

Bazı Sonlu Sıra-Koruyan Dönüşüm Yarıgruplarının Doğuray Kümeleri

Hayrullah Ayık ve Leyla Bugay

hayik@cu.edu.tr; ltanguler@cu.edu.tr
Çukurova Üniversitesi, Matematik Bölümü

Eylül, 2013

Tanım

S bir yarıgrup ve $x \in S$ olsun. Eğer

$$x^2 = x$$

ise x elemanına bir **idempotent** denir.

$\emptyset \neq A \subseteq S$ için A daki tüm idempotentlerin kümesi $E(A)$ ile gösterilir.

Tanım

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olmak üzere S nin A yı içeren en küçük altyarıgrubuna A tarafından doğurulan altyarıgrup denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir.

Kolayca gösterilebilir ki,

$$\langle A \rangle = \{a_1 \cdots a_n : a_1, \dots, a_n \in A, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

dır; yani A üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

Tanım

S bir sonlu doğuraylı yarıgrup olmak üzere,

$$\text{rank}(S) = \min\{|A| : \langle A \rangle = S\}$$

*sayısına S **nin rankı** ve S nin $\text{rank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine **minimal doğuray kümesi** denir.*

Tanım

α , X üzerinde bir bağıntı ($\alpha \subseteq X \times X$) olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| \leq 1$$

ise α ya X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** ve

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| = 1$$

ise α ya X üzerinde bir **(tam) dönüşüm (fonksiyon)** denir.

Burada,

$$x\alpha = \{y \in X : (x, y) \in \alpha\}$$

şeklindedir.

Tanım

X kümesi üzerinde tanımlı *kısmi dönüşümlerin ve tam dönüşümlerin oluşturduğu kümeler, bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla X üzerindeki **kısmi dönüşümler yarıgrubu** P_X ve **(tam) dönüşümler yarıgrubu** T_X denir.*

$T_X \leq P_X$ olduğu açıktır.

Eğer X , n elemanlı sonlu bir küme ise (permütasyonlar grubu S_n de olduğu gibi) $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde kabul edebiliriz. Bu durumda, P_X ve T_X yerine kısaca P_n ve T_n yazılır.

Tanım

$\alpha \in P_n$ olmak üzere,

$$\text{dom}(\alpha) = \{x \in X_n : \exists y \in X_n, (x, y) \in \alpha\};$$

$$\text{im}(\alpha) = \{y \in X_n : \exists x \in X_n, (x, y) \in \alpha\} \text{ ve}$$

$$h(\alpha) = |\text{im}(\alpha)|,$$

$$\text{ker}(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : (x, y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ve } x\alpha = y\alpha) \\ \text{veya } (x, y \notin \text{dom}(\alpha))\}$$

*sırasıyla α nın **tanım kümesi**, **görüntü kümesi**, **yüksekliği** ve **çekirdek kümesi** olarak adlandırılır.*

Ayrıca, $\alpha, \beta \in P_n$ için

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(\alpha\beta) &\subseteq \operatorname{dom}(\alpha) \\ \operatorname{im}(\alpha\beta) &\subseteq \operatorname{im}(\beta) \text{ ve} \\ \ker(\alpha) &\subseteq \ker(\alpha\beta)\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım

$\alpha \in P_n$ olmak üzere,

$$\text{kp}(\alpha) = \{y\alpha^{-1} : y \in \text{im}(\alpha)\}$$

kümesi ve

$$\text{ks}(\alpha) = (\text{kp}(\alpha), X_n \setminus \text{dom}(\alpha))$$

*sıralı ikilisi sırasıyla α nın **çekirdek parçalanışı** ve **çekirdek yapısı** olarak adlandırılır.*

Burada,

$$y\alpha^{-1} = \{x \in X : (x, y) \in \alpha\}$$

şeklindedir.

Tanım

X_n üzerindeki doğal sıralama altında **Sıra-koruyan dönüşüm yarıgrubu** O_n ve **Kısmi sıra-koruyan dönüşüm yarıgrubu** PO_n

$$O_n = \{\alpha \in T_n \setminus S_n : x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha \ (\forall x, y \in X_n)\}, \text{ ve}$$
$$PO_n = \{\alpha \in P_n \setminus S_n : x \leq y \Rightarrow x\alpha \leq y\alpha \ (\forall x, y \in \text{dom}(\alpha))\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım

$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ bir $Y \subseteq X_n$ kümesinin herhangi bir parçalanışı olsun. Eğer

her $1 \leq i \leq k - 1, x \in A_i$ ve $y \in A_{i+1}$ için $x < y$

oluyorsa $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ bir **sıralı parçalanış** olarak adlandırılır.

Ayrıca, her $1 \leq i \leq k$ için

$$|\{a_1, \dots, a_k\} \cap A_i| = 1$$

ise $\{a_1, \dots, a_k\}$ kümesine $\mathcal{A}$ nın bir **transversali** denir.

Tanım

$1 \leq r \leq n - 1$ için

$$O(n, r) = \{\alpha \in O_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\} \text{ ve}$$

$$PO(n, r) = \{\alpha \in PO_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$$

sırasıyla O_n ve PO_n nin altyarıgrupları olurlar.

Dikkat edilirse $O(n, n - 1) = O_n$ ve $PO(n, n - 1) = PO_n$ olur.

Cayley teoreminin bir benzeri olarak, her sonlu yarıgrup **sonlu bir küme üzerindeki tüm dönüşümler yarıgrubunun bir altarı grubuna izomorftur**. Dolayısıyla, T_n in ve altarı gruplarının sonlu doğuray kümelerini bulma problemi yarıgrup teorisinde başlı başına bir araştırma konusu olmuştur.

Biz de daha önce T_n nin bir altarı grubu olan ve $\text{Sing}_n = T_n \setminus S_n$ ile gösterilen "**tekil dönüşüm yarı grubu**" nu incelemiş ve herhangi bir altkümesinin bir (minimal) doğuray kümesi olabilmesi için gerekli ve yeterli olan koşulları bulmuştuk ([1]).

Bu çalışmamızda ise aynı problemi, $2 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere, $O(n, r)$ altyarıgrubu için düşünüp bulduğumuz sonuçları $PO(n, r)$ altyarıgrubuna da genelleştirdik.

Daha Önce Yapılan Bazı Çalışmalar

Howie O_n nin, yüksekliği $n - 1$ olan idempotentleri tarafından doğrulduğunu ve daha sonra da Gomes ile birlikte rankının n olduğunu gösterdi. Yine Gomes and Howie PO_n nin, yüksekliği $n - 1$ olan idempotentleri tarafından doğrulduğunu ve rankının $2n - 1$ olduğunu gösterdi.

Ayrıca, $2 \leq r \leq n - 2$ için, Garba $O(n, r)$ ve $PO(n, r)$ altyarıgruplarının da yüksekliği r olan idempotentleri tarafından doğrulduğunu ve ranklarının sırasıyla $\binom{n}{r}$ ve $\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k-1}{r-1}$ olduğunu gösterdi.

Tanım

S yarıgrubu üzerinde tanımlanan

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S : aS^1 = bS^1\}$$

$\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ ilişkileri birer denklik ilişkisi olup bu denklik ilişkilerine sırasıyla **sol green** ($\mathcal{L}$ -green) ve **sağ green** ($\mathcal{R}$ -green) denklik ilişkisi denir.

Tanım

$\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ yi içeren en küçük denklik ilişkisine **$\mathcal{D}$ -green denklik ilişkisi** denir ve $\mathcal{D}$ ile gösterilir.

$\mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ denklik ilişkisine da **$\mathcal{H}$ -green denklik ilişkisi** denir ve $\mathcal{H}$ ile gösterilir.

Önerme 1.

Herhangi iki $\alpha, \beta \in O(n, r)$ (veya $PO(n, r)$) için

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta),$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \text{ks}(\alpha) = \text{ks}(\beta),$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow h(\alpha) = h(\beta) \text{ ve}$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

olur.



Her $1 \leq r \leq n - 1$ için $O(n, r)$ ($PO(n, r)$) de yüksekliği k olan tüm elemanların oluşturduğu $\mathcal{D}$ -green denklik sınıfı D_k ile gösterilir.

Bir $Y \subseteq O(n, r)$ için

$$\langle Y \rangle = O(n, r) \Leftrightarrow \langle Y \cap D_r \rangle = O(n, r)$$

olduğundan $O(n, r)$ nin doğuray kümeleri için sadece D_r nin altkümelerini düşünmek yeterlidir.

Ayrıca, $X \subseteq D_r$ için

$$\langle X \rangle = O(n, r) \Leftrightarrow E(D_r) \subseteq \langle X \rangle$$

şeklindedir.

Aynı durum $PO(n, r)$ için de geçerlidir.

Önerme 2.

$n, k \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $O(n, r)$ (veya $PO(n, r)$) de $\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in D_r$ olsun. O halde

(i)

$$\begin{aligned}\alpha\beta \in D_r &\Leftrightarrow \text{im}(\alpha\beta) = \text{im}(\beta) \\ &\Leftrightarrow \text{im}(\alpha), \beta \text{ nın çekirdek parçalanışı} \\ &\quad \text{kp}(\beta) \text{ nın bir transversalidir.}\end{aligned}$$

(ii) $\alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r \Leftrightarrow$ her $1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$.

İspat:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r \\ a_1 & \dots & a_r \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_r \\ b_1 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

olarak göz önüne alınırsa ilk iddianın doğruluğu kolayca görülebilir. İkinci iddia ise tümevarımla kolayca gösterilebilir. ■

Tanım

$O(n, r)$ (veya $PO(n, r)$) de $X \subseteq D_r$ olmak üzere Γ_X yönlü grafiğini,

- köşe kümesi $V = V(\Gamma_X) = X$ ve
- yönlü kenar listesi

$$\vec{E} = \vec{E}(\Gamma_X) = \{(\gamma, \lambda) \in V \times V : \gamma\lambda \in D_r\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Herhangi $u, v \in V(\Gamma_X)$ için eğer u dan v ye bir **yönlü patika** varsa; yani $(u, v) \in \vec{E}(\Gamma_X)$ veya bazı $w_1, \dots, w_n \in V(\Gamma_X)$ için

$$(u, w_1), \dots, (w_i, w_{i+1}), \dots, (w_n, v) \in \vec{E}(\Gamma_X)$$

ise, u köşesi v köşesine **bağlı** diyeceğiz.

$O(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

Teorem 1.

$2 \leq r \leq n - 1$ ve $X \subseteq D_r$ olmak üzere X in, $O(n, r)$ nin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul her $\xi \in D_r$ idempotenti için

- (i) $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$,
- (ii) $\text{im}(\beta) = \text{im}(\xi)$, ve
- (iii) Γ_X yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ elemanlarının var olmasıdır.

$O(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

İspat: $(\Rightarrow)$ X , $O(n, r)$ nin bir doğuray kümesi ve $\xi \in E(D_r)$ olsun. O halde,

$$\alpha_1 \cdots \alpha_k = \xi$$

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in X$ vardır. $\ker(\alpha_1) \subseteq \ker(\xi)$, $\text{im}(\xi) \subseteq \text{im}(\alpha_k)$ ve $h(\alpha_1) = h(\alpha_k) = h(\xi) = r$ olduğundan $\ker(\alpha_1) = \ker(\xi)$ ve $\text{im}(\alpha_k) = \text{im}(\xi)$ olur. Böylece (i) ve (ii) koşulları sağlanmış olur. Ayrıca, Önerme 2. (ii) den her $1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olur. Dolayısıyla Γ_X de α_i den α_{i+1} ye yönlü kenar ve α_1 den α_k ya yönlü patika vardır. O halde α_1, α_k ya bağlı olup son koşul da sağlanır.

$O(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

$(\Leftarrow) E(D_r) \subseteq \langle X \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\xi \in E(D_r)$ olsun. (i), (ii) ve (iii) den dolayı $\ker(\alpha) = \ker(\xi)$, $\text{im}(\beta) = \text{im}(\xi)$ ve Γ_X yönlü grafiğinde α, β ya bağlı olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ vardır. O halde, α dan β ya bir

$$\alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \alpha_{k-1} \rightarrow \alpha_k = \beta$$

yönlü patika vardır ve dolayısıyla her $1 \leq i \leq k-1$ için $\alpha_i \alpha_{i+1} \in D_r$ olur. Önerme 2. (ii) den, $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_k \in D_r$. Benzer şekilde $\text{im}(\gamma) = \text{im}(\alpha_k) = \text{im}(\beta) = \text{im}(\xi)$ ve $\ker(\gamma) = \ker(\alpha_1) = \ker(\alpha) = \ker(\xi)$ olup ξ ve γ aynı Green $\mathcal{H}$ -sınıfındadır. Yani, $\xi = \gamma \in \langle X \rangle$ ve böylece $E(D_r) \subseteq \langle X \rangle$ olur. ■

$O(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

Sonuç

$2 \leq r \leq n - 1$ için $\text{rank}(O(n, r)) = \binom{n}{r}$ olup, $|X| = \binom{n}{r}$ olmak üzere X in, $O(n, r)$ nin bir **minimal** doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul yukarıdaki koşulların sağlanmasıdır.

$O(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

Önerme 3.

$2 \leq r \leq n - 1$ ve $\binom{n-1}{r-1} = m$ olmak üzere $P_1, \dots, P_m$ X_n nin r tane sıralı kümeye tüm parçalanışları olsunlar. O halde X_n nin eleman sayıları r olan m tane farklı $I_1, \dots, I_m$ altkümesi vardır öyleki; her $1 \leq i \leq m$ için I_i , P_i nin bir transversalidir.

Önerme 4.

$2 \leq r \leq n - 1$ ve $\binom{n-1}{r-1} = m$ olmak üzere $P_1, \dots, P_m$ X_n nin r tane sıralı kümeye tüm parçalanışları olsunlar. O halde

- (i) $\text{kp}(\alpha_1) = P_m$ ve $\text{kp}(\alpha_i) = P_{i-1}$, her $1 < i \leq m$;
- (ii) $\text{im}(\alpha_i) \neq \text{im}(\alpha_j)$ eğer $1 \leq i \neq j \leq m$; ve
- (iii) her $1 \leq i \leq m - 1$ için $\text{im}(\alpha_i)$, $\text{kp}(\alpha_{i+1}) = P_i$ nin bir transversali ve $\text{im}(\alpha_m)$, $\text{kp}(\alpha_1) = P_m$ nin bir transversali.

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ vardır.

$O(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

$O(n, r)$ nin Minimal Doğuray Kümelerinin Yapısı:

$2 \leq r \leq n-1$, $\binom{n-1}{r-1} = m$ ve $\binom{n}{r} = t$ olmak üzere $P_1, \dots, P_m$ X_n nin r tane sıralı kümeye tüm parçalanışları ve $L_1, \dots, L_t$ D_r deki tüm Green $\mathcal{L}$ -sınıfları olsunlar. Önerme 4. den

- (i) $\text{kp}(\alpha_1) = P_m$ ve $\text{kp}(\alpha_i) = P_{i-1}$, her $1 < i \leq m$;
- (ii) $\text{im}(\alpha_i) \neq \text{im}(\alpha_j)$ eğer $1 \leq i \neq j \leq m$; ve
- (iii) her $1 \leq i \leq m-1$ için $\text{im}(\alpha_i)$, $\text{kp}(\alpha_{i+1}) = P_i$ nin bir transversali ve $\text{im}(\alpha_m)$, $\text{kp}(\alpha_1) = P_m$ nin bir transversali.

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ vardır. Genelliği bozmaksızın, her $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in L_i$ olsun. Eğer her $1 \leq j \leq t-m$ için L_{m+j} den bir α_{m+j} elemanı alırsak

$$X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_t\}$$

$O(n, r)$ nin bir minimal doğuray kümesi olur.

Teorem 2.

$2 \leq r \leq n - 1$ ve $X \subseteq D_r$ olmak üzere X in, $PO(n, r)$ nin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul her $\xi \in D_r$ idempotenti için

- (i) $ks(\alpha) = ks(\xi)$,
- (ii) $im(\beta) = im(\xi)$, ve
- (iii) Γ_X yönlü grafiğinde α, β ya bağlı

olacak şekilde $\alpha, \beta \in X$ elemanlarının var olmasıdır.

İspat: Her $\alpha, \beta \in P_n$ için $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ olduğu göz önüne alınarak Teorem 1. in ispatına benzer şekilde ispatlanır.

$PO(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

Sonuç

$2 \leq r \leq n - 1$ için $\text{rank}(PO(n, r)) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k-1}{r-1}$ olup, $|X| = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k-1}{r-1}$ olmak üzere X in, $PO(n, r)$ nin bir **minimal** doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul yukarıdaki koşulların sağlanmasıdır.

$PO(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

Önerme 5.

$2 \leq r \leq n - 1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $l_1, \dots, l_m$ X_n nin r elemanlı tüm altkümeleri olsunlar. O halde her $1 \leq i \leq m$ için X_n nin bir $A_{i_{r+1}}$ altkümesi ve $X_n \setminus A_{i_{r+1}}$ nin bir $P_i = (A_{i_1}, \dots, A_{i_r})$ sıralı parçalanışı vardır öyleki; her $1 \leq i \leq m$ için l_i, P_i nin bir transversalidir ve $1 \leq i \neq j \leq m$ için $P_i \neq P_j$ dir.

Önerme 6.

$2 \leq r \leq n - 1$ ve $\binom{n}{r} = m$ olmak üzere $l_1, \dots, l_m$ X_n nin r elemanlı tüm altkümeleri olsunlar. O halde

- (i) $\text{im}(\alpha_i) = l_i$, her $1 \leq i \leq m$;
- (ii) $\text{ks}(\alpha_i) \neq \text{ks}(\alpha_j)$ eğer $1 \leq i \neq j \leq m$; ve
- (iii) her $1 \leq i \leq m - 1$ için $l_i, \text{kp}(\alpha_{i+1})$ nin bir transversali ve $l_m, \text{kp}(\alpha_1)$ in bir transversali.

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ vardır.

$PO(n, r)$ nin Doğuray Kümeleri

$PO(n, r)$ nin Minimal Doğuray Kümelerinin Yapısı:

$2 \leq r \leq n-1$, $\binom{n}{r} = m$ ve $\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k-1}{r-1} = t$ olmak üzere $I_1, \dots, I_m$ X_n nin r elemanlı tüm altkümeleri ve $R_1, \dots, R_t$ D_r deki tüm Green $\mathcal{R}$ -sınıfları olsunlar. Önerme 6. dan

- (i) $\text{im}(\alpha_i) = I_i$, her $1 \leq i \leq m$;
- (ii) $\text{ks}(\alpha_i) \neq \text{ks}(\alpha_j)$ eğer $1 \leq i \neq j \leq m$; ve
- (iii) her $1 \leq i \leq m-1$ için I_i , $\text{kp}(\alpha_{i+1})$ nin bir transversali ve I_m , $\text{kp}(\alpha_1)$ in bir transversali.

olacak şekilde $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in D_r$ vardır. Genelliği bozmaksızın, her $1 \leq i \leq m$ için $\alpha_i \in R_i$ olsun. Eğer her $1 \leq j \leq t-m$ için R_{m+j} den bir α_{m+j} elemanı alırsak

$$X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_t\}$$

$PO(n, r)$ nin bir minimal doğuray kümesi olur.

-  G. Ayık, H. Ayık, L. Bugay and O. Kelekci, *Generating Sets of Finite Singular Transformation Semigroups*, Semigroup Forum **86**, 59–66, (2013).
-  O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical Finite Transformation Semigroups*, Springer-Verlag, 2009.
-  G.U. Garba, *On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations*, Portugal. Math. **51**, 185–204, (1994).
-  G.M.S. Gomes and J.M. Howie, *On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations*, Semigroup Forum **45**, 272–282, (1992) .

-  J.M. Howie, *Products of Idempotents in Certain Semigroups of Transformations*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **17**, 223–236, (1971).
-  J.M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, 1995.
-  J.M. Howie and R.B. McFadden, *Idempotent Rank in Finite Full Transformation Semigroups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **114A**, 161–167, (1990).

Teşekkürler...

-  G. Ayık, H. Ayık, L. Bugay and O. Kelekci, *Generating Sets of Finite Singular Transformation Semigroups*, Semigroup Forum **86**, 59–66, (2013).
-  G. Ayık, H. Ayık and M. Koç, *Combinatorial Results for Order-Preserving and Order-Decreasing Transformations*, Turkish J. Math. **35**, 617–625, (2011).
-  O. Ganyushkin and V. Mazorchuk, *Classical Finite Transformation Semigroups*, Springer-Verlag, 2009.
-  G.U. Garba, *On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations*, Portugal. Math. **51**, 185–204, (1994).
-  G.M.S. Gomes and J.M. Howie, *On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations*, Semigroup Forum **45**, 272–282, (1992) .

-  P.M. Higgins, *The Product of the Idempotents and an $\mathcal{H}$ -class of the Finite Full Transformation Semigroup*, Semigroup Forum **84**, 203–215, (2012).
-  J.M. Howie, *Products of Idempotents in Certain Semigroups of Transformations*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **17**, 223–236, (1971).
-  J.M. Howie, *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford University Press, 1995.
-  J.M. Howie and R.B. McFadden, *Idempotent Rank in Finite Full Transformation Semigroups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **114A**, 161–167, (1990).

-  S. Sornsanam and R.P. Sullivan, *Regularity Conditions on Order-Preserving Transformation Semigroups*, Southeast Asian Bull. Math. **28**, 333–342, (2004).
-  R. J. Wilson and J.J. Watkins, *Graphs: An Introductory Approach*, Wiley, 1990.
-  H. Yang and X. Yang, *Automorphisms of Partition Order-decreasing Transformation Monoids*, Semigroup Forum **85**, 513–524, (2012).
-  P. Zhao, B. Xu and M. Yang, *A Note on Maximal Properties of Some Subsemigroups of Finite Order-Preserving Transformation Semigroups*, Comm. Algebra **40**, 1116–1121, (2012).