunun açısı
ACI2 : Çubuğun ikinci ucunun açısı

Not : Çubuk tarifleri, malzeme no ve çubuk uç açıları ile ilgili satırlar, çubuk sayısı kadar alt alta yazılmalıdır.

KOD(I,1) KOD(I,2) KOD(I,3) “Düğümlerin Kod Numaraları”

KOD(I,1) : I’nıncı düğüme ait yatay yer değiştirme

KOD(I,2) : I’nıncı düğüme ait düşey yer değiştirme

KOD(I,3) : I’nıncı düğüme ait dönme

Not : I’nıncı düğüme ait deplasmanlar ve dönme tutulu ise, =0 , serbest
ise KOD (serbestlik) numarasını yazınız. KOD numaraları satırı düğüm
sayısı kadar tekrarlanmalıdır.

IYYUK ITEKYUK “Yükleme İçin Kontrol Bilgileri”

IYYUK : Sistemde yayılı yük bulunan eleman varsa 1, yoksa 0 yazınız

ITEKYUK : Sistemde düğümlere etkileyen tekil yük varsa 1, yoksa 0 yazınız

IELSAY “IYYUK =0 ise, bu iki satırı yazmayınız!”

IL QT QN QMB “IELSAY kadar bu satır tekrarlanmalı”

IELSAY : Yayılı yük bulunan eleman sayısı

IL : Yayılı yük bulunan çubuk elemanı no

QT : Yayılı yükün teğetsel yöndeki şiddeti

QN : Yayılı yükün normal yöndeki bileşeni (yük çubuk elemanına basınç olarak
etkiyorsa negatif “-” işaretli alınız)

QMB : Yayılı momentin şiddeti

IDUGSAY “ITEKYUK =0 ise, bu iki satırı yazmayınız!”

IDUGNO FX FY M “IDUGSAY kadar bu satır tekrarlanmalı”

IDUGSAY : Tekil yük bulunan düğüm sayısı

IDUGNO : Tekil yük bulunan düğüm no

FX : Tekil yükün yatay bileşeni

FY : Tekil yükün düşey bileşeni

M : Tekil moment

Not : Tekil yük ve moment bileşenleri kodlamanın ters yönünde ise negatif “-” işaretli alınız.

EK 5: Analitik Laplace Dönüşümü ve Sayısal Ters Laplace Dönüşümleri

Sistem davranışını idare eden diferansiyel denklemlerdeki zamana bağlı türevlerden kurtulmak için Laplace dönüşümünününden faydanılacaktır.

Zamana bağlı bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $t>0$ için, $L[f(t)] = \bar{F}(z)$ ise,

$$\bar{F}(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt \quad (\text{Ek 5.1.})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada z , Laplace dönüşüm parametrisini göstermektedir. Zamana bağlı birinci ve ikinci mertebeden türevlerini Laplace dönüşümleri kapalı olarak aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

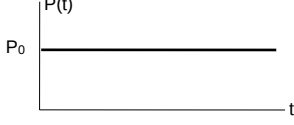
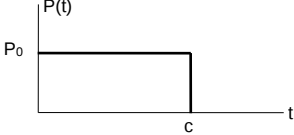
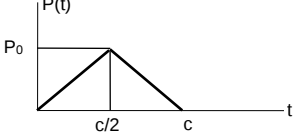
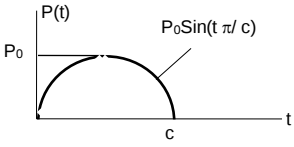
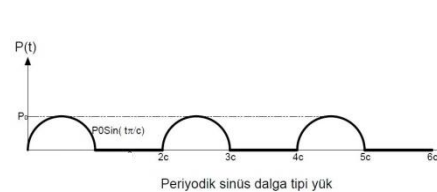
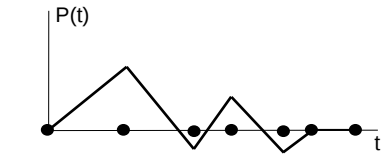
$$\begin{aligned} L[\dot{f}(t)] &= z\bar{F}(z) - f(0) \\ L[\ddot{f}(t)] &= z^2\bar{F}(z) - zf(0) - \dot{f}(0) \end{aligned} \quad (\text{Ek 5.2.})$$

şeklinde yapılmaktadır. Bu ifadelerdeki ikinci ve üçüncü terimler $t=0$ anındaki başlangıç şartlarını göstermektedir.

Dinamik problemlerin dönüşmüş uzayda çözümleri için, önce zamana bağlı yük fonksiyonlarının Laplace dönüşümü yapılmalıdır. Bunun için:

- Analitik ifadeleri verilen bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri, kapalı olarak yapılabilir. Kapalı Laplace dönüşümleri (Ek 5.1.) verilmektedir.
- Bazı $f(t)$ yük fonksiyonlarının analitik ifadeleri karmaşık olup, Laplace dönüşümleri tablolardan bulunamamaktadır. Bu durumda fonksiyonun sayısal değerleri ayrık olarak hesaplanarak, dönüşümleri FFT ye dayalı direk Laplace yöntemi ile yapılabilir.
- Deprem katsayıları veya deneysel olarak ölçülmüş çıktılarının, ancak belli zaman aralıklarındaki değerleri bilinmektedir. Bu durumlarda, ya sayısal direk Laplace dönüşüm yöntemleri ile ya da fonksiyonun iki zaman aralığı arasında lineer değiştiği kabulü ile analitik olarak yapılabilir.

Çizelge Ek 5.1. Zamana bağlı bazı yük fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri

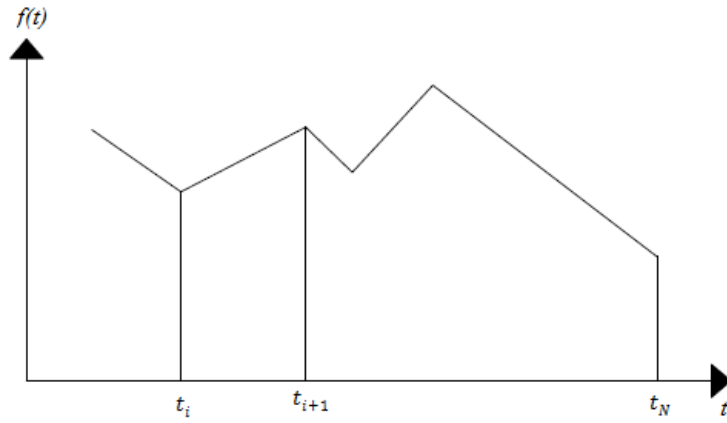
Tip No:	Yük Tipleri	Fonksiyonun Zamanla Değişimi P(t)	Laplace Dönüşümü $\bar{P}(s)$
1	Ani Yük (Adım tipi)		$\frac{P_0}{s}$
2	İmpulsif Dikdörtgen		$\frac{P_0(1 - e^{-cs})}{s}$
3	İmpulsif Üçgen		$P_0 \left[\frac{1 - e^{-\frac{cs}{2}}}{s} \right]^2 \frac{2}{c}$
4	İmpulsif Dik Üçgen		$P_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1 - e^{-cs}}{cs^2} \right]$
5	İmpulsif Sinüs		$P_0 \frac{\pi c (1 + e^{-cs})}{c^2 s^2 + \pi^2}$
6	Dalga Tipi Sinüs Yükü		$P_0 \frac{\pi c}{(c^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-cs})}$
7	Keyfi Yük		İki nokta arasında doğrusal değişen fonksiyonların analitik Laplace dönüşümleri(Ek-5.7.) formülü ile hesaplanmaktadır.

EK 5.1. İki Nokta Arasında Doğrusal Değişen Bir Fonksiyonun Analitik Laplace Dönüşümü

İki zaman aralığında doğrusal değiştiği kabul edilen, $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü,

$$\bar{F}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) e^{-zt} dt \quad (\text{Ek 5.3.})$$

şeklinde olmaktadır.



Şekil 5.1. Yük fonksiyonunun zamana göre değişimi

t_i ve t_{i+1} zaman aralığında $f(t)$ fonksiyonunun değişimi

$$f(t) = f(t_i) + \frac{\Delta f}{\Delta t} (t - t_i) \quad (\text{Ek 5.4.})$$

olup, burada

$$\Delta f = f(t_{i+1}) - f(t_i); \quad \Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (\text{Ek 5.5.})$$

şeklinde ifade edilmektedir. (Ek 5.4.) ve (Ek 5.5.) eşitlikleri yardımıyla (Ek 5.3.) ifadesinin integrali

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) e^{-zt} dt = f(t_i) \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-zt} dt + \frac{\Delta f}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (t - t_i) e^{-zt} dt \quad (\text{Ek 5.6.})$$

olmaktadır. Bu integral (Ek 5.3.) ifadesinde yerine konulursa, yalnız bir z parametresi için direk dönüşüm,

$$\bar{F}(z_k) = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{z^2 \Delta t} [z \Delta t \{f(t_i) e^{-zt_i} - f(t_{i+1}) e^{-zt_{i+1}}\} + \Delta f \{e^{-zt_i} - e^{-zt_{i+1}}\}] \quad (\text{Ek 5.7.})$$

şeklinde kapalı olarak hesaplanmaktadır. Bu direk dönüşüm, çeşitli z Laplace parametreleri için tekrarlanacaktır.

EK 5.2. Durbin'in Modifiye Edilmiş Sayısal Ters Laplace Dönüşüm Yöntemi

Hem yük fonksiyonunun hem de zamana bağlı diferansiyel denklem takımının kapalı Laplace dönüşümleri alınarak, dönüşmüş uzayda bir dizi Laplace parametresi için sayısal çözümler yapılmaktadır. Bu çözümlerden zaman uzayına geçmek için, Durbin'in modifiye edilmiş sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmış olup, bu yöntemin özeti aşağıda verilmiştir (Durbin,1974).

$$f(t_j) \cong \frac{2e^{aj\Delta t}}{T} \left[-\frac{1}{2} Re\{\bar{F}(a)\} + Re\{\sum_{k=0}^{N-1} \{\bar{F}(z_k) L_k\} e^{(i\frac{2\pi}{N})jk} \} \right] \quad (\text{Ek 5.8.})$$

Burada, i kompleks sayı olup, $z_k = a + i \frac{2\pi k}{T}$, k 'nıncı Laplace dönüşüm parametrisini göstermektedir. T , çözüm aralığı olmak üzere N adet eşit zaman aralığı,

$t_j = j\Delta t = \frac{jT}{N}$, ($j = 0,1,2, \dots, N-1$) için $f(t)$ hesaplanmaktadır. İlgili kaynakta, $5 \leq aT \leq 10$ aralığı için en iyi sonuçlar elde edildiği belirtilmektedir. Bu çalışmada çözülen sayısal örneklerde, ' aT ' için 6 seçilmiştir. Yukarıdaki formülün ikinci kısmındaki toplam FFT alt programı (Brigham,1974) yardımıyla hesaplanmaktadır. Ters dönüşüm formülünde Laplace uzayındaki çözüm değerleri (Narayanan,1979)' ın önerdiği şekilde aşağıdaki gibi modifiye edilmektedir. Laplace uzayında hesaplanan ayırık değerlerin herbiri Lanczos (L_k) faktörü ile çarpılarak çözümler iyileştirilmektedir. Bu faktör,

$$L_k: \begin{cases} k = 0 \text{ için, } L_0 = 1 \\ k > 0 \text{ için, } L_k = \frac{\sin(\frac{k\pi}{N})}{\frac{k\pi}{N}} \end{cases} \quad (\text{Ek 5.9.})$$

şeklinde verilmektedir.

EK 6: Düzlemi İçinde yüklü dairesel çubukların Dinamik Yükler Altında Elastik ve viskoelastik Çözümlerini direk TFY ile yapan programın veri dosyası hazırlama kılavuzu

CFMDUZICDINAMIKV PROGRAMI İÇİN VERİ HAZIRLAMA KILAVUZU

CFMDuzicDinamikV programı, zamanla keyfi olarak değişen yükler altındaki dairesel veya parabolik kemerlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile dinamik analizini yapmaktadır. Program çalıştırıldığında veri dosyası ismi (en fazla 12 karakter) girilmelidir. Çıktı dosyası ismi ise, program tarafından **OUT** uzantılı olarak oluşturulmaktadır.

Not: Veri dosyasına yazılacak bilgiler, koyu ve altı çizilmiş satırdakilerdir.

Kontrol bilgileri

X1,X2,NSTEP

X1 : İlk ucun açısı (derece)
X2 : İkinci ucun açısı (derece)
NSTEP: Çözüm aralığı için bölme sayısı

Malzeme Bilgileri

ELAS, RO, ANU,AL,AT, RR,GAM,SONUM

ELAS : Elastisite modülü
RO : Kütleli yoğunluğu
ANU : Poisson oranı
AL : Enkesit alanı
AT : İb Atalet momenti
RR : Dairesel çubuğun yarıçapı
GAM : Kayma sabiti (kayma gerilmesinin kesit boyunca dağılımını temsil eder)
SONUM : Sonum oranı

Hesaplanacak Büyüklükler ve/veya Konumları

NUT,NUN,NOB,NTT,NTN,NMB

NUT : Ut deplasmanı hesaplanmayacaksa 0, hesaplanacaksa konumu(1,2..) giriniz
NUN : Un deplasmanı hesaplanmayacaksa 0, hesaplanacaksa konumu(1,2..) giriniz
NOB : Ob dönmesi hesaplanmayacaksa 0, hesaplanacaksa konumu(1,2..) giriniz
NTT : Tt kuvveti hesaplanmayacaksa 0, hesaplanacaksa konumu(1,2..) giriniz
NTN : Tn kuvveti hesaplanmayacaksa 0, hesaplanacaksa konumu(1,2..) giriniz
NMB : Mb momenti hesaplanmayacaksa 0, hesaplanacaksa konumu(1,2..) giriniz

Not : Yer değiştirmeler, dönme ve kesit tesirlerinden hesaplanmayacak olanlar için “0” girilmeli; hesaplanacak olanlar da şöyle tarif edilmelidir. Örneğin çözüm aralığı, NSTEP sayıda aralığa bölünmekte olup, (NSTEP+1) noktada çözüm yapılmaktadır. Yer değiştirmeler, dönme ve kesit tesirlerinden hesaplanacak olanlar için konum olarak: 1,2,..., (NSTEP+1) aralığında koordinat numarası girilmelidir.

Dinamik Yükleme Bilgileri Tanıtılıyor

IYUKT, MT

IYUKT : Dinamik yük tipi (sondaki tablodan seçilecek)

MT : (Laplace parametresi sayısı= 2^M) ifadesindeki M değeri girilecek

IYUKT $\leq$ 6 ise, Adım tipi, Impulsif yükleme vs. yapılacaksa sadece bu bilgiler

TSUR, TSON

TSUR : Impulsif yükün bittięi zaman

TSON : İşlem süresi

Veya IYUKT=7 ise, zamanla keyfi değişen yükleme yapılacaksa sadece aşağıdaki tanımlamalar yapılacaktır.

NG

TZ, GZ

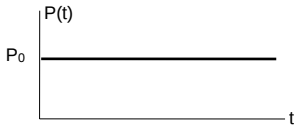
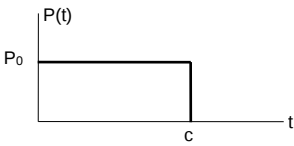
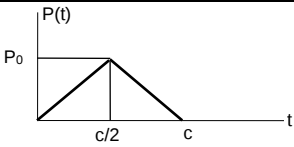
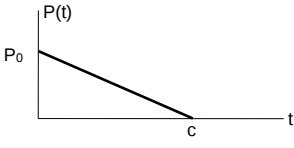
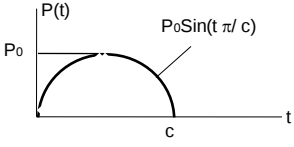
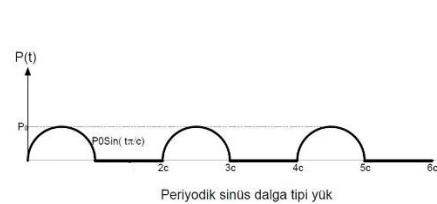
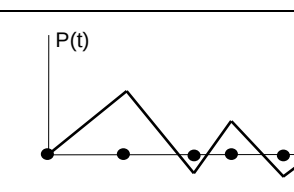
NG : IYUKT>6 ise, Fonksiyon tanımını için nokta sayısı

TZ : Zaman değeri

GZ : Fonksiyon değeri

Not : Zaman (TZ) ve fonksiyon değeri (GZ), fonksiyon tanım sayısı (NG) kadar alt alta tekrarlanmalıdır.

Zamana bağılı bazı yük fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri

Tip No:	Yük Tipleri	Fonksiyonun Zamanla Değişimi $P(t)$	Laplace Dönüşümü $\bar{P}(s)$
1	Ani Yük (Adım tipi)		$\frac{P_0}{s}$
2	İmpulsif Dikdörtgen		$\frac{P_0(1 - e^{-cs})}{s}$
3	İmpulsif Üçgen		$P_0 \left[\frac{1 - e^{-\frac{cs}{2}}}{s} \right]^2 \frac{2}{c}$
4	İmpulsif Dik Üçgen		$P_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1 - e^{-cs}}{cs^2} \right]$
5	İmpulsif Sinüs		$P_0 \frac{\pi c(1 + e^{-cs})}{c^2 s^2 + \pi^2}$
6	Dalga Tipi Sinüs Yüğü		$P_0 \frac{\pi c}{(c^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-cs})}$
7	Keyfi Yük		İki nokta arasında doğrusal değişen fonksiyonların Laplace dönüşümleri EK 5.7. de verilen sayısal Laplace dönüşüm yöntemi ile hesaplanmaktadır.