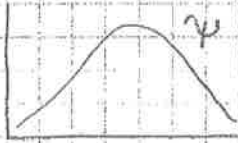


18.06.2012

● Karacisim Isınması



$E = h\nu \rightarrow$ Enerjinin kesikli olması anlamına geliyor.

Enerjinin bir ortamdaki sahip olabileceği enerji seviyesinin kesikli olması karacisim ışımasının bize kazandırdığı durumdur.

Tarihsel Gelişim

* Karacisim 1900 Max Planck

* Fotoelektrik (Bir metalden e^- koparma olayı) 1905

● Fotoelektrik olay olmasını için cisimden ışınlar geliyor.

* Alfa saçılması ve atom modeli 1911 Ernest Rutherford

* Atom spektrumunun Kuantum mekaniksel açıklaması 1913 Niels Bohr

* Madde dalgası 1925 Louis de Broglie

* Dalga denklemi 1926 Erwin Schrödinger

* Belirsizlik ilkesi 1927 Werner Heisenberg

Bir cisim ısıtıldığında radyasyon yaymaya başlar. Denge durumunda iken bütün frekans spektrumunu kapsayarak şekilde yayılır.

● Yayılan bütün spektrum dağılımı hem frekansa (veya dalga boyuna) hem de sıcaklığa bağlıdır.

Isıma Gücü: (Eν) Birim zamanda birim alandan yayılan enerji

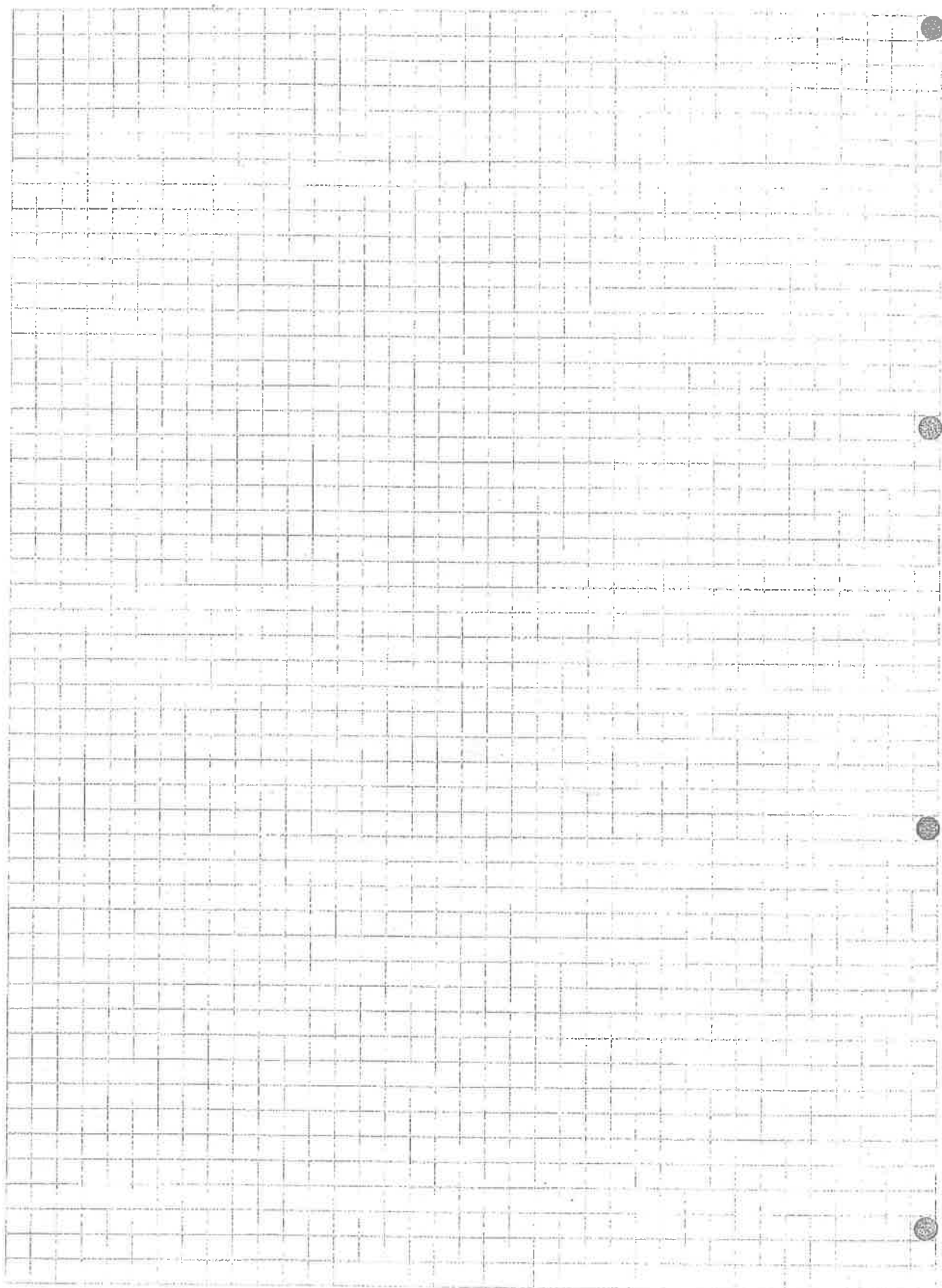
$$E(\nu) = \left[\frac{\text{Enerji}}{L^2 \cdot T} \right] = \left(\frac{J/s}{m^2} \right) = \frac{\text{Watt}}{m^2}$$

Frekans = ν ile $\nu + d\nu$

$$dE(\nu) = U(\nu) d\nu$$

$U(\nu)$: spektral dağılım fonksiyonu

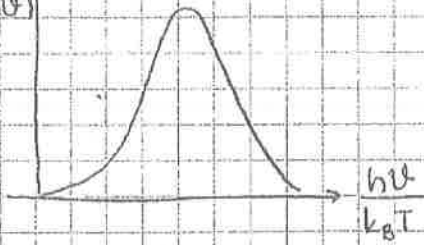
$$\bullet \quad U(\nu) = \frac{\text{Watt}}{m^2} \cdot \frac{1}{Hz} \quad U(\nu) = U(\lambda)$$



$E(\nu)$



$U(\nu)$



$U(\nu)$: Rayleigh - Jeeves (Düşük frekanslarda uyumlu)

$U(\nu)$: Wien (Yüksek frekanslarda uyumlu)

$U(\nu)$: Rayleigh - Jeeves $\rightarrow U(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2$ { Max Planck iki formülü kullanarak yeni formül çıkarıyor

$U(\nu)$: Wien $\rightarrow U(\nu) = \nu^3 F(\nu/T)$

$$F = Ae^{-B\nu/k_B T}$$

1900 yılında Max Planck yüksek frekanslarda geçerli Wien Yasası ile düşük frekanslarda geçerli R-J yasasını birleştirerek aşağıdaki ifadeyi elde etti.

$\rightarrow$ Her frekansta ısıyı yollar mı? Bu şekil bize neyi verir?

Formüllerle bunu bulmayı amaçlıyoruz

$$U(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

$$E = h\nu \quad h: \text{Planck sabiti} = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

$\rightarrow$ Bu ifade bütün frekanslar için deney ile uyumludur. Planck daha sonra bu ifadenin termodinamik yasaları ve Boltzman'ın olasılık dağılım fonksiyonunu kullanarak çıkarabileceğini gösterdi.

Fakat enerjinin frekans ile sürekli değişen bir nitelik olmayıp belirli bir minimum kuantum enerjisi E 'nin tam kat sayıları olarak alınması gerekiyordu.

$E = nh\nu$ Buna göre atomlar enerjiyi "kuantumlar halinde $nh\nu$ olarak sürekli yaymaktadır.

Örnek: Planck yasasını kullanarak toplam ısıma enerjisinin sıcaklığın dördüncü kuvveti ile orantılı olduğunu gösteriniz.

$$I = \int_0^{\infty} u(\nu) d\nu = ? \quad u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

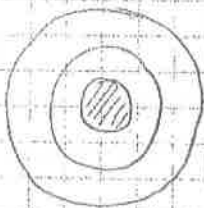
$$I = \int_0^{\infty} \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu \quad x = \frac{h\nu}{k_B T} \quad dx = \frac{h}{k_B T} d\nu$$

$$I = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^3 x^3 \frac{1}{e^x - 1} \left(\frac{k_B T}{h} \right) dx$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{k_B^4 T^4}{h^4} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$= \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} T^4$$

$$I = 6T^4$$



e'lerin atomun içinde belirlediği enerji seviyelerinde yer değiştirmesi olaydır.

19.06.2012

Örnek: Planck ifadesinin

a) Düşük frekanslarda Rayleigh-Jeans formülü ile

b) Yüksek frekanslarda Wien formülü ile çalıştığını gösteriniz.

Bir cismin ısımasının her frekansa olup olmadığını göstermek istiyoruz. Fakat her frekansa ısıma yok, frekanslar birbirine çok yakın.

$$a) u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

$$u(x) = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^3 \frac{x^3}{e^x - 1} \quad \nu < 0 \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow e^x = 1 + x +$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^3 \frac{x^3}{x+1-1} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{k_B^3 T^3}{h^3} x^2$$

$$u(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2$$

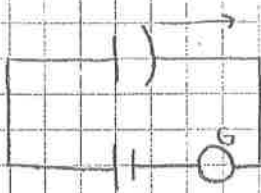
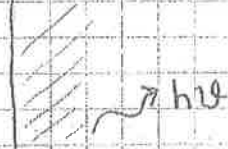
b) $e^x - 1 = e^x$ $x = \frac{h\nu}{k_B T}$

$$U(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3 e^{h\nu/k_B T}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} e^{-h\nu/k_B T}$$

Fotoelektrik Olay

Işık metalden e^- koparmaktadır.

Isık bir enerji taşır.



elektron koparılabilir.
elektronlar serbest haldedir.

1.) Temiz yüzeyler radyasyona (yani ısımaya) maruz

oldığında e^- yayımı olur, pozitif iyon yayımı olmaz.

2.) Elektronların yayılıp yayılmayacağı metal üzerine gönderilen ışığın frekansına bağlıdır.

3.) Yayılan elektronların enerjisi ışığın şiddetine bağlı değildir.



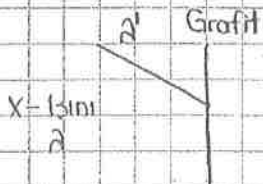
$$\frac{1}{2} m_e v^2 = E - W$$

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - W$$

$V = h\nu$ (e^- nun hızı)

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e^- \text{ nun kinetik enerjisi} = h\nu - W$$

Compton Olayı



$$\lambda' > \lambda$$

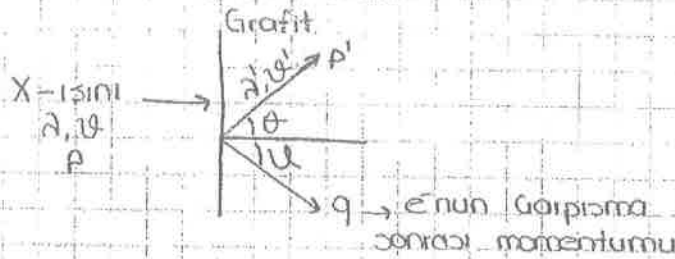
$$E = pc$$

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = d\lambda$$

Compton ışığın dalga boyundaki değişimi momentum ve enerjinin korunumu kullanarak kanıtlayabileceğini söylüyor.

İşığın (fotonların) parçacık gibi davranabileceği varsayımının kesin delili 1922'de Compton tarafından bulundu.

$$E = pc \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad \nu\lambda = c$$



Compton Öncesi

$$p = p' \cos \theta + q \cos \phi \quad (1)$$

$$p' \sin \theta = q \sin \phi \quad (2) \quad \text{Compton saçılması}$$

$$(p - p' \cos \theta)^2 = q^2 \cos^2 \phi$$

$$p^2 - 2pp' \cos \theta + p'^2 \cos^2 \theta = q^2 \cos^2 \phi$$

$$p^2 \sin^2 \theta = q^2 \sin^2 \phi$$

+

$$p'^2 + p^2 - 2pp' \cos \theta = q^2 \quad (*)$$

Enerjinin Korunumu

$$pc + m_e c^2 = p'c + \sqrt{q^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

$$pc - p'c + m_e c^2 = \sqrt{q^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$

$$(pc - p'c)^2 + m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 (pc - p'c) = q^2 c^2 + m_e^2 c^4$$

$$(p - p')^2 + 2m_e c (p - p') = q^2 \quad (**)$$

* ve ** denklemlerini karşılaştırınız

$$(p - p')^2 + 2m_e c (p - p') = p'^2 + p^2 - 2pp' \cos \theta$$

$$\cancel{p^2} + \cancel{p'^2} - 2pp' + 2m_e c (p - p') = \cancel{p^2} + \cancel{p'^2} - 2pp' \cos \theta$$

$$m_e c (P - P') = PP' (1 - \cos \theta)$$

$$(P - P') = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta) PP'$$

$$\left(\frac{1}{P'} - \frac{1}{P} \right) = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

$$P = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda'}{h} - \frac{\lambda}{h} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

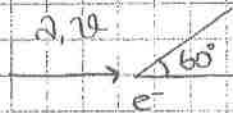
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

Alıştırma 1b: Enerjisi 30 keV olan bir foton serbest e⁻la çarpıştığında 60°'lik açı ile saçılmaya uğruyor.

a) e⁻'nin hangi enerjisi

b) Hangi açıyla saçılacağını bulunuz.



$$E_i = 30 \text{ keV} = 30000 \text{ eV}$$

$$E_s = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$a) E = Pc = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{hc}{E}$$

$$E = \frac{P^2}{2m}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos 60)$$

$$E' = \frac{hc}{\lambda'}$$

$$E - E' = \text{e}^- \text{nin enerjisi}$$

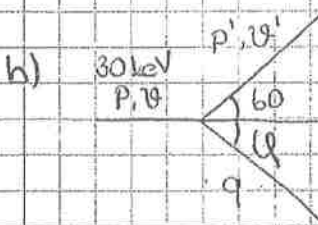
$$E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \text{bul}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

e⁻'nin kazandığı otonomi enerji fotonun kaybettiği enerjiye eşittir.

$$E_e = 30000 - \frac{hc}{\lambda'}$$

$$E_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$



Momentumun korunumundan yola çıkarak e⁻'nin saçıldığı açıyı bulabilirsiniz.

$$p' \sin \theta = q \sin \phi$$

$$p' = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda'}$$

$$E_e = \frac{P^2}{2m}$$

$$q = \frac{h}{\lambda'}$$

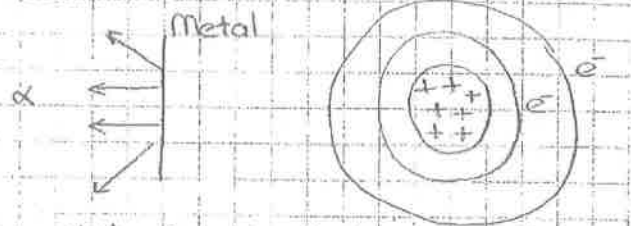
$$q = \frac{E}{c}$$

$$p' \sin 60 = q \sin \phi$$

Thomson Atom Modeli



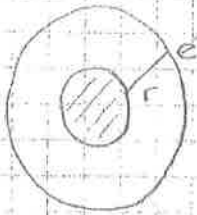
Rutherford Atom Modeli



Teorisi; Neils Bohr tarafından geliştiriliyor.

$$\frac{1}{n} = R \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right] \quad n, m = 1, 2, \dots$$

$$L = n\hbar$$



$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{r}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r \cdot p = r m v$$

$$r m v = n\hbar \longleftrightarrow \frac{e^2}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

Bohr'a göre;

1. e- lar dairezel yörüngelerde hareket ederken karardır.

2. e- lar bir üst seviyeden karardır bir alt seviyeye geçerken aynı ypar

$$E = h\nu \quad \text{aynı frekans} = \frac{E_m - E_n}{h} \quad \nu = \frac{E_m - E_n}{h}$$

3. e- lar dairezel yörüngelerde hareket ederken amsal momentunlar kesiklidir ve $L = n\hbar$ 'dır.

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \rightarrow r = \frac{e^2}{m v^2}$$

$$m v r = n\hbar$$

$$m v \left(\frac{e^2}{m v^2} \right) = n\hbar \rightarrow v = \frac{e^2}{n\hbar}$$

$$r = \frac{e^2}{m \frac{e^2}{n^2 \hbar^2}} = \frac{n^2 \hbar^2}{m e^2}$$

Örneğin Hidrojen atomunu göb örneğe alalım.

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} m \frac{e^4}{n^2 \hbar^2} = \frac{e^2}{r} = \frac{1}{2} m \frac{e^4}{n^2 \hbar^2} = \frac{m e^4}{n^2 \hbar^2}$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{m e^4}{n^2 \hbar^2} = \frac{13,6}{n^2}$$

$$E = -\frac{1}{2} \frac{m e^4}{n^2 \hbar^2}$$

İşınma frekansı:

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h}$$

$$\nu = \frac{1}{h} \left[-\frac{1}{2} \frac{m e^4}{n^2 \hbar^2} + \frac{m e^4}{2 n^2 \hbar^2} \right]$$

$$\nu = \frac{1}{h} \frac{m e^4}{\hbar^2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right]$$

$$\lambda \nu = c$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{m e^4}{\hbar^2 h c} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right]$$

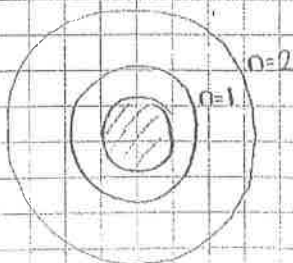
$$= \frac{1}{2} \frac{m e^4}{\hbar^2 2 \pi \hbar c} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{4 \pi \hbar^3 c} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right)$$

Rydberg sabiti

Alıştırma 1.7: Bir H atomunda e'nin en küçük enerjili $n=1$ ve $n=2$

yörüngelerdeki hızını bu hız cinsinden bulun.



$$m v r = n \hbar$$

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

$$r = \frac{e^2}{m v^2}$$

$$m \left[\frac{e^2}{m v^2} \right] = n \hbar$$

$$v = \frac{e^2}{n \hbar}$$

$$v = \frac{c e^2}{c n \hbar}$$

$$v = \frac{c}{n} \left[\frac{e^2}{c \hbar} \right]$$

$$v = \frac{c}{n} \alpha \rightarrow \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

b) Bu hızlara karşılık gelen dörme frekansı nedir?

$$\text{Dörme frekansı } \omega = \frac{2\pi r}{v(n=1)}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi r}{v(n=1)} \quad r = n^2 \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

c) $n=2$ den $n=1$ e geçerken yaptığı ışımanın frekansı nedir?

$$\omega = c R \left[1 - \frac{1}{4} \right]$$

De Broglie Dalgı Boyu

$$E = \hbar \omega \quad p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{\hbar}{\lambda} \quad \boxed{\frac{E}{c} = \frac{\hbar}{\lambda}} \quad \lambda \omega = c$$

$$p = m v$$



$$\boxed{2\pi r = n \lambda}$$

$$L = n \hbar$$

$$p = \hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$2\pi r = n \frac{2\pi \hbar}{p}$$

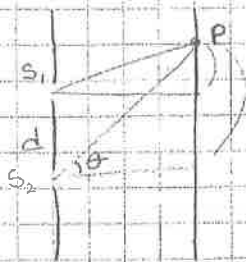
$$m v r = L = n \hbar$$

$$\lambda = \frac{\hbar 2\pi}{p}$$

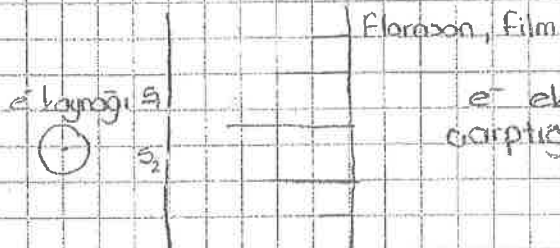
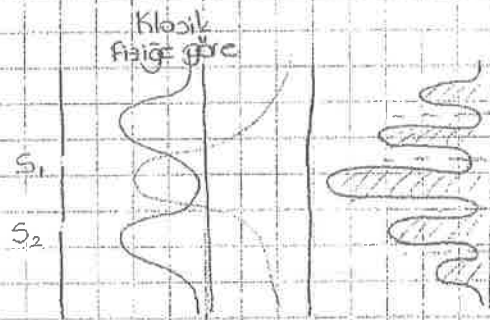
$$p r = n \hbar$$

$$\boxed{m v r = n \hbar}$$

Modelle Dalga İkilimi

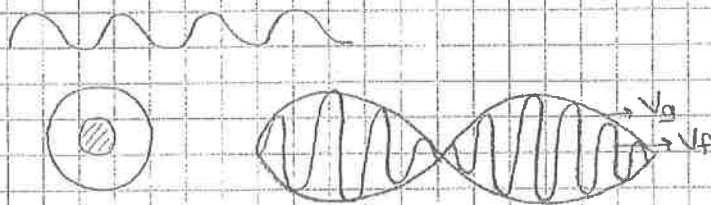


$$d \sin \theta = n \lambda$$



e^- elektron gibi birer dalga gibi, elektron
davranışında parçacık gibi davranır.

Dalga Paketi



$$\Psi(x,t) = \int_{k_i} A(k_i) \cos(k_i x - \omega_i t) dk_i$$

$$\Psi(x,t) = \int A(k) \cos(kx - \omega t) dk$$

Faz Hızı $V_f = \frac{\omega}{k}$

Grup Hızı $V_g = \frac{d\omega}{dk}$

$$E = \hbar \omega$$

$$p = \hbar k$$

$$p = m v$$

$$p = \hbar k \rightarrow k = 2\pi/\lambda$$

$$\omega = E/\hbar$$

$$k = p/\hbar$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$V_g = \frac{d}{dp} \left[\frac{p^2}{2m} \right] = \frac{p}{m}$$

Alıştırma 2.1: Okyanus dalgalarının faz hızı $v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ dir. Verilenlere göre Grup Hızı bulunuz.

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$= \frac{1}{k} \sqrt{gk} = \frac{\omega}{k}$$

Her zaman

$$v_f > v_g$$

$$\omega = \sqrt{gk}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} (gk)^{-1/2} g = \frac{1}{2} \frac{g}{\sqrt{gk}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

* Fourier Serileri

Örneğin $\square$

Bir dalga paketinin bileşenlerini bulabilmek için Fourier Serilerine ihtiyaca duyulur.

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{a} x + b_n \sin \frac{n\pi}{a} x \right)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{a} x + b_n \sin \frac{n\pi}{a} x \right)$$

$$\psi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{a}x} - e^{-i\frac{n\pi}{a}x}}{2i} \right) + b_n \left(\frac{e^{i\frac{n\pi}{a}x} - e^{-i\frac{n\pi}{a}x}}{2i} \right) \right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{i\frac{n\pi}{a}x} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) + e^{-i\frac{n\pi}{a}x} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) \right]$$

$$\psi(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n e^{i\frac{n\pi}{a}x} + C_{-n} e^{-i\frac{n\pi}{a}x} \right]$$

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{a}x}$$

$$C_0 = a_0$$

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{a}x}$$

$$\text{NOT: } \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i\frac{m\pi}{a}x} e^{i\frac{n\pi}{a}x} dx$$

$$= \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \psi(x) e^{-\frac{i n \pi}{a} x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2a} \int_{-a}^a C_n e^{-\frac{i n \pi}{a} x} e^{-\frac{i n \pi}{a} x} dx}_{\delta_{mn}}$$

$$\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \psi(x) e^{-\frac{i n \pi}{a} x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta_{mn}$$

$$= C_n$$

$$C_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \psi(x) e^{-\frac{i m \pi}{a} x} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \psi(x) e^{-\frac{i n \pi}{a} x} dx$$

Alıştırma 2.2: Kare dalga $[-a, a]$ nin bileşenlerini bulunuz.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & -b < x < b \\ 0 & b < |x| < a \end{cases}$$



$$C_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \psi(x) e^{-\frac{i n \pi}{a} x} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2a} \int_{-b}^b e^{-\frac{i n \pi}{a} x} dx$$

$$C_n = \frac{1}{2a} \frac{1}{\frac{i n \pi}{a}} \left(e^{\frac{i n \pi}{a} x} \right)_b^{-b}$$

$$C_n = \frac{1}{-2a i n \pi} \left(e^{\frac{i n \pi}{a} b} - e^{-\frac{i n \pi}{a} b} \right)$$

$$= \frac{1}{2a i n \pi} \left(e^{\frac{i n \pi}{a} b} - e^{-\frac{i n \pi}{a} b} \right)$$

$$C_n = \frac{1}{n \pi} \left(\frac{\sin \frac{n \pi b}{a}}{a} \right)$$

$$a_0 = \frac{b}{a} \quad a_n = \frac{2}{n \pi} \frac{\sin n \pi b}{a} \quad b_n = 0$$

$$a_n = C_n + C_{-n}$$

$$= \left[\frac{1}{n \pi} \frac{\sin \frac{n \pi b}{a}}{a} + \frac{1}{(-n) \pi} \frac{\sin \frac{(-n) \pi b}{a}}{a} \right]$$

$$a_n = \frac{2}{n \pi} \frac{\sin n \pi b}{a}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi a} b \cos n \pi b$$

$$a_1 = \frac{2b}{a}$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi b}{a}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi b}{a}$$

$$a_3 = \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi b}{a}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi b}{a}$$

$$a_4 = \frac{1}{4\pi} \sin \frac{4\pi b}{a}$$

$$\psi(x) = \frac{2b}{a} + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi b}{a} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi b}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi b}{a} \cos \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

Fourier serisi gibi Fourier integrali de bir dalga paketini temsil edebilir.

Örneğin;



$$\psi(x) = Nxe^{-\frac{b}{2}x}$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n}{a}x}$$

* Fourier Integrali

$$\psi(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} \int_a^a e^{ikx'} \psi(x') dx' \right) e^{ikx}, \quad k = \frac{n\pi}{a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{a} \quad \frac{2\pi}{a} \quad \frac{3\pi}{a} \quad \delta k = \frac{\pi}{a} \quad \Delta k = \frac{\pi}{a} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} \psi(x') dx' e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} \psi(x') dx' e^{ikx} \delta k \rightarrow 0 \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} \psi(x') dx' \right) e^{ikx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta k \rightarrow 0 \quad \delta k = \frac{\pi}{a} \Rightarrow a \rightarrow \infty \\ \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2a} \int_a^a e^{ikx'} \psi(x') dx' \right) e^{ikx} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta k}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} \psi(x') dx' \right) e^{ikx} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} \psi(x') dx' e^{ikx} \\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} \psi(x') dx'}_{\phi(k)} \end{aligned}$$

Herkesin de bildiği gibi

Birçok k değerine sahip ve sürekli değil ise Fourier serisi ile ifade edilir.

Birçok k değerine sahip ve sürekli ise dalga paketi Fourier integrali ile ifade edilir.

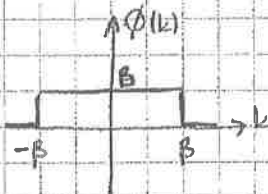
$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk \phi(k) e^{ikx}$$

$$\phi(k) = \int e^{-ikx} \Psi(x) dx$$

Alıştırma 2.3:

$[-\beta, \beta]$ aralındaki k değerlerinin oluşturduğu dalga paketi?



$$\Psi(x) = ?$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} dk \phi(k) e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\beta}^{\beta} dk B e^{ikx} = \frac{B}{2\pi} \left\{ \frac{1}{ix} e^{ikx} \right\}_{-\beta}^{\beta} = \frac{B}{2\pi} \left[\frac{1}{ix} (e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \right]$$

$$= \frac{B}{\pi x} \left(\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \right) = \frac{B}{\pi} \frac{\sin \beta x}{x}$$

$$\boxed{\Psi(x) = \frac{B}{\pi} \frac{\sin \beta x}{x}}$$

Belirsizlik İlkesi

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Bir e-run yerini ancak Δx kadar belirsizlik ile belirtebilir.

e-run momentumu ve konumu aynı anda aynı d-şr-rl-kl-la ölç-ü-l-m-e-z.

$$\Delta x \neq 0, \Delta p \neq 0$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$



$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Delta E = \frac{p}{m} \Delta p$$

$$\Delta E = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta p$$

$$\boxed{\Delta E \Delta t = \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Alıştırma 2.4: Bir atomun uyandırılmış enerji düzeyindeki ortalama ömrü $\Delta t = 1,6 \times 10^{-8}$ s'dir.

Bu atom taban durumuna indiğinde 8000 Å dalga boyu bir foton yayınladığında fotonun enerjisindeki ve dalga boyundaki belirsizlikleri hesaplayınız.

$$\Delta t = 1,6 \times 10^{-8} \text{ s}$$

$$\lambda = 8000 \text{ Å}$$

$$\Delta \lambda, \Delta E = ?$$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta E = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta t} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{1,6 \times 10^{-8} \text{ s}}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Delta E = hc \frac{1}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

$$\Delta \lambda = 0,0001 \text{ Å}$$

BÖLÜM 3 - SCHRÖDINGER DENKLEMİ

Kuantum Mekanikinin Birinci Varsayımı (Postüla)

1. Dalga Fonksiyonu bir sistemin durumunu belirler.

Operatörler

$$\hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p} \psi = p \psi$$

$$A\psi = a\psi$$

$$AB\psi = A(B\psi)$$

$$B\psi = b\psi$$

$$AB\psi \neq BA\psi$$

$$A = x \quad B = \frac{d}{dx}$$

$$AB\psi = x \frac{d}{dx} (\psi) = x \frac{d\psi}{dx}$$

$$BA\psi = \frac{d}{dx} (x\psi) = \psi + x \frac{d\psi}{dx}$$

$$AB - BA = x \frac{d\psi}{dx} - \psi - x \frac{d\psi}{dx} = -\psi$$

$$A = x \rightarrow x$$

$$B = p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$A = x$$

$$B = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$AB\psi = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$BA\psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial (x\psi)}{\partial x} = \frac{\hbar}{i} (\psi) + \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$AB - BA = x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \psi - \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$AB - BA = -\frac{\hbar}{i} \psi$$

$$= i\hbar \psi$$

$$A, B, A\psi, B\psi$$

$$AB - BA \neq 0$$

A ve B operatörleri aynı etki ettiğinde elde edilen değer aynı oranda aynı doğruluk ile ölçülür.

$$AB - BA \neq 0 \text{ Örneğin}$$

Momentum ve konum operatörleri

Momentum operatörü

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

A ve B iki operatör

$$AB - BA = [A, B]$$

$$[A, B] \psi = AB\psi - BA\psi$$

$$[x, p] \psi = xp\psi - px\psi = i\hbar \psi$$

1. $[x, p]$ komütatör (Comutator)

$$[x, p] \psi = xp\psi - px\psi$$

$[A, B] \psi = 0$ ise A ve B operatörlerine karşılık gelen değerler aynı anda ölçülebilir.

$[A, B] \psi \neq 0$ ise aynı anda ölçülemez.

Örnek: Aşağıdaki komütatörün değerini bulunuz.

$$A = \frac{d}{dx} \quad B = x^3$$

$$[A, B] \psi = AB\psi - BA\psi$$

$$= \frac{d}{dx} (x^3 \psi) - x^3 \frac{d}{dx} \psi$$

$$= 3x^2 \psi + x^3 \frac{d\psi}{dx} - x^3 \frac{d\psi}{dx}$$

$$[A, B] = 3x^2$$

03.07.2012

Schrödinger Dalga Denklemi

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad \Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{ikx} dk$$

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{i/\hbar (px - Et)} dp \quad p = \hbar k \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad E = \hbar\omega \quad dp = \hbar dk$$

Dalga paketinin zamana göre türevini alalım.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left(-\frac{i}{\hbar} E \right) e^{i/\hbar (px - Et)} dp \quad (*)$$

Dalga fonksiyonunun konuma göre türevini alalım.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left(\frac{i}{\hbar} p \right) e^{i/\hbar (px - Et)} dp$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left(\frac{i}{\hbar} p \right) \left(\frac{i}{\hbar} p \right) e^{i/\hbar (px - Et)} dp \quad (**)$$

$$\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) E e^{i/\hbar (px - Et)} dp \quad (***)$$

$$\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi) = E\Psi$$

Enerji Operatörü

** denkleminin her iki tarafını $-\frac{\hbar^2}{2m}$ ile çarpalım.

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \frac{p^2}{2m} e^{i/\hbar(px-Et)} dp \quad (****)$$

*** denklemi ile **** denklemleri birbirine eşittir.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \rightarrow \text{Serbest bir parçacığın Schrödinger denklemi}$$

Dalga fonksiyonunun temsil ettiği sistem hakkında tüm bilgiyi içerir.

$$\rightarrow \text{Enerji Operatörü} = -\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\rightarrow \text{Momentum Operatörü} = \hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad V: \text{potansiyel enerji}$$

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p = \hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + V \right] \Psi$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi} \quad \text{Tek boyutta Schrödinger denklemi}$$

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi} \quad \text{Üç boyutta Schrödinger denklemi}$$

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \quad \text{Kartezyen koordinat sistemi}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \text{ yerine neden } i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi \text{ tercih edildi?}$$

↓
X, p kesin bulunur.

$\Delta x, \Delta p$ gibi belirsizlikler var.
Bu yüzden ihtiyacı duyulur.

$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V$ tek boyutta Hamilton Operatörü

$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$ $H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$

$H\psi = E\psi$

$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$

$\psi(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \infty$

→ Eğer bir potansiyel kuyusundan bahsediliyorsa, potansiyel kuyusunun sınırlarında dalgı fonksiyonu sürekli olmalı (kendisi ve türevi).

$\rho = \psi^* \psi$
y yoğunluğunun zamana göre değışimi

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial x}$

→ potansiyel kutusu



Her bir noktada bulunma olasılığını toplamak = 1 olur.

Parçacığın normalize olması demek, bulunma olasılığının 1

olması demektir.



$\psi^* \psi dx = ?$ anlamı nedir?

$\psi^*(x) \psi(x) dx \rightarrow$ parçacığın x etrafında dx içinde bulunma olasılığı

$\int \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$ Dalgı fonksiyonunun normalize olması.

$\psi(x) = N \cos kx$

$\psi(x) = N \sin kx$

→ $\int \psi^* \psi dx = 1$ dalgı fonksiyonunun tüm noktalarda (bulunduğı potansiyel kuyusu) bulunma olasılığının toplamı 1'dir. Bu sonucu kullanarak dalgı fonksiyonunu normalize edecek (yani toplamını 1'e eşitleyecek) normalize edici sabitini bulabiliriz.

→ Serbest bir dalgı fonksiyonu için normalize sabiti:

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$ Serbest parçacık için dalgı fonksiyonu

→ Üç boyutlu bir potansiyel kuyusunda parçacığın normalizasyonu (bir hacim için)

$$\int_V \psi^* \psi dV$$

↳ hacim elemanı

$$\int \psi^* \psi = 1 \quad (\text{parçacığın olası tüm yoğunluğu})$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi \quad \text{Her iki tarafı dalg. fonk. kompleks eşleniği (\psi^*) ile çarpalım.}$$

$$i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi^* V \psi \quad (1)$$

↑
yük. yoğunluğu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \psi^* \psi = 0 \quad \text{yük. yoğunluğu açısından bir bağ var mı?}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V^* \psi^*$$

$$V^* = V \rightarrow \text{pot. enj.}$$

↓
pot. enj'nin kompleks eşleniği

$$i\hbar \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \psi V \psi^* \quad (2)$$

$$\rightarrow (1) - (2)$$

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \psi \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2}$$

$$\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla J = 0} \quad \text{kovulan yasası}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right]$$

$J \rightarrow$ olasılık akım yoğunluğu

$$\boxed{J = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)}$$

Beklenen Değerler

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi dx$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

x, p

$$\langle p \rangle = \int \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi dx$$



$$\psi = N \sin kx$$

Örnek:

potansiyel kuyusu



$$\psi(x) = N \sin \frac{\pi x}{L}$$

0 ile L arasındaki normalizasyon sabitini (N) bulunuz.

$$\int_0^L \psi^* \psi dx = 1$$

$$\int_0^L N^* \sin \frac{\pi x}{L} N \sin \frac{\pi x}{L} dx$$

$$|N|^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = 1$$

$$|N|^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) dx = |N|^2 \frac{L}{2} = 1$$

$$N = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi(x) = N \sin \frac{\pi x}{L}$$

Birinci enerji seviyesi için:

$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}$ verilen dalga fonksiyonu için x 'in beklenen değerini bulunuz ($\langle x \rangle = ?$)

$$\langle x \rangle = \int_0^L \psi^* x \psi dx$$

$$= \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} x \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \left(\sin^2 \frac{\pi x}{L} \right) x dx$$

$$\left(\sin^2 \frac{\pi x}{L} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right)$$

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right) x dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} (x) dx = \frac{1}{L} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^L$$

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{L}{2}}$$



$\langle x \rangle = \frac{L}{2}$ max. olasılıkla bulunabileceği yer. Genelde Δx kadar belirsizlik olarak

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

09.07.2012

Alıştırma 3.4: Bir parçacığın dalga fonksiyonu $\psi(x) = e^{-|x|} \sin ax$ olarak veriliyor.

a) Bu dalga fonksiyonunu normlayın.

b) Parçacığın konumunun $x=1$ den daha ötede bulunma olasılığını hesaplayın.

a) $|x|$ mutlak değeri $[-\infty, 0]$ aralığında $-x$, ve $[0, \infty]$ aralığında x olarak yazılabilir

$$\psi(x) = e^{-|x|} \sin ax$$

$$2 \int_0^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

$$2N^2 \int_0^{\infty} e^{-|x|} \sin^2 ax dx$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx &= \int_{-\infty}^{\infty} N^* e^{-|x|} \sin ax \, N e^{-|x|} \sin ax \, dx \\
 &= N^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|} \sin^2 ax \, dx = N^2 \int_{-\infty}^0 e^{2x} \sin^2 ax \, dx + N^2 \int_0^{\infty} e^{-2x} \sin^2 ax \, dx \\
 &= 2N^2 \int_0^{\infty} e^{-2x} \sin^2 ax \, dx \\
 &\quad \frac{a^2}{2(1+a^2)}
 \end{aligned}$$

$$N^2 \frac{a^2}{2(1+a^2)} = 1 \rightarrow N = \sqrt{\frac{2(1+a^2)}{a^2}} = \frac{\sqrt{2(1+a^2)}}{a}$$

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{2(1+a^2)}}{a} e^{-|x|} \sin ax$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2(1+a^2)}}{a} e^{-x} \sin ax \, \frac{\sqrt{2(1+a^2)}}{a} e^{-x} \sin ax \, dx \\
 &= \frac{2(1+a^2)}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} \sin^2 ax \, dx = \frac{e^{-1}}{2a^2} [1+a^2 \cos 2a + a \sin 2a]
 \end{aligned}$$

Aıştırma 3.5: $[-a, +a]$ aralığında tanımlanan bir dalga fonksiyonu $\psi(x) = (a^2 - x^2)$ olarak veriliyor.

a) Bu dalga fonksiyonunu normlayın.

b) Parçacığın $[0, a/2]$ aralığında bulunma olasılığını hesaplayın.

c) Konum, momentum ve kinetik enerjinin beklenen değerlerini bulun.

d) $\Delta x \Delta p$ belirsizlik çarpımını hesaplayın.

$$\text{a) } \psi = N(a^2 - x^2)$$

$$\int_{-a}^a \psi^* \psi dx = 1 \rightarrow \int_{-a}^a N^*(a^2 - x^2) N(a^2 - x^2) dx = 1$$

$$N^2 \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx = N^2 \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx + N^2 \int_0^a (a^2 - x^2)^2 dx$$

$$2N^2 \int_0^a (a^2 - x^2)^2 dx = 2N^2 \left[\int_0^a (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) dx \right]$$

$$2N^2 \left[a^5 - \frac{2}{3} a^5 + \frac{a^5}{5} \right] = N^2 \frac{16a^5}{15} \rightarrow N = \sqrt{\frac{15}{16a^5}}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{15}{16a^5}} (a^2 - x^2)$$

$$\begin{aligned}
 b) \int_0^{a/2} \psi^* \psi dx &= \int_0^{a/2} \left| \frac{15}{\sqrt{16a^5}} (a^2 - x^2) \right| \frac{15}{\sqrt{16a^5}} (a^2 - x^2) dx \\
 &= \frac{15}{16a^5} \int_0^{a/2} (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{15}{16a^5} \int_0^{a/2} (a^4 - 2a^2x^2 + x^4) dx \\
 &= \frac{15}{16a^5} \left(a^4x - 2a^2 \left(\frac{x^3}{3} \right) + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^{a/2} = \frac{15}{16a^5} \left(\frac{a^5}{2} - \frac{2a^5}{3 \cdot 8} + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{2} \right)^5 \right) \\
 &= 0,4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \langle x \rangle &= \int_{-a}^a \underbrace{\frac{15}{\sqrt{16a^5}} (a^2 - x^2)}_{\text{left funkt}} x \underbrace{\frac{15}{\sqrt{16a^5}} (a^2 - x^2)}_{\text{right funkt}} dx \\
 &= \int (\text{left funkt}) (\text{right funkt}) dx = 0
 \end{aligned}$$

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle p \rangle = \int_{-a}^a \frac{15}{\sqrt{16a^5}} (a^2 - x^2) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{15}{\sqrt{16a^5}} (a^2 - x^2) \right) dx = 0$$

$$K.E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned}
 \langle K.E \rangle &= \int_{-a}^a \frac{15}{\sqrt{16a^5}} (a^2 - x^2) \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} N(a^2 - x^2) dx \\
 &= \frac{15}{16a^5} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) \left(\frac{\hbar^2}{m} \right) dx = \frac{15\hbar^2}{16a^5 m} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{15\hbar^2}{16ma^5} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a \\
 &= \frac{15\hbar^2}{16ma^5} (a^2(a - (-a)) - \frac{1}{3}(a^3 + a^3)) \\
 &= \frac{15\hbar^2}{16a^5 m} \left(2a^3 - \frac{2}{3}a^3 \right) = \frac{5\hbar^2}{4ma^5}
 \end{aligned}$$

$$d) \Delta x \Delta p = ?$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$$

$$\langle \hbar \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{5\hbar^2}{4ma^5} \quad \langle p^2 \rangle = \frac{5\hbar^2}{2a^5}$$

$$\rightarrow \langle p^2 \rangle = \int \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi dx$$

$$\langle x^2 \rangle = \int \psi^* x^2 \psi dx = \int \sqrt{\frac{15}{16a^5}} (a^2 - x^2) x^2 \sqrt{\frac{15}{16a^5}} (a^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{15}{16a^5} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 x^2 dx = \frac{a^2}{7} = \langle x^2 \rangle$$

$$\Delta x \Delta p = \sqrt{\frac{a^2}{7}} \cdot \sqrt{\frac{5 \hbar^2}{2 a^2}} = \sqrt{\frac{5}{14}} \hbar \approx 0,6 \hbar > \frac{\hbar}{2}$$

Momentum Uzayı

$$* \phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dx \quad \text{Gentilek Dağılım Fonksiyonu}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(p)^* \phi(p) \frac{dp}{2\pi\hbar} \stackrel{?}{=} 1 \quad \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dp \quad \psi^* = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dx \frac{dp}{2\pi\hbar}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\phi^*(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} \frac{dp}{2\pi\hbar} \right) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$\rightarrow \phi(p)$ normalize bir fonksiyondur.

** Gentilek dağılım fonksiyonunun normalize olduğunu gösteriniz.

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) p \phi(p) \frac{dp}{2\pi\hbar}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dp \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \frac{i}{\hbar} p e^{\frac{i}{\hbar} p x} \frac{dp}{2\pi\hbar} dx$$

$$\phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dx, \quad \phi^*(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) e^{-\frac{i}{\hbar} p x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* e^{\frac{i}{\hbar} p x} dx \right] p \frac{dp}{2\pi\hbar} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) \phi(p) \frac{dp}{2\pi\hbar}$$

$$\phi^*(p)$$

→ Momentum uzayında $\langle x \rangle$ yacınıc.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x \Psi(x) dx$$

x 'in momentum uzayında operatör olarak yacılıpı ile bulacagız.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{\frac{i}{\hbar} px} \frac{dp}{2\pi\hbar} \right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \left[x e^{\frac{i}{\hbar} px} \phi(p) \frac{dp}{2\pi\hbar} \right] dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} px} \phi(p) \frac{dp}{2\pi\hbar} dx$$

$$\phi^*(p) \rightarrow \phi(p) \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} (e^{\frac{i}{\hbar} px}) = \frac{i}{\hbar} x e^{\frac{i}{\hbar} px}$$

$$x e^{\frac{i}{\hbar} px} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} (e^{\frac{i}{\hbar} px})$$

$$\phi^*(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) e^{\frac{i}{\hbar} px} dx$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi(p) \frac{dp}{2\pi\hbar}$$

$\downarrow$
x operatörü

Zamandan Bağımsız Schrödinger Dalgı Denklemleri

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

$$\Psi(x,t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)} = A e^{\frac{i}{\hbar} px} e^{-\frac{i}{\hbar} Et}$$

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) f(t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial (\Psi(x) f(t))}{\partial t} = \Psi(x) i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Psi(x) f(t)) + V \Psi(x) f(t) = f(t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right) + V \Psi(x) f(t)$$

$$\left(\frac{1}{\Psi(x) f(t)} \right) / i\hbar \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right) f(t) + V \Psi(x) f(t)$$

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{1}{\Psi(x)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) + V$$

zamana bağılı x'e bağılı

$$i\hbar \frac{1}{f(t)} \frac{\partial f(t)}{\partial t} = E \rightarrow \frac{1}{\Psi(x)} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} \right) + V = E$$

$$\int \frac{df(t)}{f(t)} = \int \frac{1}{i\hbar} E dt, \ln f(t) = \frac{1}{i\hbar} Et$$

$$f(t) = A e^{-\frac{i}{\hbar} E t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + V \Psi(x) = E \Psi(x)$$

Zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

Örnek: Serbest parçacık

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E \Psi$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m E \Psi}{\hbar^2} = 0 \quad \Psi = e^{mx}$$

$$(m^2 \Psi + k^2 \Psi) = 0 \rightarrow (m^2 + k^2) \Psi = 0$$

$$(m^2 + k^2) = 0 \quad m^2 = -k^2 \text{ (olamaz)}$$

$$(m + ik)(m - ik) = 0$$

$$\Psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \text{Serbest bir parçacığın düzlem dalga fonksiyonu}$$

Serbest parçacık için Schrödinger denklemini ele aldığımızda düzlem dalgayı elde ederiz.

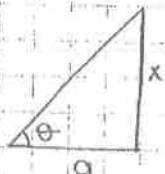
Problem 3.2: Tek boyutlu uzayda bir parçacığın dalga fonksiyonu

$$\Psi(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2 + a^2}} e^{ip_0 x / \hbar} \text{ olarak veriliyor.}$$

a) Dalga fonksiyonunu normalize A sabitini bulun

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A^* \frac{e^{-ip_0 x / \hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}} A \frac{e^{ip_0 x / \hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)} dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = A^2 \frac{\pi}{a} = 1 \rightarrow A = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$$



$$\tan \theta = \frac{x}{a}$$

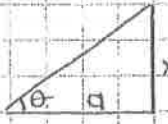
$$x = a \tan \theta \quad x \rightarrow \infty \quad \theta = -\pi/2$$

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta \quad x \rightarrow \infty \quad \theta = \pi/2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{d \sec^2 \theta d\theta}{(a^2 \tan^2 \theta + a^2)} = \frac{a}{a^2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{a}$$

b) Paraseçginin x konumu okuldüğünde $[-a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}]$ aralığında bulunma

olabilirliği nedir?

$$\begin{aligned} \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \psi^* \psi dx &= \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \left| \frac{a'}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right| \frac{a'}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}}{(x^2 + a^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{a}{\pi} \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2 + a^2)} \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{x}{a} & (x^2 + a^2) &= a^2 (\tan^2 \theta + 1) \\ & & &= a^2 \sec^2 \theta \\ x &= a \tan \theta & dx &= a \sec^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^2 \sec^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\theta = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$x = a \tan \theta \quad \frac{a}{\sqrt{3}} = a \tan \theta \quad \theta = \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = a \tan \theta \quad \theta = \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

c) Momentumun beklenen değerini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \left| \frac{a'}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right| \frac{a'}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}}{(x^2 + a^2)^{1/2}} dx \quad x + a^2 = u^2 \quad dx dx = du du \\ &= \frac{a}{\pi} \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \frac{udu}{u^2} = \frac{a}{\pi} \ln u \Big|_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} = \frac{a}{\pi} \ln(\sqrt{x^2 + a^2}) \Big|_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \\ &= \frac{a}{\pi} [\ln(a^2/3 + a^2) - \ln(a^2/3 + a^2)] = 0 \end{aligned}$$

Momentumun beklenen değeri

$$\langle p \rangle = \int_{-a/\sqrt{3}}^{a/\sqrt{3}} \left| \frac{a'}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right| \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \phi(p) e^{\frac{i}{\hbar} p x} dp \\ \phi(p) &= \int \psi(x) \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} p x} dx \end{aligned}$$

$$\langle p \rangle = \int \phi^*(p) p \phi(p) dp$$

$$\phi(p) =$$

Problem 3.4: Bir parçacığın momentum dağılımı fonksiyonu $\phi(p) = \sqrt{\frac{2\pi a}{h}} e^{-\frac{a}{h}|p|}$ olarak veriliyor.

a) Dalga fonksiyonunun $\psi(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \frac{2a}{x^2 + a^2}$ olduğunu gösteriniz.

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(p) e^{\frac{i}{h} p x} \frac{dp}{2\pi h}$$

$$= \frac{a}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi a}{h}} e^{-\frac{a}{h}|p|} e^{\frac{i}{h} p x} dp$$

$$\psi(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \frac{1}{h} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\frac{a}{h} p} e^{\frac{i}{h} p x} dp + \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{h} p} e^{\frac{i}{h} p x} dp \right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \frac{1}{h} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{\frac{p}{h}(a+ix)} dp + \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{h}(a-ix)} dp \right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{a+ix/h} e^{\frac{p}{h}(a+ix)} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{(-a+ix/h)} e^{-\frac{p}{h}(a-ix)} \Big|_0^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{a+ix} (1-0) + \frac{h}{-a+ix} (0-1) \right)$$

$$\psi(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \frac{1}{h} \left(\frac{h}{a+ix} - \frac{h}{-a+ix} \right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \frac{1}{h} \left\{ \frac{h((-a+ix) - (a+ix))}{-a^2 + a^2 ix - a^2 ix - x^2} \right\}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi h}} \left(\frac{2a}{(a^2 + x^2)} \right)$$

b) Momentum ve enerjinin beklenen değerini bulun.

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) p \phi(p) \frac{dp}{2\pi h}$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) dx$$

$$\langle K \rangle = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) p^2 \phi(p) \frac{dp}{2\pi h}$$

$$\langle K \rangle = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(p) p^2 \phi(p) \frac{dp}{2\pi h}$$

$$= \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi a}{h}} e^{-\frac{a}{h}|p|} p^2 \sqrt{\frac{2\pi a}{h}} e^{-\frac{a}{h}|p|} \frac{dp}{2\pi h}$$

$$= \left[\frac{1}{2m} \frac{2\pi\alpha}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\alpha}{\hbar}|p|} p^2 dp = \frac{\pi}{m} \frac{\alpha}{\hbar} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{2\alpha}{\hbar}p} dp + \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\alpha}{\hbar}p} p^2 dp \right) \right] \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$\langle K \rangle = \frac{\pi}{m} \frac{\alpha}{\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \left[2 \int_0^{\infty} p^2 e^{-\frac{2\alpha}{\hbar}p} dp \right]$$

Özel integral $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ Burada a bir sabit

$$\langle K \rangle = \frac{\alpha}{2m\hbar^2} \frac{2 \cdot 2!}{(2\alpha/\hbar)^3} = \frac{2\alpha\hbar^2}{m\hbar^2 \alpha^3} = \frac{\hbar}{4m\alpha^2}$$

$$\boxed{\langle K \rangle = \frac{\hbar}{4m\alpha^2}}$$

Operatörler $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ $x \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$

Problem 3.11: Ehrenfest Teoremleri.

$$\hat{H} = -\left(\frac{\hbar}{2m}\right) \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \text{ hamiltonyen operatörü için}$$

a) $[\hat{H}, x] = -i\hbar \frac{p}{m}$ olduğunu gösteriniz.

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x \right] = \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] + \cancel{[V(x), x]}^0$$

$$\left[\frac{p^2}{2m}, x \right] = \frac{1}{2m} [p^2, x] = \frac{1}{2m} \{ p[p, x] + [p, x]p \}$$

$$\left[\frac{p^2}{2m}, x \right] \psi = \frac{1}{2m} (p^2 x \psi - x p^2 \psi)$$

$$[H, x] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x \right]$$

$$= \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] = \frac{1}{2m} \{ p[p, x] + [p, x]p \}$$

$$[p, x] \psi = p x \psi - x p \psi$$

$$= \hbar \frac{\partial}{\partial x} (x \psi) - x \hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$= \frac{\hbar}{i} \psi + \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$[H, x] = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{p\hbar}{i} + \frac{\hbar}{i} p \right\}$$

$$[H, x] = \frac{2p\hbar}{2mi} = \frac{\hbar}{im} p = \frac{\hbar}{i} \frac{p}{m}$$

$$\boxed{[H, x] = -i\hbar \frac{p}{m}}$$

2. yol: $[H, x] = \left[\frac{p^2}{2m}, x \right]$

$$\left[\frac{p^2}{2m}, x \right] \psi = \frac{1}{2m} (p^2 x \psi - x p^2 \psi)$$

$$= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} x \psi \right) - x \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

$$\left[\frac{p^2}{2m}, x \right] = \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\hbar}{i} \psi + \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - x \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\hbar}{i} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\hbar}{i} \frac{\hbar}{i} x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - x \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \frac{\hbar}{i}$$

$$\boxed{\left[\frac{p^2}{2m}, x \right] = \frac{2p}{2m} \frac{\hbar}{i} = -i\hbar \frac{p}{m}}$$

b) $[\hat{H}, p] = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x}$ olduğunu gösteriniz.

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(x), p \right] = \left[\frac{p^2}{2m}, p \right] + [V(x), p] = [V(x), p]$$

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$[V(x), p] \psi = V(x) p \psi - p V(x) \psi$$

$$= V(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} (V(x) \psi)$$

$$= \cancel{V(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x}} - \left[\frac{\hbar}{i} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi + \cancel{\frac{\hbar}{i} V(x) \frac{\partial \psi}{\partial x}} \right]$$

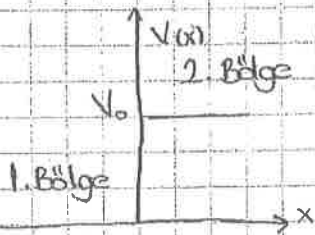
$$[V(x), P]\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} V(x)\psi$$

$$[V(x), P] = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} V(x)$$

Tel. Bıyıklı Potansiyel Kuyusu

23.07.2012

Birimlik Potansiyeli



$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad H\psi = E\psi$$

1. Bölge

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} E}_{k^2} \psi = 0 \rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$$

$$\psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

2. Bölge

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0 \psi = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}_{k'^2} \psi = 0 \rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + k'^2 \psi = 0$$

$$\psi = C e^{ik'x}$$

1. Bölgede $\psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

2. Bölgede $\psi = C e^{ik'x}$

Dalga fonksiyonunun kendisi ve birinci türevi $x=0$ (sınırda) sürekli.

Dalga fonksiyonu $x=0$ (sınırda) } $Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \Big|_{x=0} = Ce^{ikx} \Big|_{x=0}$
 sürekliliği } $A+B=C$

$$ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx} \Big|_{x=0} = ikCe^{ikx} \Big|_{x=0}$$

$$ikA - ikB = ikC$$

$$L(A-B) = L'C$$

2. Bölge: $A+B=C$

$$L(A-B) = L'C$$

$$L(A-B) = L'(A+B)$$

$$(L-L')A = (L+L')B \rightarrow B = \frac{L-L'}{L+L'} A$$

$$LA - LB = L'C$$

$$LA - L \left(\frac{L-L'}{L+L'} \right) A = L'C$$

$$\frac{(L+L')LA - L(L-L')A}{L+L'} = L'C$$

$$\frac{L'L A + L^2 A - L^2 A + L L' A}{L+L'} = L'C$$

$$\frac{2L L' A}{L+L'} = L'C \rightarrow C = \frac{2L}{L+L'} A$$



$$J = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right]$$

$$J_{\text{geçen}} - J_{\text{yansayan}} = J_{\text{geçen}}$$

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = \psi$$

$$\psi_{\text{geçen}} = Ae^{ikx}$$

$$J_{\text{geçen}} = \frac{i\hbar}{2m} (Ae^{ikx} A^* (-ik) e^{-ikx} - A^* e^{-ikx} (ik) A e^{ikx})$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} (|A|^2 (-ik) - ik |A|^2) = \frac{\hbar k |A|^2}{m} = v_{\text{geçen}} |A|^2$$

$$\psi_{yonayon} = B e^{-ikx}$$

$$J_{yonayon} = \frac{i\hbar}{2m} [B e^{-ikx} (ik) B^* e^{ikx} - B^* e^{ikx} (-ik) B e^{-ikx}]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} (2|B|^2 ik)$$

$$J_{yonayon} = \frac{\hbar k}{m} |B|^2$$

$$R = \frac{J_{yonayon}}{J_{geken}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad T = \frac{J_{geken}}{J_{geken}}$$

$$\psi_{geken} = C e^{ik'x}$$

$$J_{geken} = \frac{i\hbar}{2m} [C e^{ik'x} C^* (-ik') e^{-ik'x} - C^* e^{-ik'x} (ik') C e^{ik'x}]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} [2|C|^2 (-ik')] = \frac{\hbar k'}{m} |C|^2$$

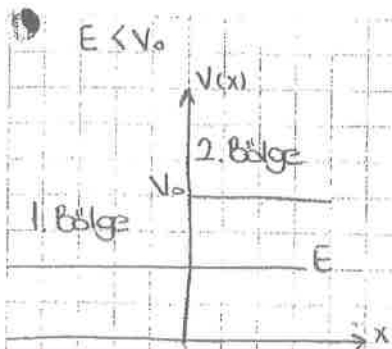
$$T = \frac{\frac{\hbar k'}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = \frac{k'}{k} \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

$$\text{Yansıma Katsayısı } R = \frac{\left| \frac{(k-k')}{(k+k')} \right|^2 |A|^2}{|A|^2} = \frac{k'^2 + k^2 - 2kk'}{(k+k')^2}$$

$$R = \frac{\frac{\hbar k}{m} |B|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

$$T = \frac{\frac{\hbar k'}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = \frac{k'}{k} \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{k' \left(\frac{2k}{k'+k} \right)^2 |A|^2}{k |A|^2}$$

$$T = \frac{4k^2 k'}{k (k'+k)^2}$$



1. Bölge:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \rightarrow \psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

2. Bölge:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}_{-\alpha^2} \psi = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

$$\psi = Ce^{\alpha x} + De^{-\alpha x}$$

$$\psi = e^{\alpha x}$$

$$m^2\psi = \alpha^2\psi = 0$$

$$m^2 = \alpha^2 \rightarrow m = \pm \alpha$$

$\psi = De^{-\alpha x}$ olmak zorunda aksi takdirde tanımsızdır.

1. Bölgede $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

2. Bölgede $\psi = De^{-\alpha x}$

$$Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \Big|_{x=0} = De^{-\alpha x} \Big|_{x=0}$$

$$A + B = D$$

$$ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx} \Big|_{x=0} = -\alpha De^{-\alpha x} \Big|_{x=0}$$

$$ik(A - B) = -\alpha D$$

$$ik(A - B) = -\alpha(A + B)$$

$$(A - B) = \frac{-\alpha}{ik} (A + B)$$

$$\left(A + \frac{\alpha A}{ik} \right) = \frac{-\alpha B + B}{ik}$$

$$A \left(1 + \frac{\alpha}{ik} \right) = B \left(1 - \frac{\alpha}{ik} \right)$$

$$A \left(\frac{ik + \alpha}{ik} \right) = B \left(\frac{ik - \alpha}{ik} \right) \Rightarrow \boxed{B = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} A}$$

$$A - B = \frac{-\alpha D}{ik}$$

$$A - \left(\frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \right) A = \frac{-\alpha D}{ik}$$

$$\frac{A(ik - \alpha) - (ik + \alpha)A}{(ik - \alpha)} = \frac{-\alpha D}{ik}$$

$$\frac{A \cancel{ik} - A\alpha - i\cancel{k}A - \alpha A}{ik - \alpha} = \frac{-\alpha D}{ik}$$

$$\frac{-2A\alpha}{ik - \alpha} = \frac{-\alpha D}{ik} \Rightarrow \boxed{D = \frac{2ik}{ik - \alpha} A}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ De^{-\alpha x} \end{cases}$$

$$D = \frac{2ik}{ik - \alpha} A = \frac{2kA}{(ik - \alpha)(-i)} = \frac{2kA}{i(-ik + \alpha)} = \frac{2kA}{k + i\alpha}$$

$$R = \frac{J_{\text{yonayon}}}{J_{\text{geçen}}} = \frac{\frac{\hbar k}{m} |B|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{|A|^2}{|A|^2} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$$J_{\text{yonayon}} = \frac{i\hbar}{2m} \left[\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right]$$

$$\psi_{\text{geçen}} = Ae^{ikx}$$

$$\psi_{\text{yonayon}} = Be^{-ikx}$$

$$\psi_{\text{geçen}} = De^{-\alpha x}$$

$$J_{\text{geçen}} = \frac{i\hbar}{2m} (De^{-\alpha x} D^* (-\alpha) e^{\alpha x} - D^* e^{\alpha x} (-\alpha) De^{-\alpha x})$$

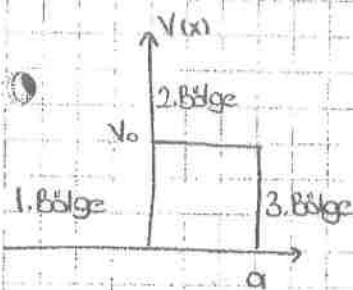
$$= \frac{i\hbar}{2m} |D|^2 (\cancel{e^{-2\alpha x}} (-\alpha) + \alpha \cancel{e^{-2\alpha x}}) = 0$$

$$B = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} A$$

$$B^2 = B^* B = |B|^2 = \frac{-ik + \alpha}{-ik - \alpha} A^* \left(\frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \right) A = \frac{k^2 + \alpha^2}{k^2 + \alpha^2} |A|^2$$

$$T = \frac{\frac{\hbar k}{m} |C|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = \frac{J_{geçen}}{J_{gele}} = \frac{0}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2} = 0$$

Ergel fotoniçeli



1. ve 3. Bölge

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

$$1. \text{ Bölge } \psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi = 0$$

$$3. \text{ Bölge } \psi = F e^{ikx}$$

2. Bölge

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V_0 \psi = E \psi$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \psi = 0$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \quad \psi = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$$

$$R = \frac{J_{yansın}}{J_{gele}} = \frac{\frac{\hbar k}{m} |B|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2}$$

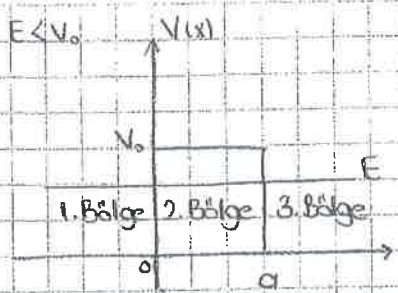
$$T = \frac{J_{geçen}}{J_{gele}} = \frac{\frac{\hbar k}{m} |F|^2}{\frac{\hbar k}{m} |A|^2}$$

$$\psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad 1. \text{ Bölge}$$

$$\psi_3 = F e^{ikx} \quad 3. \text{ Bölge}$$

A, B, C, D, E, F katsayılarını A cinsinden bulabilmek için $x=0$ ve $x=a$ dalg

fonksiyonunun kendisinin ve birinci türevinin sürekliliğinden faydalanılır.



1. ve 3. Bölge

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

1. Bölge $\psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

3. Bölge $\psi_3 = F e^{ikx}$

2. Bölge

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi = 0$$

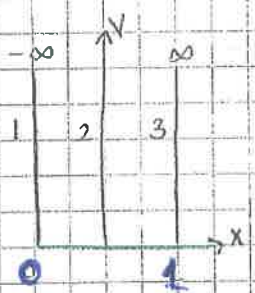
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$$

$$\psi_2 = C e^{-\alpha x} + D e^{\alpha x}$$

Sonuç Kuyu Potansiyeli

24.07.2012



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

$$\psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\psi = a \cos kx + b \sin kx$$

Süreklilik Koşulu:

$x=0$ de süreklilik koşulu

$$\psi(x=0) = a \cos kx + b \sin kx \Big|_{x=0} = 0$$

$$= a \cos kx_0 + \underbrace{b \sin kx_0}_0 = 0$$

$a=0$ $\psi = b \sin kx$

• $x=L$ için

$$\psi(x=L) = b \sin kL = 0$$

$$kL = n\pi \rightarrow k = \frac{n\pi}{L} \quad n=0,1 \text{ (} k \text{ değerleri)} \\ \text{sürekli olmayıp kesiktir.}$$

$$\psi = b \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{2m}{\hbar^2} E \rightarrow E = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

$$n=1 \text{ için } E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL}$$

$$\int_0^L \psi^* \psi dx = 1$$

$$\int_0^L b^* \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot b \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$|b|^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx = 1$$

$$|b|^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) dx = 1$$

$$|b|^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow b = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

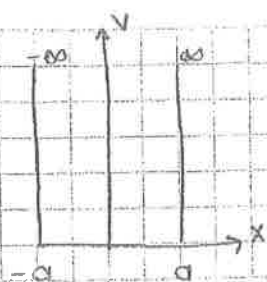
$$\psi = b \sin \frac{n\pi}{L} x = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\int_0^L \psi^* \psi dx = 1$$

$$\int_0^L \left(b^* \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \left(b \sin \frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

$$= |b|^2 \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi}{L} x dx = 1$$

$$= |b|^2 \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{L} x \right) dx$$



$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} E}_{k^2} \psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

$$\psi = A\cos kx + B\sin kx$$

$$\psi(x=a) = 0$$

$$A\cos ka + B\sin ka = 0$$

$$A=0 \quad B \neq 0$$

$$ka = \frac{n\pi}{2} \quad n=0, 2, 4, \dots$$

$$k = \frac{n\pi}{2a} \quad n=0, 2, 4, 6 \quad \text{Tel Gözümeler için}$$

$$A\cos ka + B\sin ka = 0$$

$$B=0 \text{ ise } A \neq 0$$

$$\cos ka = \frac{ka = n\pi}{2} \quad n=1, 3, 5, \dots$$

$$k = \frac{n\pi}{2a} \quad n=1, 3, 5, 7, \dots$$

$$\psi_{\text{cift}} = A\cos \frac{n\pi}{2a} x \quad n=1, 3, 5, 7$$

$$\psi_{\text{tek}} = B\sin \frac{n\pi}{2a} x \quad n=0, 2, 4, \dots$$

$$k = \frac{n\pi}{2a} \quad n=0, 1$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{4a^2}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

$$\psi_{\text{gitt}} = A \cos \frac{n\pi}{2a} x \quad n=1,3,5,7, \dots$$

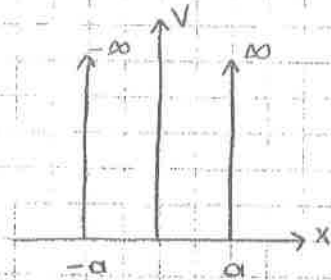
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(A^* \cos \frac{n\pi}{2a} x \right) \left(A \cos \frac{n\pi}{2a} x \right) dx = 1$$

$$= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \frac{n\pi}{2a} x dx = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{n\pi}{a} x \right) dx$$

$$= |A|^2 \frac{1}{2} (2a) = 1 \rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{1}{a}}} \quad \text{benzer şekilde} \quad \boxed{B = \sqrt{\frac{1}{a}}}$$

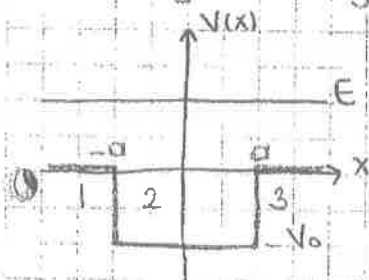
① Sıfıra Göre Simetrik Sonuç Potansiyel Kuyusu



$$\psi_{\text{gitt}}(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \cos \frac{n\pi}{2a} x$$

$$\psi_{\text{tek}}(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi}{2a} x \quad n=0,2,4,6$$

Kare Kuyu Potansiyeli



$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a < x < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$E > 0$

1. ve 3. Bölgeler için Schrödinger Denklemi

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E \psi$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m E}{\hbar^2}}_{k^2} \psi = 0$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0$$

$$\psi_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\psi_3 = F e^{ikx}$$

2. Bølge:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + |V_0| \psi = E \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - |V_0|) \psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E + V_0) \psi = 0$$

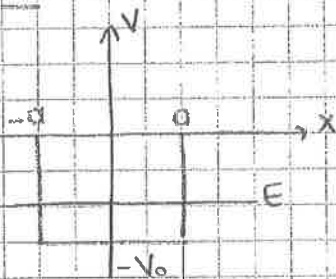
$$\downarrow k^2$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \quad \psi_2 = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$$

$$R = \frac{J_{\text{reflektiert}}}{J_{\text{geht}} = \frac{\hbar k/m |B|^2}{\hbar k/m |A|^2}}$$

$$T = \frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{geht}} = \frac{\hbar k/m |F|^2}{\hbar k/m |A|^2}}$$

$E < 0$



1. und 3. Bølge:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = |E| \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} |E| \psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (-E) \psi = 0 \quad \alpha^2 = \frac{2m E}{\hbar^2}$$

$$\downarrow -\alpha^2$$

$$\psi_1 = A e^{-\alpha x} + B e^{\alpha x} \quad (1. \text{ Bølge})$$

$$A = 0 \quad \psi_1 = B e^{\alpha x}$$

$$\psi_3 = Fe^{-\alpha x} + De^{\alpha x} \quad (3. \text{ Bölge})$$

$$D=0 \quad \psi_3 = Fe^{-\alpha x} \quad x \rightarrow \infty \text{ için } A \vee D=0$$

2. Bölge:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + |V_0| \psi = |E| \psi$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \{ |E| - |V_0| \} \psi = 0$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (-E + V_0)}_{k^2} \psi = 0$$

$$\psi_2 = a \cos k'x + b \sin k'x$$

$$\rightarrow \psi_1 = Be^{\alpha x}$$

$$\psi_2 = a \cos k'x + b \sin k'x$$

$$\psi_3 = Fe^{-\alpha x}$$

Potansiyel simetrik olduğundan çift çözümlerin sürekliliği

$$a \cos k'x \Big|_{x=a} = Fe^{-\alpha x} \Big|_{x=a}$$

$$a \cos k'a = Fe^{-\alpha a}$$

$$+ak' \sin k'a = +\alpha Fe^{-\alpha a}$$

$$\frac{ak' \sin k'a}{a \cos k'a} = \frac{\alpha Fe^{-\alpha a}}{Fe^{-\alpha a}} \rightarrow \boxed{k' \tan k'a = \alpha}$$

$$\psi_{\text{tek}} = b \sin \frac{n\pi x}{2a} \quad n=0,2,4,\dots$$

$x=a$ 'da tek çözümlerin süreklilik şartı

$$b \sin k'x \Big|_{x=a} = Fe^{-\alpha x} \Big|_{x=a}$$

$$b \sin k'a = Fe^{-\alpha a}$$

$$k' b \cos k'a = -\alpha Fe^{-\alpha a}$$

$$\frac{k' b \cos k' a}{b \sin k' a} = -\alpha \frac{E_0}{E} \frac{a}{a}$$

$$k' \cot k' a = -\alpha$$

$$k' a = u \quad V = \alpha a$$

$$k' a \tan k' a = \alpha a$$

$$① u \tan u = V$$

$$k' a \cot k' a = -\alpha a$$

$$② u \cot u = -V$$

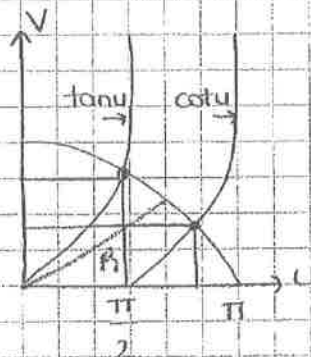
$$k'^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$\alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k'^2 + \alpha^2 a^2 = \frac{2m V_0 a^2}{\hbar^2}$$

$$u^2 + V^2 = \frac{2m V_0 a^2}{\hbar^2} = R^2$$

$$R = \sqrt{u^2 + V^2}$$



1. R değeri ne kadar küçük olursa olsun en az bir çözümü vardır.

2. Tek çözümlükler $R > \pi$ ise tek çözümler ortaya çıkar.

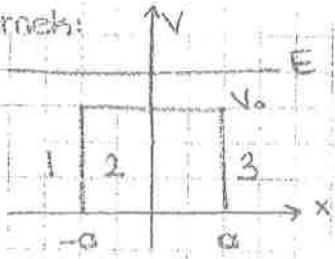
3. $R \rightarrow \infty$ $R = \sqrt{u^2 + V^2}$

$$= \frac{2m(V_0 - E)a^2}{\hbar^2} + \frac{2mEa^2}{\hbar^2} = \frac{2m V_0 a^2}{\hbar^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{2m V_0 a^2}{\hbar^2}}$$

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2m(2a)^2}$$

Örnek:



a) 1, 2 ve 3. bölgelerdeki Schrödinger dalgı fonksiyonlarını yazalım.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad \text{Potansiyel sıfır}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$$

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (1. \text{ Bölge})$$

$$\psi_3 = Fe^{ikx} \quad (3. \text{ Bölge})$$

2. Bölge:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi = 0$$

$$\underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}_{\alpha^2}$$

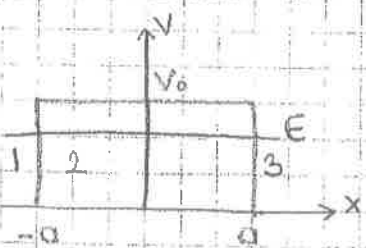
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha^2\psi = 0 \quad \psi_2 = C \cos \alpha x + D \sin \alpha x$$

b) Gelen dalganın olasılık akım yoğunluğunu bulunuz.

$$\psi_{\text{gelen}} = Ae^{ikx}$$

$$J = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$$

Örnek: $E < V_0$



1. ve 3. Bölge: Çözüm aynı

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$$

2. Bölge:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \psi_3 = Fe^{ikx}$$

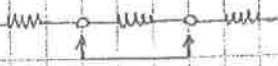
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)$$

$$\underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}_{-\alpha^2}$$

$$\psi_2 = Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x}$$

4.5 Harmonik Salıncı



$$H\psi = E\psi$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad U = \frac{1}{2} kx^2 \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ k = \omega^2 m$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Tek Boyutlu Bir Harmonik Salıncının Schrödinger Denlemi

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \quad \text{Sistemi (denlemi) birimless hale getirelim.}$$

1.) Birimless bir parametre seçelim.

$$g = \alpha x \quad x = \frac{g}{\alpha}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dg^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{g^2}{\alpha^2} \psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dg^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \frac{g^2}{\alpha^2} \psi = \frac{2m}{\hbar^2} E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dg^2} + \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \frac{g^2}{\alpha^4} \psi = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} E \right) \psi$$

$$\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^4} = 1 \quad \alpha^4 = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{m\omega}{\hbar} \rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha^2} E = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{\frac{m\omega}{\hbar}} E$$

$$\lambda = 2 \frac{E}{\hbar\omega}$$

$$\frac{d^2\psi}{dg^2} + g^2 \psi = \lambda \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dg^2} + (\lambda - g^2) \psi = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi = E\psi$$

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} x^2}_{1/m^2} \psi = \frac{2mE\psi}{\hbar^2}$$

$$\left(\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \right) (x^2)$$

$$\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} = \frac{1}{m^4} m^2$$

$$\frac{d^2\psi}{dg^2} + (\lambda - g^2)\psi = 0$$

$$g \rightarrow \infty \quad \psi = e^{-\frac{g^2}{2}} u$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dg} \left(e^{-\frac{g^2}{2}} u \right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} (-g) e^{-\frac{g^2}{2}} u + e^{-\frac{g^2}{2}} \frac{du}{dg}$$

$$\frac{d\psi}{dg} = -g e^{-\frac{g^2}{2}} u + e^{-\frac{g^2}{2}} \frac{du}{dg}$$

$$\frac{d^2\psi}{dg^2} = \left(e^{-\frac{g^2}{2}} u \right) \left(g e^{-\frac{g^2}{2}} (-g) u \right) - \left(g e^{-\frac{g^2}{2}} \frac{du}{dg} \right) + (-g) e^{-\frac{g^2}{2}} \frac{du}{dg} + e^{-\frac{g^2}{2}} \frac{d^2u}{dg^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dg^2} = u(g^2-1)e^{-\frac{g^2}{2}} - 2g e^{-\frac{g^2}{2}} \frac{du}{dg} + \frac{d^2u}{dg^2} e^{-\frac{g^2}{2}}$$

$$u(g^2-1)e^{-\frac{g^2}{2}} - 2g \frac{du}{dg} e^{-\frac{g^2}{2}} + \frac{d^2u}{dg^2} e^{-\frac{g^2}{2}} + (\lambda - g^2) e^{-\frac{g^2}{2}} \psi = 0$$

$$\frac{d^2u}{dg^2} - 2g \frac{du}{dg} + (\lambda - 1)u = 0$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} C_m g^m$$

$$\frac{du}{dg} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m m g^{m-1}$$

$$\frac{d^2u}{dg^2} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m m(m-1) g^{m-2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m m(m-1) g^{m-2} - 2g \sum_{m=0}^{\infty} C_m m g^{m-1} + (\lambda - 1) \sum_{m=0}^{\infty} C_m g^m = 0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+2} (m+2)(m+1) g^m - 2 \sum_{m=0}^{\infty} C_m m g^m + (\lambda - 1) \sum_{m=0}^{\infty} C_m g^m = 0$$

$$\sum (C_{m+2} (m+2)(m+1) - 2 C_m m + (\lambda - 1) C_m) g^m = 0$$

$$C_{m+2} (m+2)(m+1) - 2 C_m m + (\lambda - 1) C_m = 0$$

$$C_{m+2} = \frac{(2m + (1 - \lambda))}{(m+2)(m+1)} C_m$$

$$\frac{C_{m+2}}{C_m} = \frac{1}{m} \quad m=n$$

$$2n + (1 - \lambda) = 0 \quad \lambda = 2n + 1, \quad \lambda = \frac{2E}{\hbar \omega}$$

$$2n - \lambda - 1 = 0 \quad \frac{2E}{\hbar \omega} = 2n + 1$$

$$E = \frac{(2n+1)\hbar\omega}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \quad n=0,1,\dots$$

$$C_{m+2} = \frac{(2m + (1 - \lambda))}{(m+2)(m+1)} C_m$$

C_0, C_1 değerleri biliniyor. bütün c değerlerini bulabiliriz.

$$C_2 = \frac{(1 - \lambda) C_0}{2}$$

$$C_2 = \frac{(1 - 5)}{2} C_0$$

$$C_3 = \frac{2 + (1 - \lambda) C_1}{3 \cdot 2}$$

$$= -\frac{4}{2} C_0 = -2 C_0$$

$$\psi = e^{\frac{g^2}{2}} u(g)$$

$$C_3 = \frac{(2 + (-6)) C_1}{6}$$

$$= -\frac{4}{3} C_1 = -\frac{2}{3} C_1$$

$$u_0(g) = H_0(g)$$

$$\psi = N e^{\frac{g^2}{2}} H_0(g)$$

$$\frac{d^2 u}{dg^2} - 2g \frac{du}{dg} + (\lambda - 1)u = 0 \quad \text{Hermit Polinom}$$

Cift çözümler için ;

Tek çözümler için; $C_0=0, C_1=2$

$$C_0=1$$

$$C_1=0$$

$$u_0$$

$$u_1 = ??$$

$$u_2$$

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} C_m g^m$$

$$u_2 = C_0 + C_2 g^2$$

$$u_2 = 1 + C_2 g^2$$

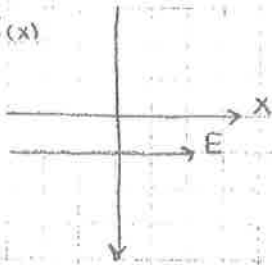
$$u_3 = C_0 + C_1 g + C_2 g^2 + C_3 g^3$$

$$u_3 = C_1 g + C_3 g^3$$

Çözümler

Dirac Delta Potansiyel Kuyusu

$$V(x) = -\alpha \delta(x)$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha \delta(x) \psi = E \psi$$

$$x \neq 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E \psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m|E|}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k^2 \psi = 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi = A e^{-kx} + B e^{kx} \quad x < 0 \quad A = 0$$

$$\psi_1 = B e^{kx}$$

$$\psi_2 = A e^{-kx} + B e^{kx} \quad x > 0 \quad B = 0$$

$$\psi_2 = A e^{-kx}$$

→ Süreklilik Koşulu

$$x=0 \quad \psi_1 = \psi_2$$

$$B e^{kx} \Big|_{x=0} = A e^{-kx} \Big|_{x=0}$$

$$B = A$$

● Birinci türevin süreklilik şartı

$$\int_{-t}^{+t} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx - \int_{-t}^{+t} \alpha \delta(x) \psi(x) dx = \int_{-t}^{+t} E \psi(x) dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-t}^{+t} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dx} \right) dx - \alpha \int_{-t}^{+t} \delta(x) \psi(x) dx = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d\psi}{dx} \Big|_{+t} - \frac{d\psi}{dx} \Big|_{-t} \right) - \alpha \psi(0) = 0$$

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{+t} - \frac{d\psi}{dx} \Big|_{-t} + \frac{2m}{\hbar^2} \alpha \psi(0) = 0$$

$$\frac{d\psi}{dx} \Big|_{+t} - \frac{d\psi}{dx} \Big|_{-t} = -\frac{2m}{\hbar^2} \alpha \psi(0)$$

$$\left. \frac{d\psi_2}{dx} \right|_{x=0} - \left. \frac{d\psi_1}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{2m\alpha\psi(0)}{\hbar^2}$$

$$A(-K)e^{-Kx} - BKe^{-Kx} = -\frac{2m\alpha\psi(0)}{\hbar^2}$$

$$+2Ke^{-Kx} \Big|_{x=0} = +\frac{2m\alpha}{\hbar^2}$$

$$2K = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \rightarrow K = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$$

Kuantum Mekaniğinin Genel Yapısı

31.07.2012

Linear Vektör Uzayı

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Hilbert Uzayı

$$\psi(r), \int \psi^*(r) \psi(r) dr = \langle \psi(r) | \psi(r) \rangle$$

$$\psi(r) \rightarrow |\psi(r)\rangle$$

$$\psi^*(r) \rightarrow \langle \psi(r)|$$

$$\psi(r) = \sum_i c_i u_i(r) \rightarrow \text{Baz Vektörleri } (u_i)$$

$$\int u_j^*(r) u_i(r) d^3r = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\int \psi^* \psi d^3r = 1 = \sum_i |c_i|^2 = 1$$

Kuantum mekaniğinde her gözlemlenebilir bir değere bir operatör karşılık gelir.

Hermitik Operatörler

$$A\psi = a\psi$$

A operatörünün hermitik eşleniği: $A^\dagger$

$$(A^\dagger)^\dagger = A$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = A^\dagger \rightarrow \text{Hermitik Operatör}$$

Bir operatörün kompleks eşleniğinin transpozunu kendisine eşitse bu operatörler Hermitiktir.

$$A \psi_n = \lambda_n \psi_n$$

$$(A \psi_n)^* = \lambda_n^* \psi_n^*$$

1. Hermitik operatörlerin eigen (öz) değerleri gerçektir.

$$A = A^* \text{ ise } \lambda_n = \lambda_n^* \quad \lambda_n \text{ gerçektir.}$$

$$\int \psi_m^* A \psi_n dx = \lambda_n \int \psi_m^* \psi_n dx \quad *$$

$$\int (A \psi_m)^* \psi_n dx = \lambda_m^* \int \psi_m^* \psi_n dx \quad **$$

$$** - *$$

$$(\lambda_m^* - \lambda_n) \int \psi_m^* \psi_n dx = \underbrace{\int (A \psi_m)^* \psi_n dx - \int \psi_m^* A \psi_n dx}_{\neq 0 \text{ veya } = 0}$$

$$\int (A \psi_m)^* \psi_n dx = \int \psi_m^* A^+ \psi_n dx$$

$$A^+ = A \rightarrow A \text{ Hermitik ise}$$

Eğer A Hermitik ise

$$= \int \psi_m^* A^+ \psi_n dx - \int \psi_m^* A \psi_n dx$$

$$= 0$$

$$\lambda_m^* = \lambda_n \rightarrow \lambda_n^* = \lambda_n$$

1

$$\int \psi_m^* \psi_n dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int \psi_n^* \psi_n dx = 1$$

$$\leftarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$$

2. Bir operatörün özdeğerleri birbirinden farklı ise bunlara karşılık gelen özdeğer vektörleri birbirine diktir.

$$A \psi_n = \lambda_n \psi_n$$

$$A \psi_m = \lambda_m \psi_m$$

$$n \neq m \int \psi_m^* \psi_n dx = 0$$

1

$$A\psi_n = \lambda_n \psi_n$$

$$(A\psi_m)^* = \lambda_m^* \psi_m^*$$

$$1. \text{ denklemin } \int \psi_m^* A \psi_n dx = \lambda_n \int \psi_m^* \psi_n dx$$

$$2. \text{ denklemin } \int (A\psi_m)^* \psi_n dx = \lambda_m^* \int \psi_m^* \psi_n dx \quad \lambda_m^* = \lambda_m$$

1-2

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int \psi_m^* \psi_n dx = \int \psi_m^* A \psi_n dx - \int (A\psi_m)^* \psi_n dx = \int \psi_m^* A \psi_n dx - \int \psi_m^* A^* \psi_n dx = 0$$

=0

Burada
 $A^* = A$

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int \psi_m^* \psi_n dx = 0$$

=0

Kuantum Mekaniğinin Postülatları

1. Bir sistemin durumunu temsil eden dalg fonksiyonu sistem hakkındaki her şeyin belirleyicisidir.

2. Bir fiziksel sistemin belirli bir t anındaki durumu $\psi(r,t)$ dalg fonksiyonu ile belirlenir.

3. Ölçülebilir her q fiziksel büyüklüğü bir hermitik A operatörü ile temsil edilir. Bu büyüklük ölçüldüğünde bulunacak değer A operatörünün öz değerlerinden biri olur.

4. Her dalg fonksiyonu ψ , herhangi bir fiziksel büyüklüğü temsil eden A operatörünün öz vektörleri serisi olarak yazılabilir.

$$\psi = \sum c_i \psi_i$$

5. Gözlenebilir değerlerin ölçümünün ortalama değeri

$$\langle A \rangle = \int \psi^* A \psi dx \text{ 'dir}$$

6. Sistemin Zaman İcindeki gelişimi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(r,t)\rangle = H |\Psi(r,t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

$$3.11: \langle p \rangle \stackrel{?}{=} m \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} \stackrel{??}{=} \left(\frac{dV}{dx} \right)$$

Bellenen Değerin Zaman İcindeki Değişimi

$$\langle A \rangle = \int \Psi^*(x,t) A \Psi(x,t) dx$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \int \frac{\partial \Psi^*(x,t)}{\partial t} A \Psi(x,t) dx + \int \Psi^*(x,t) \frac{\partial A \Psi(x,t)}{\partial t} dx + \int \Psi^*(x,t) A \frac{d\Psi}{dt} dx$$

$$= \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \int \left(\frac{H\Psi}{i\hbar} \right)^* A \Psi(x,t) dx + \int \Psi^*(x,t) A \left(\frac{H\Psi}{i\hbar} \right) dx$$

$$H\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{H\Psi}{i\hbar} \quad * A \text{ ve } H \text{ operatörleri hermitiktir. } (H^\dagger = H)$$

$$= \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \int \frac{1}{\hbar} \Psi^* H^\dagger A \Psi dx + \int \Psi^* A H \left(-\frac{i}{\hbar} \right) \Psi dx$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \int \Psi^* (HA - AH) \Psi dx = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \frac{i}{\hbar} [H, A]$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, x] \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$[H, x] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), x \right] = \left[\frac{p^2}{2m}, x \right] = \frac{1}{2m} \left\{ p[p, x] + [p, x]p \right\}$$

$$= \frac{1}{2m} \left\{ p \frac{\hbar}{i} + \frac{\hbar}{i} p \right\} = \frac{2p\hbar}{2mi} = \frac{\hbar}{i} \frac{p}{m}$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle \frac{\hbar}{i} \frac{p}{m} \rangle$$

$$= \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

$$\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt}$$

Momentum join total

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, p] \rangle$$

$$[H, p] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(x), p \right] = [V(x), p]$$

$$[V(x), p] \psi = V(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial V(x) \psi}{\partial x}$$

$$= V(x) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial V(x) \psi}{\partial x} = \frac{\hbar}{i} V(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\hbar}{i} V(x) \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$[V(x), p] \psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \psi$$

$$[V(x), p] = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [H, p] \rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left\langle \frac{\hbar}{i} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle p \rangle$$

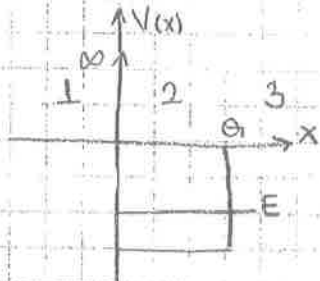
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle$$

4.9: Yanı soru potansiyel

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

icin ve $E < 0$ için bagli enerji durumlarını bulunuz



1. bölge potansiyel soru $\Psi_1 = 0$

2. bölge $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + |V_0| \Psi = |E| \Psi$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [|E| - |V_0|] \Psi = 0$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [V_0 - E] \Psi = 0$$

$$\Psi_2 = A \cos kx + B \sin kx$$

3. bölge

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} = |E| \Psi$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} |E| \Psi = 0 \rightarrow \frac{d^2 \Psi}{dx^2} - \frac{2m E}{\hbar^2} \Psi = 0$$

$$K^2 = -\frac{2m E}{\hbar^2} \rightarrow K^2 = \frac{2m E}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} - K^2 \Psi = 0$$

$$\Psi = C e^{-Kx} + D e^{Kx} \quad D = 0$$

$$\Psi_3 = C e^{-Kx}$$

Sürekli Saitları

$$x=0$$

$$\Psi_2 = A \cos kx + B \sin kx$$

$$\Psi_2|_{x=0} = A \cos 0 + B \sin 0$$

$$\rightarrow A = 0$$

$$\Psi_2 = B \sin kx$$

$$\Psi_3 = C e^{-Kx}$$

$x=a$ süreklilik şartı

$$\psi_2|_{x=a} = \psi_3|_{x=a}$$

$$B \sin ka = C e^{-ka}$$

$$\frac{d\psi_2}{dx}|_{x=a} = \frac{d\psi_3}{dx}|_{x=a}$$

$$k B \cos ka = -k C e^{-ka}$$

$$\frac{k B \cos ka}{B \sin ka} = \frac{-k C e^{-ka}}{C e^{-ka}} \rightarrow k \cot ka = -k$$

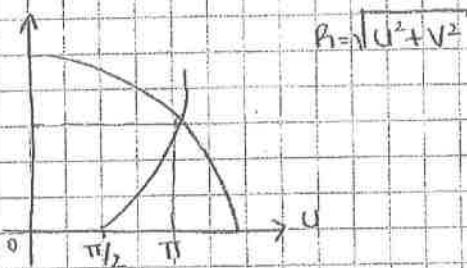
$$u = ka \quad v = -ka$$

$$k \cot ka = -k$$

$$u \cot u = -v$$

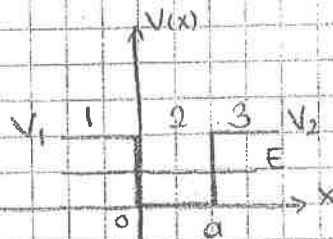
$$u^2 + v^2 = \left[\frac{2m(V_0 - E)a^2}{\hbar^2} + \frac{2m E a^2}{\hbar^2} \right]$$

$$= \frac{2m V_0 a^2}{\hbar^2}$$



4.10:

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & x < 0 \\ 0 & 0 < x < a \\ V_2 & x > a \end{cases}$$



Parçacığın bağlı durumları için enerji ifadesini buluruz.

1. Bölge

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V_1 \psi = E \psi$$

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m(E - V_1)}{\hbar^2}}_{-k^2} \psi = 0$$

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_1 - E)$$

$$\psi_1 = Ae^{-kx} + Be^{kx} \quad A=0$$

$$\psi_1 = Be^{kx}$$

2. Bölge

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} E}_{k^2} \psi = 0$$

$$\psi_2 = C \cos kx + D \sin kx$$

3. Bölge

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_2 \psi = E\psi$$

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_2 - E)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_2)}_{-\alpha^2} \psi = 0$$

$$\psi_3 = Fe^{-\alpha x} + Ee^{\alpha x} \quad E=0$$

$$\psi_3 = Fe^{-\alpha x}$$

Süreklilik Şartları

$$x=0 \quad \psi_1 = Be^{kx}$$

$$\psi_2 = C \cos kx + D \sin kx$$

$$\psi_1 = \psi_2 \big|_{x=0}$$

$$B = C$$

$$Bke^{kx} \big|_{x=0} = -kC \sin kx + kD \cos kx$$

$$BK = kD$$

$$x=a \quad \psi_2 = B \cos kx + \frac{BK}{k} \sin kx$$

$$\psi_3 = Fe^{-\alpha x}$$

$$B (\cos ka + \frac{K}{k} \sin ka) = Fe^{-\alpha a}$$

$$k (B(-\sin ka) + B \frac{K}{k} \cos ka) = F(-\alpha) e^{-\alpha a}$$

$$k \tan \alpha + k \cot \alpha = -\alpha$$

$$k \tan \alpha - k \cot \alpha = \alpha$$

